知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

目　　录

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

第一部分　选择题

微积分

线性代数

概率论与数理统计

◇◇ 微积分 ◇◇

1. 设数列 x_n 与 y_n，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列叙述正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小量.

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量，则 y_n 必为无穷小量. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 举出反例，否定(A)(B)(C).

例如，$x_n=(-1)^n$ 发散，$y_n=0$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 因此不选(A)

例如，$x_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ n, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ x_n 无界，

$y_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ y_n 也无界，

但 $\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$，因此不选(B)

例如，$x_n=0$ 数列 x_n 有界，$y_n=(-1)^n$，数列 y_n 不是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$，因此不选(C).

由排除法选(D).

事实上可以证明(D) 成立.

$$\lim_{x\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0.$$

2. 设 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$

(A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.

(C) 不一定存在. (D) 一定不存在. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\neq0$，则由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a\neq0$，因此不选(A)(D).

取 $x_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n+1}$，$y_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$，

$z_n=(-1)^n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\right)$，此时有 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,但当$n\to\infty$时,$z_n$的极限不存在,因此选(C).

【评注】 (1) 要注意夹逼定理的条件,当$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$时,才有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$不一定有$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$(或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$)存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,才能有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 设有数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,且$\{x_n\}$为无界数列,$\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0$,$\lim\limits_{x\to\infty} z_n = 1$,则必有

(A) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(C) 存在正整数N,当$n > N$,有$x_n > y_n$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n z_n$不存在. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 举反例说明(A),(B),(C)都不成立。

例如,$x_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ n & n\text{ 为偶数} \end{cases}$,$y_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{1}{n} & n\text{ 为偶数} \end{cases}$,$x_n y_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为奇数} \\ 1 & n\text{ 为偶数} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \infty$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} y_{2n+1} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} y_{2n} = 1$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n \neq 0$,

$\{x_n\}$与$\{y_n\}$中的奇数项相等,因而(C)不成立,由排除法,选(D).

【评注】 如果数列$\{x_n\}$为无穷大量($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$),则数列$\{x_n\}$无界,但无界数列却不一定是无穷大量,上面分析中所列举$\{x_n\}$的是无界数列,但不是无穷大量.

4. 设对任意$x \in (-\infty, +\infty)$有$f(x+1) = -f(x)$,则$f(x)$一定是

(A) 奇函数. (B) 偶函数.

(C) 周期函数. (D) 单调函数. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 由$f(x+1) = -f(x)$得$f(x+2) = f[(x+1)+1]$

$= -f(x+1) = -[-f(x)] = f(x)$. 所以$f(x)$是周期函数.

事实上,由题设条件,显然$f(x)$不是单调函数,取$x = -\dfrac{1}{3}$,则

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right),$$

由此得出$f(x)$既不是奇函数,又不是偶函数,用排除法,选择(C).

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分，则 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为

(A) $x \geqslant 1$.　　(B) $x < 1$.

(C) $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$.　　(D) $x < 1$ 且 $x \neq 0,-1,-2,\cdots$.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 对于任何实数 x，总可以把它表示成为一个整数和一个非负小数之和，即 $x = [x] + (x)$，其中 $[x]$ 是整数，(x) 是非负小数，$0 \leqslant (x) < 1$.

因为 $f(x)$ 是定义域是 $(0,1)$，因此 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域应为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$，因 $x = [x] + (x)$，所以有 $[x] = x - (x)$. 于是 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $0 < \frac{x-(x)}{x} < 1$ 亦即 $0 < \frac{(x)}{x} < 1$.

由 $\frac{[x]}{x}$ 可知 $x \neq 0$. 以下分两种情形讨论：

① 当 $x > 0$ 时.

要使 $\frac{(x)}{x} < 1$，须 $x \geqslant 1$，这是因为当 $0 < x < 1$ 时，$(x) = x$. 此时 $\frac{(x)}{x} = 1$. 不满足 $\frac{(x)}{x} < 1$.

要使 $\frac{(x)}{x} > 0$ 须使 $x \neq 1,2,3,\cdots$，这是因为当 $x > 0$. 且 $x = 1,2,3,\cdots$ 时 $(x) = 0$，此时 $\frac{(x)}{x} = 0$. 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

因而当 $x > 0$ 时 x 的取值应为 $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$.

② 当 $x < 0$ 时

因 $(x) \geqslant 0$，所以当 $x < 0$ 时 $\frac{(x)}{x} \leqslant 0$ 不能满足 $\frac{(x)}{x} > 0$.

综合 ①② 可得 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域是 $x > 1$ 且 $x \neq 2,3,\cdots$. 所以选(C).

6. 设 $f(x) = e^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 + x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，则 $\varphi(x)$ 在其定义域内是

(A) 有界函数.　　(B) 周期函数.

(C) 单调增加函数.　　(D) 单调减少函数.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 由 $f(x) = e^{x^2}$ 得 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 + x$，又因 $\varphi(x) \geqslant 0$，所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$，其定义域为 $x \geqslant 0$.

显然 $\varphi(x)$ 不是周期函数，排除(B).

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(1+x)} = +\infty$，因此，$\varphi(x)$ 在其定义域内是无界的，所以不选(A).

由于 $\ln(1+x)$ 以及 $\sqrt{u}$ 是单调增加函数，所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 为单调增加函数，因此选(C)

不是选(D).

【评注】 也可用 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的导数符号来判断 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 的单调性：$(\sqrt{\ln(1+x)})'=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(1+x)}}\cdot\dfrac{1}{1+x}>0\quad(x\geqslant 0)$，所以 $\sqrt{\ln(1+x)}$ 在其定义域内是单调增加的.

7. 下列极限正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，因此选(B)

而 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\sin x$ 是有界量，

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

【评注】 在重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 中，要注意极限过程是 $x\to 0$.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A)(0,1).　　(B)(1,2).

(C)(2,3).　　(D)(3,4).　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 函数在 $x=1,x=2,x=3$ 处是间断的，而在其它处是连续的．在题目中所给的区间端点都含有间断点，只须考察以间断点为端点处的极限是否存在即可，因为如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的附近是有界的．

对于(A)，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的且

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}=-\frac{\tan(-2)}{(-1)(2)^2}=-\frac{1}{4}\tan 2$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 左邻域内有界，从而 $f(x)$ 在(0,1)内有界，从而选(A).

【评注】 显然 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-1|(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}=\infty$

所以 $x=2,x=3$ 都是无穷间断点，因此 $f(x)$ 在(1,2)，(2,3)，(3,4)内都是无界的．

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}e^{f(\frac{1}{x})}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$ 则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的可去间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 的连续性与 a 的取值有关. [ ]

【答案】 (A)

【分析】 因 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{f(\frac{1}{x})}$

$$\overset{\text{令}\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}e^{f(t)}=e^{a}.$$

这表明 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 存在,但无论 a 取何值 $e^a>0$,所以有 $\lim\limits_{x\to0}g(x)\neq g(0)=0$,因此 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点,所以选(A).

【评注】 间断点一般分两类:设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 中至少有一个不存在,则称 x_0 为第二类间断点. 在第一类间断点中,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,称 x_0 为可去间断点,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,则称 x_0 为跳跃间断点. 而在第二类间断点中,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则称 x_0 为无穷间断点.

在 03 年、04 年经济类的考研题中都涉及到间断点的分类,读者应熟悉这部分内容.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\dfrac{e^{a|x|}-1}{x}, & x\neq 0,\\ b, & x=0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则必须

(A) $a=1,b=-1$. (B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=-1,b=-1$. (D) (A),(B),(C) 都不正确. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,必须 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,所以先要计算 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{e^{ax}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\ln e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}})}+\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}\ln e+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}\ln e+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}+a$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}+a=2+a$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+\frac{e^{-ax}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to 0^-}\frac{-ax}{x}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}-a$$

$$=-a$$

要使$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,必须$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,即 $2+a=-a$,所以 $a=-1$.

又 $f(0)=b$,因此 $b=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-a=1$. 选(B).

【评注】在计算 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 时用了到了当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$,因而,当 $x\to 0^-$ 时,$e^{\frac{1}{x}}\to 0$,从而 $\ln(1+e^{\frac{1}{x}})\sim e^{\frac{1}{x}}$,同理,当 $x\to 0^-$ 时,$\ln(1+e^{\frac{2}{x}})\sim e^{\frac{2}{x}}$.

11. 设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 同阶非等价无穷小,则当 $x\to 0$ 时,$\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ 是$\int_0^x\varphi(t)(e^t-1)dt$ 的

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小. (D) 同阶非等价无穷小. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 由题设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=a$,$a$ 不为 0 且不为 1.

因此 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\,dt}{\int_0^x\varphi(t)(e^t-1)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=a,$$

所以应选(D).

12. 把 $x\to 0$ 时的无穷小量 $\alpha=\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1,\beta=\sin^3x,\gamma=1-\cos 2x$ 排列起来,使排在后面的是前一个高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)β,γ,α. (B)γ,β,α.

(C)α,β,γ.　　　　(D)γ,α,β.　　　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 由于当 $x\to 0$ 时，$\beta=\sin^3 x\sim x^3$，$\gamma=1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{\gamma}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$，这表明当 $x\to 0$ 时，β 比 γ 高阶无穷小，因此排除了(A)和(C).

又当 $x\to 0$ 时 $\alpha=\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{3+x^3}{3}}-1\sim x\ln\frac{3+x^3}{3}$，

又　$\ln\frac{3+x^2}{3}=\ln(1+\frac{x^3}{3})$.

所以当 $x\to 0$ 时 $\left(\frac{3+x^3}{3}\right)^x-1\sim\frac{x^4}{3}$，

因而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4}{x^3}=0$.

从而选择(B).

【评注】 当 $x\to a$，判断无穷小量 α、β、γ 的阶的高低时，一般先分别求出 α、β、γ 关于 $x-a$ 的阶数，然后再判断较为方便.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}+a, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 2, & x=0,\\ \frac{\sin bx}{x}+e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\end{cases}$ 在 $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，则

(A)$a=2,b=1$.　　　　(B)$a=1,b=1$.

(C)$a=\frac{1}{2},b=2$.　　　　(D)$a=2-e^{-\frac{1}{2}},b=2$.　　　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 由题设，只须考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[(\cos x)^{x^{-2}}+a]=\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{x^{-2}}+a$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}+a$，

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$，

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}+a$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\sin bx}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{bx}{x}+0\right]=b$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，须 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，即 $e^{-\frac{1}{2}}+a=b=2$. 所以 $a=2-e^{-\frac{1}{2}}$，$b=2$，因此选(D).

14. 当 $x \to 0$ 时,$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小量.　　　　　　(B) 无穷大量.

(C) 有界量非无穷小量.　　(D) 无界但非无穷大量.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$,$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,但在这个极限过程中 $\sin\dfrac{1}{x}$ 重复取值 0,1,显然不选(A)(B)(C).

事实上,令 $x_n = \dfrac{1}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 0$

$$f(x_n) = \left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n) = \infty$,由此排除(A),(C)

又令 $y_n = \dfrac{1}{n\pi}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$,$f(y_n) = 0$. 由此排除(B),

因此当 $x \to 0$ 时,$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 无界非无穷大量.

【评注】 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = \infty$,则存在 $\delta > 0$,$f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内无界,但 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内无界,不一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = \infty$.

15. 曲线 $y = \dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$

(A) 没有渐近线.　　　　(B) 有一条渐近线.

(C) 有两条渐近线.　　　(D) 有三条渐近线.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}} = 0$,所以 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线.

$$\lim_{x\to 0^+}y = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}y = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}} = \infty.$$

所以 $x = 0$ 是曲线的垂直渐近线.

因此曲线有两条渐近线.

【评注】 注意由 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 有 $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，

由 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ 有 $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

16. 曲线 $f(x) = \dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内有

(A)2 条水平渐近线，2 条垂直渐近线.

(B)3 条水平渐近线，2 条垂直渐近线.

(C)2 条水平渐近线，3 条垂直渐近线.

(D)3 条水平渐近线，3 条垂直渐近线. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} + \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right] = 1+1 = 2$

所以 $y=2$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} - \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right] = 1-1 = 0$

所以 $y=0$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to2} f(x) = \infty$

所以 $x=0, x=1, x=2$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

综合上述，选(C).

【评注】注意：求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 时，应分别求

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x|x|}{(x-1)(x-2)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = -1.$$

17. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1, \\ 0, & x=\pm1, \end{cases}$ 则

(A) $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续，在点 $x=-1$ 间断.

(B) $f(x)$ 在点 $x=1$ 间断，在点 $x=-1$ 连续.

(C) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都连续.

(D) $f(x)$ 在点 $x=1, x=-1$ 都间断. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2\times\dfrac{\pi}{2} = \pi$，

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi,$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在,因而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$ 为有界量,$\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\arctan\frac{1}{x^2-1} = 0 = f(0),$$

所以,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续,因此,选(B).

18. 设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,设 x_0 为不等于零的任意实数,则

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

(C) $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(D) $f(x)$ 在 x_0 处的连续性不确定. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 由条件 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 可知

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$,因此有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(0)$,

在 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 中令 $x_2=0$,得

$f(x_1)=f(x_1)+f(0)$,所以 $f(0)=0$

于是,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = f(0) = 0$.

由 $f(x)$ 在 x_0 连续的定义得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

19. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,则 a,b 满足

(A) $a<0,b<0$. (B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$. (D) $a\geqslant 0,b<0$. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$,要使 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,必须 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a-e^{bx})=\infty$,此时,应有 $b>0$,由此可得不选(A)和(D).

又因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,必须有 $a-e^{bx}\neq 0$,因 $e^{bx}>0$,所以应使 $a-e^{bx}<0$,则应有 $a\leqslant 0$,于是选(C).

【评注】 当 $b>0,a\leqslant 0$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-be^{bx}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{b(1+x^2)e^{bx}} = 0.$$

20. 设 $f(x),g(x)$ 在 x_0 不连续,则

(A) $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 都不连续.

(B) $f(x)+g(x)$ 在 x_0 连续, $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 不连续.

(C) $f(x)+g(x)$ 在 x_0 不连续, $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 连续.

(D) $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 的连续性不确定. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 例 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0 & x\geqslant 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 都不连续,但

$f(x)+g(x)=1$, $f(x)\cdot g(x)=0$,此时, $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x_0=0$ 都连续.

又例 $f(x)\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 都不连续.

但 $f(x)+g(x)=\begin{cases}2 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$, $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$,在 $x_0=0$ 都不连续.

因此,选(D).

21、"$f(x)$ 在 x_0 点连续"是 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续的

(A) 充分条件,但不是必要条件. (B) 必要条件,但不是充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既不是充分,也不是必要条件. [ ]

【答案】 (A)

【分析】 由"若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|$"可得"如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$"因此, $f(x)$ 在 x_0 连续,则 $|f(x)|$ 在 x_0 连续,但 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续. 如 $f(x)=\begin{cases}-1 & x\geqslant 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 不连续,但 $|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处连续. 于是应选(A).

22. 设 $f(x)=\begin{cases}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}} & x>0\\ b & x\leqslant 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1} & x>1\\ e^{2ax}-e^{ax}+1 & x\leqslant 1\end{cases}$, 若 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则有

(A) $a=e^2$, $b=\ln 2$. (B) $a=\ln 2$, $b=e^2$.

(C) $a=\ln 2$, b 为任意实数. (D) $b=e^2$, a 为任意实数. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 $f(x)+g(x)=\begin{cases}b+e^{2ax}-e^{ax}+1 & x\leqslant 0\\ [1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}+e^{2ax}-e^{ax}+1 & 0<x\leqslant 1\\ [1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}+\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1} & x>1\end{cases}$

$f(x)+g(x)$ 在不是分段点处为初等函数,它是连续的,因此,只须讨论分段点 $x=0$, x

$=1$ 的情形.

当 $x=0$ 时,$f(0)+g(0)=\lim\limits_{x\to0^-}[f(x)+g(x)]=b+1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to0^+}\{[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}+e^{2ax}-e^{ax}+1\}$

$=e^2+1$ ①

要使 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须 $b+1=e^2+1$,所以 $b=e^2$

当 $x=1$ 时,$f(1)+g(1)=\lim\limits_{x\to1^-}[f(x)+g(x)]$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\{[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}+e^{2a}-e^{ax}+1\}$

$=(1+\ln2)^2+e^{2a}-e^a+1$,

$\lim\limits_{x\to1^+}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to1^+}\left\{[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}+\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}\right\}$

$=(1+\ln2)^2+3$.

要使 $f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 处连续,必须 $(1+\ln2)^2+e^{2a}-e^a+1=(1+\ln2)^2+3$,

即 $e^{2a}-e^a-2=0$,解此方程得 $e^a=2$,$a=\ln2$,所以,当 $a=\ln2$,$b=e^2$ 时,$f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 因此选(B).

【评注】 在 ① 式中,$\lim\limits_{x\to0^+}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{2}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2\cdot\frac{x}{x}}=e^2$.

23. 设 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ a & x=0\\ \dfrac{e^{-\cos x}-e^{-1}}{bx^2} & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,\dfrac{\pi}{4}]$ 上连续,则

(A) $a=1$ $\quad b=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$. (B) $a=0$ $\quad b=1$.

(C) $a=e^{\frac{1}{3}}$ $\quad b=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}}$. (D) $a=e^{-\frac{1}{3}}$ $\quad b=2e^{\frac{1}{3}}$. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 属"1^∞"型,可利用重要极限求出:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\dfrac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}}$,

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

因此 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}$.

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\cos x}-e^{-1}}{bx^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1}(e^{1-\cos x}-1)}{bx^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1}(1-\cos x)}{bx^2}=\frac{e^{-1}}{b}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$$=\frac{e^{-1}}{2b}.$$

显然，$f(x)$ 在$(-\infty,\frac{\pi}{4}]$除 $x=0$ 处都是连续的，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

即 $e^{\frac{1}{3}}=\frac{e^{-1}}{2b}=a$，也就是 $a=e^{\frac{1}{3}}$，$b=\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}}$，因此选(C).

24. 函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在$(0,2\pi)$内的间断点的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 只须考虑$\frac{1}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}$在$(0,2\pi)$内没有定义的点，即 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$，因此应选(D).

【评注】 可根据 $f(x)$ 在这些间断点的极限进一步判断其类型.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}\pi^+}f(x)=+\infty$，所以 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}f(x)=1$，所以 $x=\frac{3}{4}\pi$，$x=\frac{7}{4}\pi$ 是可去间断点.

25. 设 p 是自然数，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right]=$

(A) 不存在.　　(B) 0.

(C) p.　　(D) $\frac{1}{p}$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 令 $f(x)=x^{\frac{1}{p}}$，$(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}$，$f'(1)=\frac{1}{p}$.

由导数的定义 $f'(1)=\lim\limits_{\triangle x\to0}\frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to0}\frac{(1+\triangle x)^{\frac{1}{p}}-1}{\triangle x}=\frac{1}{p}$

取 $\triangle x=\frac{1}{n}$，$f'(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right]=\frac{1}{p}$.

所以选(D).

【评注】当 $x\to 0$ 时 $(1+x)^a-1\sim ax$,所以 $\Delta x\to 0$ 时 $(1+\Delta x)^{\frac{1}{p}}-1\sim\frac{1}{p}\Delta x$,从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^{\frac{1}{p}}-1}{\Delta x}=\frac{1}{p}.$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=1$,则

(A) $f'_-(0)=1$.　　(B) $f'_-(0)=2$.

(C) $f'_+(0)=1$.　　(D) $f'_+(0)=2$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 由于 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=1$,所以 $\lim\limits_{h\to 0}f(1-\cos h)=0$,令 $1-\cos h=x$. $h\to 0$ 时 $x\to 0^+$;因此有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,因此

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,从而有 $f(0)=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}=\frac{1}{2}.$$

所以
$$1=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}.$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\xlongequal{令 1-\cos h=x}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'_+(0).$$

因此有 $f'_+(0)=2$.

由题设条件推不出 $f'_-(0)$ 是否存在.

27. 设 α 是实数,$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^\alpha}\cos\frac{1}{x-1} & x>1\\ 0 & x\leqslant 1\end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,则 α 的取值为

(A) $\alpha<-1$.　　(B) $-1\leqslant\alpha<0$.

(C) $0\leqslant\alpha<1$.　　(D) $\alpha\geqslant 1$.　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 由导数定义

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^{\alpha+1}}\cos\frac{1}{x-1}\xlongequal{\alpha+1<0}0,$$

显然， $f'_{-}(1) = 0$

因此 $\alpha + 1 < 0$,即 $\alpha < -1$ 时,$f'(1) = 0$.

【评注】 $\lim\limits_{x\to 1^+}\cos\dfrac{1}{x-1}$ 不存在,但是有界量,要使 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha+1}}\cos\dfrac{1}{x-1}$ 存在,必须 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha+1}} = 0$,此处利用了无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

28. 设方程 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$,($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数),且 $a_n < 0$,则

(A) 方程没有实根. (B) 不能确定方程是否有实根.

(C) 方程至少有一个正实根. (D) 方程至少有一个负实根. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,则 $f(0) = a_n < 0$;

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,可得存在 $x_0 > 0$,使 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x)$ 是连续函数,由连续函数的零点存在定理,至少存在 $c \in (0, x_0)$,使 $f(c) = 0$,因此选(C).

【评注】 如果题设中加条件"n 为偶数",则可证明 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 至少有一个正实根和一个负实根,这是因为

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n] = +\infty$,则存在 $x_1 < 0, x_2 > 0$,使 $f(x_1) > 0$ 和 $f(x_2) > 0$,在 $[x_1, 0]$ 和 $[0, x_2]$ 上分别用零点存在定理,存在 $\xi_1 \in (x_1, 0)$ 和 $\xi_2 \in (0, x_2)$ 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

29. 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,有 $f(x+1) = f^2(x)$,且 $f(0) = f'(0) = 1$,则 $f'(1) =$

(A)0. (B)1.

(C)2. (D) 以上都不正确. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 在 $f(x+1) = f^2(x)$ 中令 $x = 0$,得 $f(1) = f^2(0) = 1$. 注意到 $f'(0)$ 存在,所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续,因此有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(1+\triangle x) - f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f^2(\triangle x) - 1}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x) - 1}{\triangle x}\cdot[f(\triangle x) + 1] \\
&= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x}\cdot[f(\triangle x) + 1] \\
&= 2f'(0) = 2,\text{所以选(C)}.
\end{aligned}
$$

30. 设 $f(x_0)$ 在 x_0 处可导,则下列结论中正确的是

(A) 存在 x_0 的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,对该邻域内任一异于 x_0 的点 a,$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在,但有 a 处 $f(x)$ 不连续.

(B) 存在 x_0 的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,$f(x)$ 在该邻域内连续,但不可导.

(C) 存在 x_0 的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,$f(x)$ 在该邻域内可导.

(D) 以上结论均不正确. [　　]

【答案】 (D)

【分析】 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导,必存在 x_0 的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 使 $f(x)$ 在该邻域内有定义,因由导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

只有当 $f(x)$ 在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中有定义时,上式右端取极限才有意义.

但 $f(x)$ 在 x_0 处可导并不能推出存在 x_0 的某个邻域,对该邻域内任一异于 x_0 的点 a. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在,因此不能推出 $f(x)$ 在 a 处连续,更不能推出 $f(x)$ 在 a 处可导.

例:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

但是除了点 $x=0$ 之外,任意有理点 a 处,取 t_n 为有理点列且 $t_n\to a$,则当 $t_n\to a$ 时,$f(t_n)\to f(a)=a^2>0$,而取 s_n 为无理点列,当 $s_n\to a$ 时,$f(s_n)\to 0$,因而$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在.

【评注】 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,却不能推得在 x_0 的某邻域内 $f(x)$ 连续.

31. 设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$,其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 点连续,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=$

(A)$\left[2xg(x)+(x^2-a^2)g'(x)\right]\Big|_{x=a}$.　　(B)$2ag(a)$.

(C)$g(a)+a$.　　(D) 不存在. [　　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的导数,因题设中没有 $g(x)$ 可导的条件,因此不能选(A),只能直接用定义计算.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)-0}{x-a}$$

$=\lim\limits_{x\to a}(x+a)g(x)=2ag(a)$,所以选(B).

【评注】 如果 $\varphi(x)$,$g(x)$ 均在 x_0 处可导,则 $\varphi(x)g(x)=f(x)$ 在 x_0 处的导数可用乘法法则计算即 $f'(x_0)=[\varphi(x)g(x)]'\big|_{x=x_0}=\varphi'(x_0)g(x_0)+\varphi(x_0)g'(x_0)$.

32. 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f(0) & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq 0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点.　　(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.　　(D) 连续点或间断点不能由此确定.　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$,

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限存在都为 $f'(0)\neq 0$,又因 $F(0)=f(0)=0$,所以 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类(可去)间断点.

【评注】 事实上,因 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\neq F(0)$ 所以 $x=0$ 为第一类间断点. 当 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$ 容易求出就不必分开求 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)$.

33. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义,若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

(A) 连续但不可导点.　　(B) 间断点.

(C) 可导点,且 $f'(0)=0$.　　(D) 可导点,但 $f'(0)\neq 0$.　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 在 $|f(x)|\leqslant x^2$ 中令 $x=0$,得 $f(0)=0$,

又 $0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|$,

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=0$,

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

34. 设 $g(x)$ 可微,$h(x)=e^{\sin 2x+g(x)}$,$h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$,$g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$,则 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$

(A) $-\ln 2-1$.　　(B) $\ln 2-1$.

(C) $-\ln 2-2$.　　(D) $\ln 2-2$.　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 $h'(x)=e^{\sin 2x+g(x)}\cdot(\sin 2x+g(x))'$

$$= e^{\sin 2x+g(x)} \cdot (2\sin 2x + g'(x))$$

把 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入上式得

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}+g(\frac{\pi}{4})}(2\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} + g'(\frac{\pi}{4}))$$

即

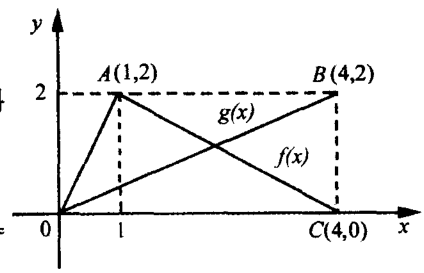
$$1 = e^{1+g(\frac{\pi}{4})} \cdot 2.$$

$$1 + g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,\text{所以 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln 2 - 1,\text{选(A)}.$$

35. 如图所示,$g(x)$ 的图形是直线段 OB,$f(x)$ 的图形是折线段 OAC,$u(x) = f[g(x)]$,则 $u'(4) =$

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $-\frac{1}{3}$.　　(D) $-\frac{2}{3}$.　　[　　]

【答案】 (C)



【分析】 由图形中 B 点的坐标可得 $g(4) = 2$.

当 $x \in [1,4]$ 时,$f(x)$ 的图形是直线 AC,AC 的斜率 $k_{AC} = \frac{0-2}{4-1} = -\frac{2}{3}$

因 $g(x)$ 的图形是 OB,OB 的斜率 $k_{OB} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$.

$$u'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

$$u'(4) = f'(g(4))g'(4) = f'(2)g'(4) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.\text{选(C)}.$$

【评注】 可先把 $u(x) = f[g(x)]$ 的表达式求出来,然后再求导数,由图可知

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, & x \in (1,4] \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{2}x,\text{因此},$$

$$u(x) = f[g(x)] = \begin{cases} 2g(x), & g(x) \in [0,1] \\ -\frac{2}{3}g(x) + \frac{8}{3}, & g(x) \in (1,4] \end{cases} = \begin{cases} x, & x \in [0,2] \\ -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} & x \in (2,4] \end{cases}$$

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,2) \\ -\frac{1}{3} & x \in (2,4] \end{cases},\quad u'(4) = -\frac{1}{3}.$$

显然,本题通过导数的几何意义即分别求 OB 和 AC 的斜率来计算简单.

36. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上可导,考虑下列叙述:

(1) 若 $f(x) > g(x)$,则 $f'(x) > g'(x)$

(2) 若 $f'(x) > g'(x)$ 则 $f(x) > g(x)$

则

(A)(1)、(2) 都正确. (B)(1)、(2) 都不正确.

(C)(1) 正确,但(2) 不正确. (D)(2) 正确,但(1) 不正确. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 考虑例 1:$f(x)=e^{-x},g(x)=-e^{-x}$,显然 $f(x)>g(x)$,但 $f'(x)=-e^{-x}$,$g'(x)=e^{-x}$,此时 $f'(x)<g'(x)$,所以(1) 不正确.

考虑例 2:$f(x)=-e^{-x},g(x)=e^{-x},f'(x)=e^{-x},g'(x)=-e^{-x},f'(x)>g'(x)$,但 $f(x)<g(x)$. 所以(2) 不正确.

【评注】 函数 $f(x)$ 的导数是描述函数的变化率,在(a,b) 上 $f'(x)>0$ 可推得 $f(x)$ 在(a,b) 上单调递增,不能保证 $f(x)>0$,同样在(a,b) 上 $f(x)>0$,如果它是可导单调减函数,则在(a,b) 上 $f'(x)<0$.

37. $f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分非必要条件. (B) 必要非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 当 $f(0)=0$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{\text{令 } x=t^2}\lim_{t\to0}\frac{f(t^2)}{t^2},$$

这表明,如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}=f'(0).$$

举例说明$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不一定可导,例如 $f(x)=\begin{cases}0 & x\geqslant0\\1 & x<0\end{cases}$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续因而它在 $x=0$ 处不可导. 但对任意 $x,x^2\geqslant0$,所以 $f(x^2)=0$,因此$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}0=0$

事实上,当 $f(0)=0$ 时,如果$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在,只能推得 $f'_+(0)$ 存在:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}\xlongequal{x^2=t}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'_+(0).$$

38. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数不为零且不为1,则当 $\Delta x\to0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价无穷小. (B) 与 Δx 同阶无穷小.

(C) 与 Δx 低阶无穷小. (D) 与 Δx 高阶无穷小. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 因 $dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy\Big|_{x=x_0}}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0,$$

所以当 $\Delta x \to 0$ 时，$dy\Big|_{x=x_0}$ 与 Δx 是同阶无穷小

【评注】 $dy = f'(x)\Delta x$ 或 $dy = f'(x)dx$，容易犯的错误是：$dy = f'(x)$.

39. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x) < 0, f''(x) > 0, \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则当 $\Delta x > 0$ 时有

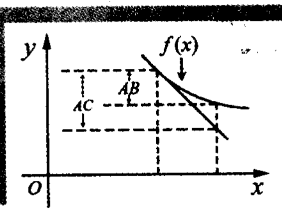
(A) $\Delta y > dy > 0$.　　(B) $\Delta y < dy < 0$.

(C) $dy > \Delta y > 0$.　　(D) $dy < \Delta y < 0$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 由 $f''(x) > 0$ 有 $f'(x)$ 是单调递增的，$dy = f'(x)\Delta x$，$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x$，其中 $\xi \in (x, x+\Delta x)$，所以 $f'(\xi) > f'(x)$，又因 $f'(x) < 0, \Delta x > 0$，于是 $dy < \Delta y < 0$.

【评注】本题也可用几何意义来分析，由 $f'(x) < 0$ 和 $f''(x) > 0$ 可得曲线 $f(x)$ 是沿 x 轴正向下降但是凹的. 如图所示，$\Delta y = -AB$，$dy = -AC$. 显然 $dy < \Delta y < 0$.



40. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在二阶导数，且 $f(x) = -f(-x)$，当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$，则当 $x > 0$ 时，有：

(A) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.　　(B) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.　　(D) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 由 $f(x) = -f(-x)$ 可知 $f(x)$ 为奇函数，因奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，即 $f'(x)$ 为偶函数，$f''(x)$ 为奇函数，因此当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$，则当 $x > 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

【评注】 要明确以下几条 $f(x)$ 的性质：

(1) 可导奇函数的导函数是偶函数.

(2) 可导偶函数的导函数是奇函数.

(3) 以 T 为周期的可导函数的导函数仍然以 T 为周期.

41. $f(x)$ 在 x_0 处存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点

(A) 可导.　　(B) 连续.

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

(C) 不可导.　　　　　　　　(D) 不连续.　　　　　　　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 $f'(x)$ 在 x_0 处的左、右导数存在并相等时，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导，如左右导数存在并不相等，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，题设中只有 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数存在，并没指明它们是否相等，因此，既不能选(A)也不能选(C).

由左右导数的定义及题设

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

和 $$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

都存在，因此有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$,

和 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$,

所以 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$,

由函数在 x_0 点连续的定义得 $f(x)$ 在 x_0 连续，因此选(B).

42. 设 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = a$，则

(A) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必可导且 $f'(x_0) = a$.

(B) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续，但未必可导.

(C) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必有极限但未必连续.

(D) 以上结论都不对.　　　　　　　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 首先将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的左右导数 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 与 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的左右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 区分开来.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = a$，只能得出 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = a$，但不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处可导，以及在 $x = x_0$ 处连续和极限存在.

例如 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ x & x \leqslant 0 \end{cases}$，　显然，$x \neq 0$ 时，$f'(x) = 1$，因此

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1,$$

但 $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0,$$

因而 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在，因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续，不可导. 因此选(D).

【评注】 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ 存在，不一定有 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

43. 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}=$

(A)A.　　(B)$\sin b$.　　(C)$A\sin b$.　　(D)$A\cos b$.　　[　　]

【答案】 (D)

【分析】 定义 $f(a)=b$,由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$ 及$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ 可得 $f'(a)=A$.

则复合函数 $y=\sin u,u=f(x)$ 在 $x=a$ 点的导数为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}=(\sin u)'_u\Big|_{u=f(a)}\cdot f'(a)$$

$$=\cos f(a)\cdot f'(a)=A\cos b.$$

因此选(D).

【评注】 本题不能用洛必达法则

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos f(x)\cdot f'(x)}{1}$$

$$=A\cos f(a)=A\cos b,$$

因在题设的条件中没有 $f'(x)(x\neq a)$ 的存在性.

44. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$

(A)$\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{|x|}{1+x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$.

(B)$\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{x}{1+x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$.

(C)$\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{x}{1+x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$.

(D)$\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{|x|}{1+x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=\arctan\dfrac{1}{|x|}+x\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|x|^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{|x|}\right)'$

$$=\arctan\frac{1}{|x|}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{|x|^2}}\cdot\left(-\frac{1}{|x|^2}\right)(|x|)'$$

$$=\arctan\frac{1}{|x|}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{|x|^2}}\cdot\left(-\frac{1}{|x|^2}\right)\frac{x}{|x|}$$

$$=\arctan\frac{1}{|x|}-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{|x|}$$

$$=\arctan\frac{1}{|x|}-\frac{|x|}{1+x^2},$$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\frac{1}{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$.

45. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $f(a)=0$，则函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\sin(x-a)} & x\neq a\\ f'(a) & x=a\end{cases}$ 在 $x=a$ 处

(A) 不连续.

(B) 连续，但 $g'(a)$ 不存在.

(C) $g'(a)$ 存在，但 $g'(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

(D) $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)/\sin(x-a)-f'(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\sin(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-\cos(x-a)f'(a)}{2(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)+\sin(x-a)f'(a)}{2}=\frac{f''(a)}{2},$$

因此 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导，不选(A)，(B).

$x\neq a$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)\sin(x-a)-f(x)\cos(x-a)}{\sin^2(x-a)}$

而 $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)\sin(x-a)-f(x)\cos(x-a)}{\sin^2(x-a)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)\sin(x-a)-f(x)\cos(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f''(x)\sin(x-a)+f'(x)\cos(x-a)-f'(x)\cos(x-a)+f(x)\sin(x-a)}{2(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f''(x)\sin(x-a)+f(x)\sin(x-a)}{2(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f''(x)+f(x)}{2}$$

$$= \frac{f''(a)}{2} = g'(a).$$

46. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是：

(A) $f(a)=0$，且 $f'(a)=0$.　　(B) $f(a)=0$，且 $f'(a)\neq 0$.

(C) $f(a)>0$，且 $f'(a)>0$.　　(D) $f(a)<0$，且 $f'(a)<0$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 若 $f(a)\neq 0$，由复合函数求导法则有 $[\,|f(x)|\,]'\Big|_{x=a}=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x)\Big|_{x=a}=\dfrac{f(a)}{|f(a)|}f'(a)$，因此不选(C) 和(D).（当 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导).

当 $f(a)=0$ 时

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$

$$\lim_{x\to a^-}=\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

上两式分别是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点的右、左导数，因此，当 $f(a)=0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充要条件是上两式不相等，即 $f'(a)\neq 0$ 时，于是选(B).

【评注】 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$　$(|x|)'=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}=\dfrac{x}{|x|}$，所以，当 $f(x)\neq 0$ 且 $f(x)$ 可导，由复合函数的导数法则，有 $(|f(x)|)'=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x)$.

47. 设 $f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$，则 $f'(x)$ 不存在的点个数是

(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 设 $\varphi(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，$f(x)=|\varphi(x)|$ 根据上题结论，使 $\varphi(x)=0$ 的点 $x=1,x=2,x=3$ 可能是 $f(x)$ 的不可导点，还需考虑 $\varphi'(x)$ 在这些点的值，$\varphi'(x)=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$，显然，$\varphi'(1)\neq 0$，$\varphi'(2)=0$，$\varphi'(3)=0$，所以只有一个不可导点 $x=1$.

48. 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导，$g'(a)$ 存在，则 $g(a)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=a$ 处可导的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 非充分非必要条件.　　[　　]

【答案】 (A)

【分析】 因 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 不可导，所以不能对 $F(x)$ 用乘积的求导法则，用定义求 $F'(a)$.

当 $g(a)=0$ 时

$$\begin{aligned}F'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\varphi(x)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\varphi(x)\\&=g'(a)\varphi(a)\end{aligned}$$

这表明，$g(a)=0$ 时，$F'(a)$ 存在.

下面证明若 $F'(a)$ 存在则 $g(a)=0$

反证法，若 $g(a)\neq 0$，$\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}$，由商的求导法则，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，这与题设矛盾，所以选(A).

【评注】 若 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导，则当 $g(a)\neq 0$ 时 $g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，当 $g(a)=0$ 时，$g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $(g(x)\varphi(x)')\big|_{x=a}=g'(a)\varphi(a)$.

49. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数是

(A)3.　　(B)2.

(C)1.　　(D)0.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 设 $g(x)=x^2-x-2$，$\varphi(x)=x^3-x$，由 48 题结论，只须考察在 $|\varphi(x)|$ 连续不可导点处，$g(x)$ 是否为零.

在 $x=0$，$x=-1$，$x=1$ 处 $\varphi(x)=0$ 且 $\varphi'(x)\neq 0$，因此 $|\varphi(x)|$ 在 $x=0$，$x=-1$，$x=0$ 不可导.

又 $g(0)=-2\neq 0$　$g(-1)=0$，$g(1)=-2\neq 0$　所以，$x=0$，$x=1$ 为 $f(x)$ 的不可导点，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的可导点，因此选(B).

【评注】 也可以按照导数的定义考察 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=-1$，$x=1$ 处的可导性.

50. 设 $f(x)-f(a)=2(x-a)^2+(x-a)^2|x-a|$,则 $f''(a)=$

(A)0.　　(B)2.　　(C)4.　　(D) 以上均不正确.　　[　　]

【答案】 (C)

【分析】 为了求 $f''(a)$,须先求 $f'(x)$.

当 $x\neq a$ 时,$f'(x)=4(x-a)+2(x-a)|x-a|+(x-a)^2\cdot\dfrac{x-a}{|x-a|}$,

$$=4(x-a)+2(x-a)|x-a|+\frac{(x-a)^3}{|x-a|},$$

当 $x=a$ 时,$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}[2(x-a)+(x-a)|x-a|]=0,$$

所以,$f''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{4(x-a)+2(x-a)|x-a|+\dfrac{(x-a)^3}{|x-a|}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[4+2|x-a|+\frac{(x-a)^2}{|x-a|}\right]=4$$

所以选(C).

【评注】 $x\neq a$ 时,$[|x-a|]'=\dfrac{x-a}{|x-a|}$,$|x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导.

51. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有定义,在开区间(a,b)内可导,则

(A) 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,存在 $\zeta\in(a,b)$,使 $f(\zeta)=0$.

(B) 对任何 $\zeta\in(a,b)$,有$\lim\limits_{x\to\zeta}[f(x)-f(\zeta)]=0$.

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时,存在 $\zeta\in(a,b)$,使 $f'(\zeta)=0$.

(D) 存在 $\zeta\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a)$.　　[　　]

【答案】 (B)

【分析】 因 $f(x)$ 在(a,b)内可导,所以 $f(x)$ 在(a,b)内连续,所以,对任何 $\zeta\in(a,b)$,$\lim\limits_{x\to\zeta}[f(x)-f(\zeta)]=\lim\limits_{x\to\zeta}f(x)-\lim\limits_{x\to\zeta}f(\zeta)=f(\zeta)-f(\zeta)=0$,因此选(B).

也可以举出反例说明(A)、(C)、(D) 不一定成立,由排除法可得选(B).

例如:$f(x)=\begin{cases}-2 & x=1\\ x & x\in(1,2]\end{cases}$ $f(x)$ 在$[1,2]$上有定义,$f(1)=-2$,$f(2)=2$,当 $x\in(1,2)$,$f(x)>0$,且 $f'(x)=1$.这表明:$f(1)\cdot f(2)=-4<0$,在$(1,2)$内可导,但$(1,2)$内不存在使 $f(x)=0$ 的点,$f(2)-f(1)=4$,在$(1,2)$内也不存在使 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)$ 的点,因此不选(A)、(D).

又例如 $f(x)=\begin{cases}-2 & x=1\\ x & x\in(1,2)\\ -2 & x=2\end{cases}$ $f(1)=f(2)$，当 $x\in(1,2)$，$f'(x)=1$，这表明虽然 $f(1)=f(2)$ 在$(1,2)$内可导，但在$(1,2)$内，没有使 $f'(x)=0$ 的点. 因此不选(C).

【评注】 若把题目中的条件"$f(x)$ 在$[a,b]$上有定义"改为"$f(x)$ 在$[a,b]$上连续"，则(A)就是零点存在定理，(B)就是罗尔定理，(C)就是拉格朗日中值定理，则(A)(B)(C)(D)选项都是正确的.

52. 已知在$(-\infty,+\infty)$上 $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}+1$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$，则

(A) $a=1,b=0$. (B) $a=0,b=1$.

(C) $a=1,b=1$. (D) $a=1,b=-2$. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 由拉格朗日中值定理 $f(x+1)-f(x)=f'(\zeta)=\dfrac{1}{1+e^{\zeta^2}}+1$ $\zeta\in(x,x+1)$

当 $x\to\infty$ 时有 $\zeta\to\infty$

因此，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{\zeta^2}}+1\right)=1$

要使 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=1$

必须 $\begin{cases}1-a=0\\ -(a+b)=1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$ 因此选(D).

【评注】 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在，因此，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]$ 不一定为零.

53. 设函数 $y=f(x)$ 在$(0,+\infty)$内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. [ ]

【答案】 (B)

【分析】 举出反例说明(A)(C)(D)不一定成立，由排除法可得应选(B).

例如：$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$， $f'(x)=-\dfrac{\sin x^2}{x^2}+2\cos x^2$，取 $x_k=\sqrt{2k\pi}$，$f'(x_k)=2$，当 $k\to+\infty$，$f'(x)\to2$，因此不选(A).

例如:$f(x)=\sin x$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$,因此不选(C) 和(D).

综合上述,应选(B).

【评注】 可以利用反证法,证明(B) 是正确的.假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\neq 0$,由拉格朗日中值定理,$f(2x)-f(x)=f'(\zeta)x,\zeta\in(x,2x)$,当 $x\to+\infty$ 时 $\zeta\to+\infty$,因此,$\lim\limits_{x\to+\infty}[(f(2x)-f(x)]=\lim\limits_{\zeta\to+\infty}f'(\zeta)x=\infty$,这说明函数 $f(2x)-f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.又由题设,存在 $M>0$ 使当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $|f(x)|\leqslant M$,于是 $|f(2x)-f(x)|\leqslant|f(2x)|+|f(x)|\leqslant 2M$,这与 $f(2x)-f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界矛盾,因此,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

54. 设 $f(x)$ 处处可导,则下面命题正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. [ ]

【答案】 (D)

【分析】 举反例说明(A)、(B)、(C) 都不成立,由排除法,说明(D) 成立.

例 1 $f(x)=-\ln|x|$,$f'(x)=-\dfrac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$,因此(A) 不成立.

例 2 $f(x)=-x^3$,$f'(x)=-3x^2$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,但 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,因此,(B) 不成立.

例 3 $f(x)=\ln x$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,因此(C) 不成立.

由例 1、例 2、例 3 可知选择(D).

另外,本题可以利用拉格朗日中值定理证明(D) 是正确的.

用拉格朗日中值定理证明(D) 成立:

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则存在 x_0,当 $x>x_0$ 时恒有 $f'(x)>1$,因此当 $x>x_0$ 时

$f(x)-f(x_0)=f'(\zeta)(x-x_0)\quad \zeta\in(x_0,x)$,

因此 $f(x)=f(x_0)+f'(\zeta)(x-x_0)>f(x_0)+(x-x_0)$,

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x_0)+(x-x_0)]=+\infty$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

55. 设 $f(x)=\varphi(x)\sin x$,且 $\varphi'(x)+\varphi(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的符号为