基础部分
第二课　微积分
第 3 章　多元函数微分法

(一) 多元函数的偏导数及其微分
(二) 多元函数的复合函数微分法
(三) 多元函数的微分法

12.1 多元函数的偏导数及其微分
12.1.1 偏导数定义与计算

先讨论二元函数 $f: D \subset R^2 \to R$， $z = f(x, y)$.

(一) 多元函数偏导数定义：

(1) 偏导数定义： $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$，或记成 $f_x'(x_0, y_0)$。

同样可定义： $f_y'(x_0, y_0)$.

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$， $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$存在，称之为关于(对) x 偏导函数,简称关于(对) x 偏导数；

$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$存在，称之为关于(对) y 偏导函数,简称关于(对) y 偏导数.

计算举例： $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$， $\dfrac{\partial y}{\partial x} = z$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -\dfrac{y}{z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{x} \cdot z \cdot \left(\frac{-y}{z^2} \right) = -1 .$$

高阶偏导数

(A) **定义**： $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \right)$，称为对 x 的二阶偏导数;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$，称为(对 x 和 y 的)二阶混合偏导数;

类似可定义其他高阶混合偏导数.

(B) **混合偏导数中求导次序的影响**：

定理：若二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 连续，则与求导次序无关，即： $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

一般多元函数偏导数和高阶混合偏导数的定义是类似的。

12.1.2 多元函数的微分

(一) 多元函数全微分的定义

- 多元函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的增量 $\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$
- 多元函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的(全)微分：若 f 在 $U_\delta(P_0)\subset D$ 有定义，且存在不依赖

  $\Delta x,\Delta y$ 的 A,B，使 $\Delta f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.

则称 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点**可微**，并称**线性函数** $A\Delta x+B\Delta y$ 为在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**全微分**，记成

$df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$．其中，$\rho=d_2(P,P_0)$.

（二）微分的性质：

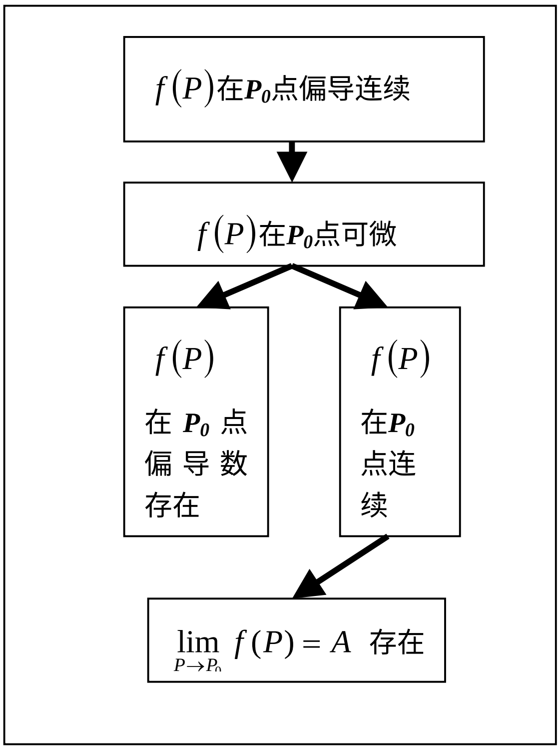
偏导数存在是可微的必要条件： f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，

$$\Rightarrow df(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\ .$$

偏导数连续是可微的充分条件：即

若 f_x',f_y' 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点连续 $\Rightarrow$ f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微

（三）多元函数极限、连续、可导、可微概念的联系与差别：



12.1.3 例题

例 1 下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微,且 $df=0$ 的是（ D ）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f_x'=0,f_y'=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f = \dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f = (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

例 2 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）

(A) 连续且偏导数存在 (B) 不连续但偏导数存在
(C) 连续但偏导数不存在 (D) 不连续且偏导数不存在

例 3 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 点（ B ）

(A) 连续,但偏导数不存在； (B) 偏导数存在,但不可微；
(C) 可微； (D) 偏导数存在且连续.

例 4 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ 存在，对于函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是（ ）

(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充分必要条件 (D) 无关条件

例 5 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分,则 $a=$（ D ）

$A.\ -1$ $B.\ 0$ $C.\ 1$ $D.\ 2$

例 6 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在，则（ B ）

（A） $f(x,y)$ 在 P_0 点连续；

（B）一元函数 $z=f(x,y_0)$ 和 $z=f(x_0,y)$ 分别在 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 连续；

（C） $f(x,y)$ 在 P_0 点的微分为 $dz=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}dx+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}dy$ ；

（D） $f(x,y)$ 在 P_0 点的梯度为 $grad\ f(P_0)=\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{P_0}$.

例 7 如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（ C ）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\bar{v}$ 的方向导数不存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数都存在且连续；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

例 8 设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点（0,0）处连续，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，并写出全微分 $df(x,y)$。

例 9 已知 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，试讨论：

（1）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性；
（2）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数是否存在；
（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

例 10． 设 $f(x,y)$ 是可微函数，且满足以下条件 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$，试证对任意的 $\vec{v}=\{v_1,v_2\}$，都存在点 (x_0,y_0)，使得 $gradf(x_0,y_0)=\vec{v}$。

12.2 复合函数微分法

12.2.1 复合函数导数公式

（1）复合函数求导公式的重要性

任何具体的初等多元函数的偏导数均可由一元函数求导公式解决，

例如， 对函数 $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 是简单的，

但是，若要研究像 $z=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$ 这样带一般性结构函数的导数就不是一元复合函数求导公式所能胜任的了。而必须讨论多元函数复合函数微分法则．

（2）复合函数微分法

首先考虑一种最简单的情形，即只有两个自变量，两个中间变量的情形：$z=f(u,v)$，

$$\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y),\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

例 1 已知 $y=(\dfrac{1}{x})^{-\frac{1}{x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．（$=(\dfrac{1}{x})^{2-\frac{1}{x}}(1-\ln x)$.）

例 2 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．（$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f''_{11}+2f''_{12}+\dfrac{1}{y^2}f''_{22}$）

注意：（1） $f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial u},\ f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial v}$ 都是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的函数；

（2）记号 $f_1'=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u},\ f_2'=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ 的规定与使用。

例 3 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$，试确定 α,β 使原方程变为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$．

解：将 x,y 看成自变量，u,v 看成中间变量，利用链式法则得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

由此可得， $0=A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$$\left(A+2B\alpha+C\alpha^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+$$

$$+\left(A+2B\beta+C\beta^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

只要选取 α,β 使得 $\begin{cases}A+2B\alpha+C\alpha^2=0\\A+2B\beta+C\beta^2=0\end{cases}$，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

12.2．2 微分的运算与(一阶)微分形式不变性

- 微分的运算 设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$,则

$$d(u\pm v)==\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)=du\pm dv;$$

$$d(u\cdot v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)v\pm u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)=vdu+udv$$

$$d\left(\frac{u\cdot}{v}\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\left(\frac{u}{v}\right)}{\partial y}\Delta y\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

- 微分形式不变性 设 $z=f(u,v)$,又 $u=u(x,y), v=v(x,y)$,则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

注意：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\neq\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\neq\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v$$

12.2.3 隐函数与隐函数的导数

（一）隐函数存在的问题

（二）隐函数求导

- 若函数 $y=y(x)$，由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求导函数？

按隐函数定义有恒等式：

$$F(x,y(x))\equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x,y(x))=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$$

可见：函数 $y=y(x)$ 可导有一个必要条件是，$F'_y(x,y)\neq 0$.

例 4 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f(x^2+y^2), a,b$ 是常数，求导函数。

例 5 设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dx}{dz}$，$\dfrac{dy}{dz}$.

（$\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{3z}{x},\dfrac{dy}{dz}=-\dfrac{2z}{y}$.）

例 6 $z=z(x,y)$ 由参数方程: $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=uv \end{cases}$,给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（$\dfrac{\partial z}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\cos v-\sin v$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}=v\sin v+\cos v$）

12.2.4 例题

例 7 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数 $f'_x(0,0)=3$，$f'_y(0,0)=1$，则下列命题成立的是（ C ）

(A) $df(0,0)=3dx+dy$ ；

(B) 若 $\vec{l}=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$，则 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial l}=3\cos\theta+\sin\theta$ ；

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切向量为 $\vec{i}+3\vec{k}$ ；

(D) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 必存在.

例 8 $z=f(x+y,x-y,xy)$，且函数 f 的一阶偏导数连续，利用一阶全微分的形式不变性，求 $dz,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。 （$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+y\,f_3'$； $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$ ）

例9 知 $z=f(x,y)$，$u=\dfrac{y^2}{x},v=xy$，且函数 f 的一阶偏导数连续，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$。

（$\dfrac{\partial z}{\partial u}=f_1'\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+f_2'\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=-f_1'\dfrac{x^2}{3y^2}+f_2'\dfrac{x}{3y}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=f_1'\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+f_2'\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}=f_1'\dfrac{2}{3y}+f_2'\dfrac{1}{3x}$。）

例10 知 $w=f(x,u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ ，求$\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}$，其中 f 可微，φ,ψ 可微且 $\varphi'_x\psi'_y\neq\varphi'_y\psi'_x$.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\psi'_y}{\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x}+\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v}\right.$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\varphi'_y}{\psi'_x\varphi'_y-\psi'_y\varphi'_x}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

例11 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 可微，且 $f(1,1)=1,f'_x(1,1)=a,f'_y(1,1)=b$，又设 $\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$，求：$\varphi(1)$，$\frac{d\varphi^2(x)}{dx}\Big|_{x=1}$。

（$=2(a+b(a+b(a+b)))$ ）

例 12 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases}z=f(x,y,z,t)\\g(y,z,t)=0\\h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

（ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$ ）

例 13 设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中 f,g 有连续的二阶导数，求 $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ (0)。

例14 $z=f(x,\varphi(x^2,y^2))$，且 f 与 φ 的二阶偏导数连续，求 $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$。

（ $=2\mathrm{y}\frac{\partial^2f}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+4xy\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+4xy\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$。）

例15 函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定，求 $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$，其中函数 F 的二阶偏导数连续，$aF_1+bF_2\neq0$。

$$\left(\frac{\partial^2\mathrm{z}}{\partial y\partial\mathrm{x}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F'_1\mathrm{c}}{aF'_1+bF'_2}\right)==\frac{\frac{\partial}{\partial y}(F'_1\mathrm{c})(aF'_1+bF'_2)-(F'_1\mathrm{c})\frac{\partial}{\partial y}(aF'_1+bF'_2)}{(aF'_1+bF'_2)^2}\right.$$

$$\left.=-c^2(F''_{11}F'_2+F''_{22}F'_1)+\frac{c^2F'_2F'_1}{bF'_2+aF'_1}(a^2F''_{11}+2abF''_{12}+b^2F''_{22})\right)$$

例 16 已知 $u=u(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$，选择参数 α,β 的值，利用 $u(x,y)=v(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$ 将原方程变形，使新方程中不出现一阶偏导数。

（ $\begin{cases}\alpha+a=0\\ a-\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-a\\ \beta=a\end{cases}$ ）