基础部分
第二课　微积分

第 2 章 空间解析几何、多元函数的极限及连续性

(一) 向量及其运算

(二) 空间的直线、平面及一般曲面

(三) 多元函数极限及连续性

11.1 向量及其运算

11.1.1 向量概念:

具有大小,确定方向.这样的量称为**向量**. 向量的**模**$|\vec{a}|$.

零向量: 长度等于零的向量称为**零向量**. 零向量的方向不确定.

11.1.2 向量五种运算:

(1). **向量的加法**: 向量的加法$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$服从平行**四边形法则和三角形法则**:

(2). **向量的数乘**: $\lambda\vec{a}$为向量的数乘，它是向量.

注意： 若$\vec{a}\neq\theta$(零向量),则$\vec{a}_0=\vec{a}/|\vec{a}|$是一个单位向量，并且$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$

(3). **向量的数量积**:

两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$之间的夹角称为之间的夹角α,规定$0\leq\alpha\leq\pi$,

定义: $\vec{a}$和$\vec{b}$的**数量积**$\vec{a}\cdot\vec{b}$定义为　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

注意　(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) 若$\vec{a}$和$\vec{b}$非零,则$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

(3) $|(\vec{a},\vec{b})|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$　　(4) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$,

(5) 向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影: $(\vec{a})_{\vec{b}}=\vec{a}\cdot\vec{b}_0=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

(4). **向量的向量积**:

定义: 叉积$\vec{a}\times\vec{b}$(向量积)是一个向量，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$；定它的方向由所谓“右手法则”确定.

注意：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

(2) $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{c}=\lambda\vec{a}\times\vec{c}+\mu\vec{b}\times\vec{c}$

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=\theta\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}$

(5). 向量的混合积：

定义：向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积为 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$,记作 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$,它是数量，

向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **的混合积有以下几何意义**：以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体,则这个平行六面体的体积等于 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

注意：

(1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},c)=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

11.1.3 向量位置关系的判断：

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\theta\Leftrightarrow\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\exists\lambda,\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

11.1.4 向量的投影表示及其运算公式：

(1). 向量在空间直角坐标系的投影表示

起点在原点 O，终点为 $P(a,b,c)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$，可以表示为 $\overrightarrow{OP}=a\ \vec{i}+b\ \vec{j}+c\ \vec{k}$. 也可以表成：$\overrightarrow{OP}=\left(a,b,c\right)$，称为向量的**投影表示**，因为 a,b,c 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x,y,z 三轴上的投影。

注意：向量是自由向量。

(2). 用空间直角坐标系进行向量运算

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 为任意两个向量，则

1）向量的加法运算：$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1)\,\vec{i}+(a_2\pm b_2)\,\vec{j}+(a_3\pm b_3)\,\vec{k}$

2）数乘：$\lambda\,\vec{a}=\lambda a_1\,\vec{i}+\lambda a_2\,\vec{j}+\lambda a_3\,\vec{k}$；或 $\lambda\,\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$

以上是向量的线性运算。

3）数积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;特别有

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\quad,|\,\vec{a}\,|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$

如果 $\vec{a}$ 是一个单位向量，即 $|\,\vec{a}\,|=1$，则

$$\vec{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{a_1}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{a_2}{|\vec{a}|}\vec{j}+\frac{a_3}{|\vec{a}|}\vec{k}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$$

其中 α,β,γ 是向量 $\vec{a}$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的夹角.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的**方向余弦**。显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

4）．向量积： $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是互相垂直并且成右手系的三个向量，所以

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\theta\ ,\ \vec{j}\times\vec{j}=\theta\ ,\ \vec{k}\times\vec{k}=\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

5）．混合积的计算：

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ， $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ ，　则

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\ .$$

例 1 设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-2\vec{i}+\vec{k}$, 求以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线的长度。($\sqrt{11}.$)

例 2 设 $\vec{a}=(1,1,4),\ \vec{b}=(1,-2,2)$, 求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量。$(\frac{7}{18},\frac{7}{18},\frac{14}{9})$

例 3 设有三点 $A(1,2,0),\ B(-1,3,1),\ C(2,-1,2)$, 求 ΔABC 的面积。($\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{3}.$)

例 4 试证　$A(1,1,-1),\ B(-2,-2,2)$, 及 $C(1,-1,2),\ D(0,0,0)$ 四点共面。

11.2 空间的平面、直线及一般曲面

11.2.1 空间平面方程

（1）平面的法向量与平面的方程：

与平面 π 垂直的直线称为 π 的**法线**；与 π 垂直的的非零向量称 π 的**法向量**.

平面向量方程式为 ： $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$ ．　由于

$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ ，所以

- 法向为 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$,过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- 任何三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$，其图形定一张法向 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$，的平面。

例 5 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 不共线,求过这三点的平面 π .

解: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 称为平面 π 的三点方程式.

例 6 已知平面 π 过两点 $M_1(1,0,-1)$，$M_2(-2,1,3)$，并且与向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 平行,求此平面的方程.

解:平面 π 的向量方程为 $-5(x-1)-11(y-0)-(z+1)=0$，

或者 $5x+11y+z-4=0$

(2) 平面外一点到平面的距离

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $\pi: Ax+By+Cz+CD=0$ 外一点，则 P_0 到 π 的距离是

$$|\overrightarrow{P_1P_0}|=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

11.2.2 空间直线方程

(1) 直线方程式

- 通过一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\vec{v}=(l,m,n)$ 的直线参数方程是：

其坐标 $\begin{cases} x=x_0+l\,t \\ y=y_0+m\,t \\ z=z_0+n\,t \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$

- 上消去参数 t，得到直线的**标准方程**(或直线的点向式方程)：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \quad .$$

例 7 已知直线经过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求直线方程.

解: $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$

例 8 若直线 l 由两个平面 $\pi_1: 3x+2y+4z-11=0$ 和 $\pi_2: 2x+y-3z-1=0$ 相交而成,求该直线的参数方程.

解:直线 l 的参数方程: $\begin{cases} x=1-10t \\ y=2+17t \\ z=1-t \end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

(2) 直线、平面间的位置关系

1) **夹角**: 两条直线 L_1, L_2 的夹角就是它们的方向向量 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 之间夹角 α 。两个平面 π_1 , π_2 之间的夹角 α 就是它们的法向量 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ 之间的夹角 α; 直线 L 与平面 π 之间的夹角 β 等于直线 L 的方向 $\vec{v}$ 和平面法线 $\vec{n}$ 之间夹角 α 的余角. 规定满足 $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

2) **平行与垂直关系**: 考察直线 L 的方向 $\vec{v}$,平面法线 $\vec{n}$ 相互的位置关系。

11.2.3 空间曲面

(1) 旋转曲面

设 L 为 $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$, $y\ge 0$, L 绕 Oz 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程式.

$F(Y,z)=0 \Rightarrow F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0$, 这就是旋转曲面 S 的方程.

例 9 求平面曲线 $L:\begin{cases} z-y^3=0 \\ x=0 \end{cases}$ $(-1\le y\le 2)$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的旋转曲面的方程式.

解: 曲面 S 可以统一地用一个方程表示: $z^2=(x^2+y^2)^3$

(2) 锥面和柱面

1).**锥面**:设 L 是空间一条曲线, M 为 L 外一点. 假定由点 M 出发的每一条射线与曲线 L 最多只有一个交点. 由点 M 向曲线 L 上的每一个点引射线.所有这些射线组成的曲面称为以 M 为顶点、以曲线 L 为准线的锥面.

例 10 yOz 平面上的直线 $z=ky(k>0)$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的旋转曲面

$$S: z=k\sqrt{x^2+y^2} ,$$

就是以原点为顶点、以曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=k^2 \\ z=k \end{cases}$ 为准线的锥面.

2) **柱面**:设 L 是空间一条曲线, l 是一条直线.平行于 l 的直线沿着曲线 L 移动所形成的轨迹是一张曲面,称这张曲面为以 L 为准线的柱面.沿曲线 L 移动的直线称为该柱面的母线.

例 11 设 S 为以平面曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线、母线平行与 Oz 轴的柱面,求 S 的方程.

解: 该柱面是与 Oz 轴平行的直线沿曲线 L 移动生成的曲面.由于母线通过 L 上某点、并且垂直与 Oz 轴,所以母线上的所有点 (x,y,z) 到 Oz 轴的距离都相等.柱面上的任意一点

(x,y,z) 都位于某条母线上.因此必然满足方程为 $x^2+y^2=a^2$

这就是柱面 S 的方程式.这个柱面的母线是圆周.因此称为圆柱面.

例 12 设 S 为以 $L:\begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线、母线平行与 Oz 轴的柱面,求 S 的方程.

3）二次曲面:

i).球面与椭球面

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，$R(>0)$ 为半径的球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

设 a,b,c 为正数,由方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 确定的曲面为**椭球面**.

ii). 抛物面

旋转抛物面：旋转抛物面.它的方程为 $z=a(x^2+y^2)$.

椭圆抛物面：由方程 $z=ax^2+by^2\ (a,b>0)$,确定的曲面称为椭圆抛物面.

双曲抛物面：由方程 $z=ax^2-by^2\ (a,b$同号$)$ 确定的曲面称为双曲抛物面.双曲抛物面也称为马鞍面.

11.3 多元函数的极限与连续性

11.3.1 多元函数概念

（一）**多元函数定义** 设 Ω 是 R^n 的一个子集，如果按照某种确定的法则 f ，使得每个 $x\in\Omega$,唯一地对应于一个实数 u ,则称 f 为定义在 Ω 上的一个（n 元）**函数**，记成：

$f:\Omega\to R$.

其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in\Omega$ 是**自变量**，Ω 是该函数的**定义域**.

实数 u 称为 $\vec{x}$ 所对应的**函数值**。记成 $u=f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\quad(\vec{x}\in\Omega)$.

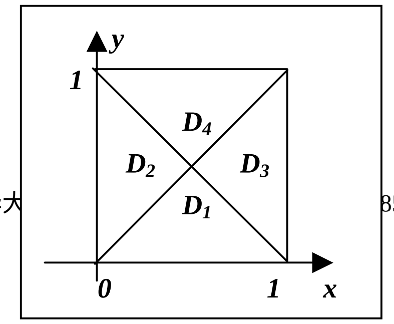
（二）区域的定义，闭区域的定义。

（三）多元函数的表示

显式表示的函数：$z=f(x,y)$;　$w=f(x,y,z)$ 等；

隐函数： 用方程 $F(x,y,z)=0$ 表示的函数 $z=z(x,y)$ 等；

用参数表示：用参数方程 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(x,y) \end{cases}$ ，表示的函数 $z=z(x,y)$.



例 13 若二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域是

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$,则复合函数

$w(x,y)=f(x+y,x-y)$的定义域是下图中（　C　）

(A)　$D_1\cup D_3$　(B)　$D_1\cup D_2$　(C)　D_1　(D)　D_2

11.3.2 函数的极限

(一)多元函数的极限定义

- 设 $f:D\subset R^n\to R$ ，距离是$d(\vec{x},\vec{y})=|\vec{y}-\vec{x}|$， $a\in R$

定义 1 设$\vec{x}_0\in R^n$， $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\vec{x}\in D$，且

$0<d(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta$，都有$|f(\vec{x})-a|<\varepsilon$。

- **无穷小量**：$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=0$，记成 $f(\vec{x})=o(1)$，（$\vec{x}\to\vec{x}_0$）；

- **高阶无穷小量**：$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=0$，记成 $f(\vec{x})=o(g(\vec{x}))$.

（二）多元函数极限的性质

(1) **唯一性**：多元(向量)函数的极限如果存在，则是唯一的。

(2) **线性性**：极限运算的**线性性**。

(3) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}f(\vec{x})=a\Leftrightarrow f(x)=a+o(1)$,（$\vec{x}\to\vec{x}_0$）。

(4) **多样性**：自变量变化趋势的**多样性**，引起多元函数极限形式的多样性。

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$写作$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$.这叫**二重极限**.

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 叫**累次极限**。

$\lim\limits_{t\to t_0}f(x(t),y(t))$是不一样的，叫**按指定路径的极限**，

这条路径就是曲线$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$.

例14 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ $((x,y)\neq(0,0))$，研究极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\y\to y_0}}f(x,y)$的存在性.

解：因此由极限定义得到$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$.

例 15 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{|x|+|y|}=\begin{cases}1, & x\geq 0,y\leq 0,|x|+|y|\neq 0,\\ \dfrac{x-y}{x+y}, & x\cdot y\geq 0,|x|+|y|\neq 0\cdot\\ -1, & x\leq 0,y\geq 0,|x|+|y|\neq 0,\end{cases}$

例 16 设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } y=x^2\\ 0, & \text{if } y\neq x^2\end{cases}$,研究极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 的存在性.

关于多元函数极限,有几条结论介绍一下：

（1）重极限存在则按特殊路径的极限一定存在，反过来不成立；

（2）重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，又有一个累次极限的内层极限，如

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y) \text{ 存在,}$$

则累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 存在，且与重极限相同。

重极限存在，而累次极限不存在的例子：

例 17 $f(x,y)=\begin{cases} x\,Sin\dfrac{1}{y}+y\,Sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$.

11.3.3 函数的连续性

(一) **连续性的定义**： 设 $f:D\subset R^n\to R$, $\vec{x}_0\in D$

定义 ： f 在 $\vec{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$.

等价定义一：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\vec{x}\in D$， $d(x,x_0)<\delta$，

都有 $|f(\vec{x})-a|<\varepsilon$。

等价定义二：$\forall(\vec{x}_k)\subset D,\vec{x}_k\to\vec{x}_0$， $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k)=f(\vec{x}_0)$.

等价定义三：$\forall U_\varepsilon(a)\subset R$，$\exists U_\delta(\vec{x}_0)\subset R^n$， $\forall\vec{x}_0\in U_\delta(\vec{x}_0)$，

都有 $|f(\vec{x})-a|<\varepsilon$.

等价定义四： $f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+o(1)$, ($\vec{x}\to\vec{x}_0$)。

关于闭域边界点上函数连续性的补充定义：

$\forall U_\varepsilon(a)\subset R$，$\exists U_\delta(\vec{x}_0)\subset R^n$， $\forall\vec{x}_0\in U_\delta(\vec{x}_0)\cap D$,都有 $|f(\vec{x})-a|<\varepsilon$.

（二）多元连续函数的性质

和一元函数的情形一样,函数的连续性具有如下运算性质:

(1) 四则运算的连续性。

(2) 设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 都在区域 Ω 上连续,函数 $f(u,v)$ 在区域 Ω_1 上连续,并且当 $(x,y)\in\Omega$ 时有 $(u(x,y),v(x,y))\in\Omega_1$,则复合函数 $f(u(x,y),v(x,y))$ 也在区域 Ω 上连续.

(3) 多元初等函数在它们的定义区域内部是处处连续的。

（三）多元连续函数在有界闭区域上的性质

在有界闭区域上连续的多元函数仍然具有整体性质.

(1)**最大最小值定理** 设$\Omega\subseteq R^n$ 是有界闭区域，$f\in C(\Omega)$.则f在Ω上有界.且存在$P_1\in\Omega,P_2\in\Omega$,使得

$$f(P_1)=\min_{P\in\Omega}f(P)，\quad f(P_2)=\max_{P\in\Omega}f(P).$$

(2)**介值定理** 设$\Omega\subseteq R^n$是有界闭区域(连通的)，$f\in C(\Omega)$.则对介于$m=\min\limits_{P\in\Omega}f(P)$和$M=\max\limits_{P\in\Omega}f(P)$之间的每个实数$\mu$,都存在$P\in\Omega$,满足$f(P)=\mu$.

推论：零点定理：设$\Omega\subseteq R^n$是连通域，$f\in C(\Omega)$.若存在两点，$P,Q\in\Omega$，使得$f(P)\cdot f(Q)\le 0$，则存在$P_\xi\in\Omega$，$f(P_\xi)=0$；

特别是，当Ω为凸集(即：$\forall P,Q\in\Omega\Rightarrow\overline{PQ}\subset\Omega$)时，则存在

$$P_\xi\in\overline{PQ}\subset\Omega，\quad f(P_\xi)=0$$

关于连续函数性质的应用举例。

例 18 若$z=f(x,y)$在R^2上连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=+\infty$，证明 函数$f$在$R^2$上一定有最小值点。