基础部分

第二课 微积分

第 5 章 二重积分及其应用

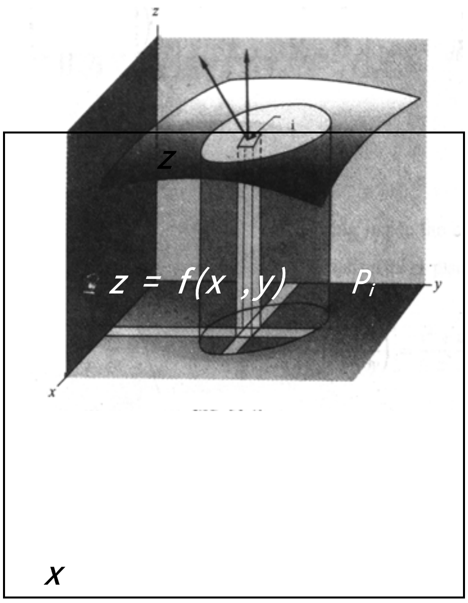
内容简介：

一．二重积分的定义及性质

二．二重积分的计算，常见的坐标系

三．二重积分的应用

四．综合题



14.1 二重积分的定义及性质

14.1.1 二重积分的定义及性质

（1）定义

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 上有定义，且有界，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积，该极限值 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，称为函数 $f(x,y)$ 在区间 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$，D 称为**积分区域**，$f(x,y)$ 称为**被积函数**，x,y 称为**积分变量**，**面积元素** $d\sigma$ 又记作 $dxdy$.

注意：

- 重积分的几何意义："代数体积"

如：$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma = \frac{2}{3}\pi a^3$；$\iint\limits_{\substack{1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\le 0\\ x\ge 0;\, y\ge 0}}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)d\sigma = \frac{1}{6}ab$，$(a,b>0)$

- 重积分的值与积分变量的符号无关：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(u,v)dudv$。

（2）性质

1）可积的必要条件和充分条科：

必要条件：函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 上有界；

可积的充分条件：函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 上连续.

2） 对积分区域的可加性

3） 对被积函数满足线性性：

4）**保序性**：若可积函数 $f(x,y)\ge g(x,y),\quad \forall(x,y)\in D$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy \ge \iint_D g(x,y)dxdy$$

5） 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则 $|f(x,y)|$ 在 D 上也可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$$

6） **估值定理**：若可积函数 $f(x,y)$ 在 D 上满足 $m\le f(x,y)\le M$，则

$$mS_D \le \iint f(x,y)dxdy \le MS_D$$

7） **中值定理**：若函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上取定号且可积，则

$\exists(\xi,\eta)\in D$，使 $\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)dxdy$

例 1 设 D 是平面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 三点为顶点的三角形区域．D_1 为其在第一象限的部分，则 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于（ A ）

（A） $2\iint_{D_1}\cos x\sin y dxdy$； （B） $2\iint_{D_1} xydxdy$；

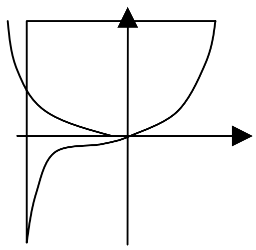
（C） $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$；（D） 0

例 2 函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续非负，若 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$，则 $f(x,y)\equiv 0$．

例 3 设积分区域 $D: x^2+y^2\le r^2$，则二重积分 $\iint_D (x^3+\sin y+1)dxdy =$ （πr^2）．

（积分区域的对称性与被积函数的奇偶性）。

例 4 $f(t)$ 为连续函数，D 是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 围成的区域，则 $\iint_D xy\cdot f(x^2+y^2)dxdy =$ （ 0 ）．



例 5 设 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\le r^2$ 上连续，且 $f(0,0)=2$，

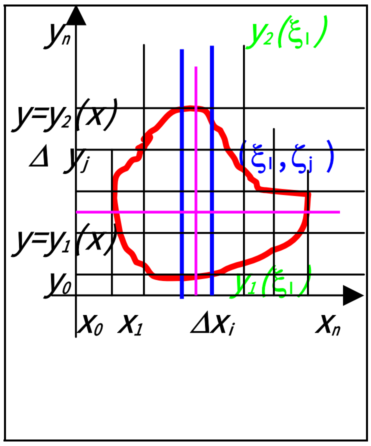
$$\lim_{r\to 0}\frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{r^2} = (\quad 2\pi \quad).$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用二重积分证明：$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$

其中等号当且仅当 $f(x)$ 为常数时成立.

14.2 二重积分的计算

14.2.1 在直角坐标系下的二重积分化为二次积分



如果积分区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$，

则 $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

如果积分区域 $D=\{(x,y)|c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$，

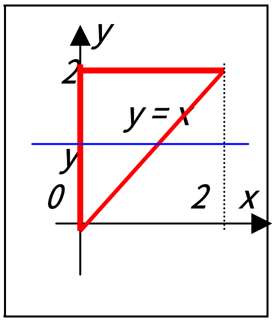
则 $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

(2)

上两式左端是二重积分，而右端是两个定积分，我们称之为**二次积分**. 二重积分的一般计算方法是将其化为二次积分.

例 7 将积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 化成累次积分，其中 $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2ax \\ x^2+y^2\le 2ax+2ay, a>0 \\ x\ge y \end{cases}$.

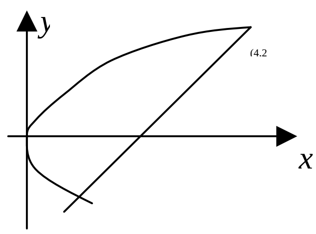
例 8 交换积分 $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$ 的积分次序.



例 9 计算 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$.

例 10 求 $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx=\frac{e-1}{2}$.

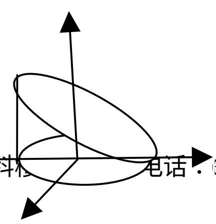
例 11 计算 $\iint_D xydxdy$，其中积分区域 D 是由抛物线 $x=y^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 所围成.



$\left(=\frac{45}{8}\right)$

例 12 求 $I=\iint_D [x+y]dxdy$，其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，$[x+y]$ 为取整函数. （ 6 ）

例 13 求椭圆柱 $4x^2+y^2=1$ 与平面 $z=1-y$ 及 $z=0$



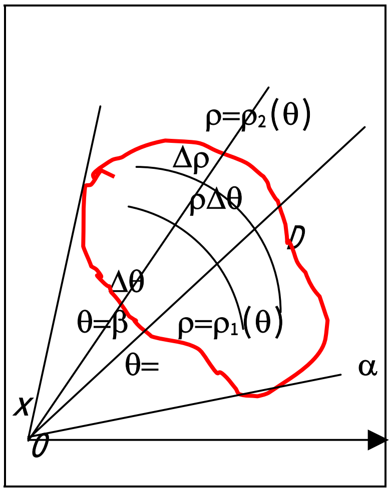
所围区域的体积．（$=\frac{\pi}{2}$）

例 14 证明 $\int_0^a dx\int_0^x f(y)dy=\int_0^a (a-x)f(x)dx \quad (a>0)$

14.2.2 在极坐标系下的二重积分化为二次积分

若积分区域 D 在极坐标下的表达形式为

$D_{\rho\varphi}=\{(\rho,\varphi)|\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta\}$



则二重积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$$

这是在极坐标系下的二重积分化为二次积分的公式．

例 15 求极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_{\varepsilon^2<x^2+y^2\le1}\ln(x^2+y^2)dxdy$．(＝$-\pi$)

例 16 计算由曲面 $z_1=2-x^2-y^2$ 与 $z_2=x^2+y^2$

所围成的空间的体积．($=\pi$)

例 17 求闭曲线 $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$ 所围区域的面积．（$=\frac{3}{4}\pi$）

例 18 求 $\iint\limits_D ydxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2\le ax$ 与 $x^2+y^2\le ay$

的公共部分（$a>0$）（$=\frac{a^3}{16}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$）

14.3 重积分的应用

14.3.1 曲面面积

（1）设空间曲面的方程为 $z=f(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}$，

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

（2）设空间曲面 $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 由隐函数 $F(x,y,z)=0$ 确定，则

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\,\frac{dxdy}{|F_z|}.$$

例 19 求球面的面积．

例 20 设 Ω 为曲面 $\begin{cases}x^2+y^2=ax\\ x^2+y^2=a^2z^2/h^2\end{cases},\quad (a,h>0)$

围成的空间区域．(1) 求 Ω 的体积；(2) 求 Ω 的表面积．（$=\frac{8}{9}a^2h$；）

（面积 $A = A_1 + A_2 = \sqrt{1+\left(\frac{h}{a}\right)^2}\cdot\pi\frac{a^2}{4} + 2ah$，

其中 A_1 为在锥面上的部分；A_2 为在柱面上的部分）

14.3.2 质量中心问题　板状物体 D 的质心 $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$：$\begin{cases}\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \\ \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}\end{cases}$，

例 21 求均匀半球　$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\right\}$ 的重心 $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$.

解：显然 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. $\bar{z} = \frac{3}{8}R$

14.3.3 转动惯量问题

空间物体 Ω 的质量点密度为 $\rho(x,y,z)$，其绕 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量分别为

$$J_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$J_y = \iiint_\Omega (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$J_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

14.3.4 万有引力问题

14.5 重积分的综合题

例 22 若 $F'(x) = f\left(x, y_2(x)\right) - f\left(x, y_1(x)\right)$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = f(x,y)$,

$g, F \in C^1, y_1, y_2 \in C^1$，$D = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}\right\}$，求 $I = \iint_D g(x,y)d\sigma$

解：（$I = F(b) - F(a)$）

例 23 若 $F'(x) = f(x)\cdot u(x)$, $u(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(t)dt$，$F \in C^1, g, y_1, y_2 \in C$

，$D = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}\right\}$，求 $I = \iint_D f(x)g(y)d\sigma$

解：（$I = F(b) - F(a)$）

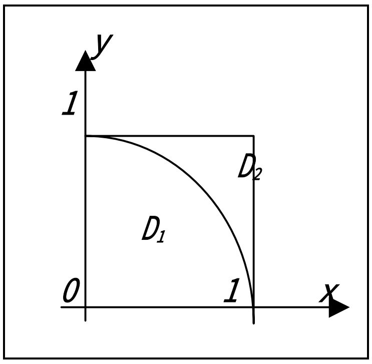
例 24 计算 $I = \iint_D \left| f(x,y) \right| d\sigma$，

$D = D_+ \cup D_- = \left\{(x,y) \middle| f(x,y) \ge 0\right\} \cup \left\{(x,y) \middle| f(x,y) \le 0\right\}$,

则有 $I=\iint\limits_{D_+} f(x,y)d\sigma-\iint\limits_{D_-} f(x,y)d\sigma$ ，或

$$I=2\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma-\iint\limits_{D_-} f(x,y)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_+} f(x,y)d\sigma-2\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$$



例 25 计算 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{\left|1-x^2-y^2\right|}d\sigma$ ，

$D: Max\{|x|,|y|\}\le 1$.（$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{36}$）

例 26 计算

$I=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)d\sigma$ ，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.

例 27 不计算,判断二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$ 的正负号.（ < 0 ）

例 28 不计算,判断二重积分 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ -1\le y\le 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$ 的正负号.（ > 0 ）

例 29 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且大于零,证明 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$.