

基础部分

第二课 微积分

第 9 章 函数项级数

- (一) 函数项级数的收敛域
- (二) 幂级数和函数的幂级数展开
- (三) 周期函数的三角级数展开
- (四) 综合例题

9.1 函数项级数的收敛域

项是函数的级数称为函数项级数, 它是否也表示一个函数的有关概念, 首先是借助于数项级数的收敛性概念给出的。

定义 9.1 设函数 $u_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 都在 D 上有定义, 则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

为定义在 D 上的函数项级数, $u_n(x)$ 称为级数的通项, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 称为级数的部分和函数。

定义 9.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数, $x_0 \in D$, 若数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个收敛点。所有收敛点构成的集合称为级数的收敛域。

定义 9.3 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I , 则任给 $x \in I$, 存在惟一的实数

$S(x)$, 使得 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成立。定义在 I 上的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数。

利用收敛域的定义及数项级数的有关判敛法可以求某些简单函数项级数的收敛域。

关于函数项级数收敛域的确定, 一般是基于数项级数判敛方法得到收敛点的集合。

例如, 讨论下列级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2} : \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| x - k\pi \right| \leq \frac{\pi}{6}, k = 0, \pm 1, \dots \right\};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} : \quad D = (-\infty, +\infty)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} : \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \dots\}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) : \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k=0, \pm 1, \dots\}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n : \quad D = \{0\};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx} : \quad D = \emptyset$$

注意：(1) 函数项级数的收敛域是逐点考察的，是“点收敛”。当确定 $x = x_0$ ，

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 就是一个数项级数，若它收敛，此点 x_0 称为该级数的一个收敛点；级数

收敛域是其收敛点的全体。

(2) 一般来说，收敛域可能是很复杂的集合。

9.2 幂级数的概念

幂级数是一类简单的函数项级数。只有真正理解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数在其收敛区间内的性质，才能掌握好收敛半径的求法，并能处理将函数展开为指定点的幂级数和求简单级数的和的问题。

9.2.1 幂级数的定义与收敛域

定义 9.4 设 $\{a_n\} (n=0, 1, 2, 3, \dots)$ 是一实数列，则称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的函数项级

数为 x_0 处的幂级数。 $x_0 = 0$ 时的幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 。

1. 幂级数的收敛域 幂级数作为一种特殊的函数项级数，其收敛域也具有某些特定的性质。这主要体现在以下的定理和其推论中。

定理 9.1 (阿贝尔定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则其在 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛。

证： 设 $|x| < |x_0|$ ，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ ，即存在 N 与 $M > 0$

使 $n > N$ 时 $|a_n x_0^n| < M$ 。考虑 $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ ，由于 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ，

则 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 绝对收敛, 于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛。

推论 1: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_1 处发散, 则其在 $|x| > |x_1|$ 时发散。

推论 2: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 在 x_1 处发散, 则存在惟一的实数 $R > 0$,

使得 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

为了进一步刻画幂级数的收敛域, 引进以下概念。

定义 9.5 若 $R \geq 0$ 满足:

(1) 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; (2) 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散,

则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

注: (1) 推论 2, 在 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 既有非零收敛点, 又有发散点时, 它的收敛半径是存在惟一的。

(2) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有非零收敛点时, 其收敛半径记为零; 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有发散

点时, 其收敛半径记为 $+\infty$ 。这样对任意一个幂级数来说, 其收敛半径都是存在惟一的。

(3) 由幂级数收敛特点可知, 使得幂级数条件收敛的点只能是其收敛区间的端点。

幂级数收敛域的基本特点是:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛域是非空点集, 即至少在 x_0 处收敛。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛域是 x_0 为对称点的一个对称区间 (收敛区间),

即 $(x_0 - r, x_0 + r)$, r 为收敛半径; 区间端点情况较复杂, 视具体级数而定。

2. 收敛半径的计算

根据收敛半径的定义, 一般用正项级数的比率法或根值法来求幂级数收敛半径。

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径, 有以下定理。

定理 9.2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n \neq 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则其收敛半

径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

定理 9.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

注 : (1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在 (或是无穷大) 仅仅是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的

收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件。反过来, 仅由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ,

并不能保证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ 成立。

(2) 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $a_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \rho |x|$,

所以, 当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| = +\infty$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

发散。因此收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ 。特别地, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ 时, $R = +\infty$; 当

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ 时, $R = 0$ 。

(3) 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, 若 $a_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} \right| = \rho x^2$, 当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 绝对收敛; 当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 发散。因此, 收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 。同样, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ 时, $R = +\infty$;

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ 时, $R = 0$ 。

例 9.1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} x^n$ 的收敛半径。

解：由于 $\frac{1}{2^n}|x|^n \leq \frac{2+(-1)^n}{2^n}|x|^n \leq \frac{3}{2^n}|x|^n$ ，且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}x^n$ 的收敛半

径都是 2，根据比较判别法及收敛半径的定义知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 的收敛为

2，或用根值法， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}$ ，因此 $R = 2$ 。但比率法对本题失效。因为

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \right| = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n \text{ 是奇数} \\ \frac{1}{6}, & n \text{ 是偶数} \end{cases}, \text{ 所以极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ 并不存在。}$$

例 9.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ []

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不定。

解：由幂级数的收敛性质，条件收敛处 $x = -1$ 只能处于收敛区间的端点，而该级数收敛区间的中点为 $x = 1$ ，由此得知其收敛半径 $R = 2$ ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 相应于 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n \text{ 在 } x = 2 \text{ 处的数项级数，}$$

而 $x = 2 \in (-1, 3)$ ，所以绝对收敛。

例 9.3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1}$ 的收敛域。

解：此时不能套用收敛半径的计算公式，而应直接用比率法求其收敛半径。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{9^{k+1}} x^{2k+1} \right| / \left| \frac{1}{9^k} x^{2k-1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{9}, \text{ 所以}$$

当 $\frac{x^2}{9} < 1$ ，即 $|x| < 3$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1}$ 绝对收敛；

当 $\frac{x^2}{9} > 1$ ，即 $|x| > 3$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{9^n} x^{2n-1} \right| = +\infty$ ，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1}$ 发散。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1} \text{ 的收敛半径为 } R = 3。$$

端点情况：当 $x = 3$ 时， $\frac{1}{9^n} 3^{2n-1} = \frac{1}{3}$ ，级数发散；当 $x = -3$ 时，级数的一般项为

$-\frac{1}{3}$ ，级数也发散。故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1}$ 的收敛域为 $(-3, 3)$ 。

例 9.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x-1)^{2n-1}$ 的收敛域。

解：因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x-1)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} (x-\frac{1}{2})^{2n-1}$ ，记其通项为 u_n ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+1} (x-\frac{1}{2})^{2n+1}}{2^{2n-1} (x-\frac{1}{2})^{2n-1}} \right| = 4(x-\frac{1}{2})^2,$$

所以，当 $4(x-\frac{1}{2})^2 < 1$ ，即 $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛；当 $\left|x-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ 时，由于

$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty$ ，所以原级数发散。故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x-1)^{2n-1}$ 的收敛区间为 $(0,1)$ 。

又当 $\left|x-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ 时，原级数的一般项分别是 $u_n = -1$ 和 $u_n = 1$ ，所以原级数发

散。因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x-1)^{2n-1}$ 的收敛域为 $(0,1)$ 。

例 9.5 设 a_0, a_1, a_2, \dots 为一等差数列，且 $a_0 \neq 0$ ，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域。

解：记 a_0, a_1, a_2, \dots 的公差为 d ，则 $a_n = a_0 + nd$ ($n=0,1,2,\dots$)，

所以
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_0 + (n+1)d}{a_0 + nd} \right| = 1,$$

因此原级数的收敛半径为 $R=1$ ，又当 $x = \pm 1$ 时，原级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n a_n$ ，且

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n a_n$ 发散，于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$ 。

例 9.6 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 。

注：求收敛域是研究幂级数时的一个基本问题，首先是求幂级数的收敛半径。应掌握利用比率法或根值法求收敛半径的基本方法，在某些情况下，也可以利用收敛半径的概念求收敛半径的值，例如当知道幂级数的条件收敛点时也就知道了其收敛半径。另外，根据级数之间的相互关系，也可以求得幂级数的收敛半径，例如积分级数、导级数的收敛半径与原级数的收敛半径的关系等。

解：因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} x^{2(n+1)} \frac{2^n + (-3)^n}{nx^{2n}} \right| = \frac{1}{3} x^2,$$

根据比率法, 当 $|x| < \sqrt{3}$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $|x| > \sqrt{3}$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx^{2n}}{2^n + (-3)^n} \right| = +\infty, \text{ 故原级数发散。}$$

根据收敛半径的定义知原级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$, 又当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时,

原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^n + (-3)^n}$, 且此级数发散, 所以原级数的收敛域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 。

9.2.2 幂级数的性质

在收敛区间内, 除了具有收敛级数和绝对收敛级数的基本性质外, 幂级数作为特殊的函数项级数还具有下面几条常用的性质。

1. 两级数和的收敛半径: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半

径为 R_2 , 一般情况下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R)。$$

2. 和函数的连续性: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续,

即任给 $x_0 \in I$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \right), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)。$

3. 和函数的可积性与逐项积分性质:

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 且可逐项积分, 即任给 $x \in I$,

有

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}。$$

若记 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1 , 则 $R \leq R_1$ 。且逐项

积分后的幂级数收敛域不会变小。

4. 和函数的可导性与逐项求导公式: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间

$(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导, 即任给 $x \in (-R, R)$, 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

注:(1) 记 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 R_2 , 则 $R \leq R_2$ 。但应注意的是, 即使级数在

收敛区间的端点收敛, 性质 4 也不保证和函数在此端点可导。例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n$

在 $x=1$ 处收敛, 但其逐项求导后的级数在 $x=1$ 并不收敛。

(2) 由性质 3 与性质 4 易知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的

收敛半径相等, 即 $R = R_1 = R_2$ 。

9.2.3 函数展开成幂级数

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, $x_0 \in D$, 若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 对任意

的 $x \in D$ 都成立, 则称 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数。

由幂级数的性质易知, 若 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数, 则 $f(x)$ 在区间 D 内存在任意阶导数。根据逐项求导性质, 可以证明以下定理。

定理 9.4 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

则其展开系数为

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

这说明, 若函数能展开成某点的幂级数, 则其展开形式是惟一的。展开形式的惟一性是利用间接展开法将函数展开成幂级数的主要理论依据。

1. 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 9.6 若 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且在 x_0 处的各阶导数

$f^{(n)}(x_0) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ 都存在, 则称幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0

处的**泰勒 (Taylor) 级数**,

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒系数**。特别地, $x_0=0$ 处的

泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林 (Maclaurin) 级数。

充分必要条件：若设函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x),$$

则 $f(x)$ 在 D 上能展开成 x_0 处的泰勒级数的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, x \in D.$$

充分条件：当 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$ ($n=1,2,3,\dots$) 在 D 上一致有界，即存在

$M > 0$ ，使得 $|f^{(n)}(x)| \leq M$ ($n=1,2,3,\dots, x \in D$) 成立时，函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in D$ 处

的泰勒级数在 D 上收敛到 $f(x)$ 。

2. 函数展开成幂级数的方法

(1) 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法。

由直接展开法易知函数

$e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

其中，当 $\alpha \leq -1$ 时， $x \in (-1, 1)$ ；当 $-1 < \alpha < 0$ 时， $x \in (-1, 1]$ ；当 $\alpha > 0$ 时，

$x \in [-1, 1]$ 。

特别地，当 $\alpha = -1$ 时，有 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$ 。

(2) 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算，数乘运算，(逐项)积分运算和(逐项)求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

例 9.7 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求收敛区间。

解：因为 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$ ，所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{(x+1)^2} = -(x-1) \left(\frac{1}{1+x} \right)' \\ &= -(x-1) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \right)' = -\frac{(x-1)}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 3)$ 。

例 9.8 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为_____。

分析：将函数展开成指定点的幂级数的方法一般就是所谓的间接展开法，间接展开法就是将被展函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原函数展开为幂级数。所用的运算主要是代数运算和逐项积分运算及逐项求导运算。

解：由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (x \in (-\infty, +\infty))$ ，对函数 $f(x) = xe^x$ 进行间接展开

$$\begin{aligned} xe^x &= e[(x-1)e^{x-1} + e^{x-1}] \\ &= e \left[(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n \right] \\ &= e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right]. \end{aligned}$$

例 9.10 将 $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。

解：注意到

$$f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2} = \arctan \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

则当 $|x| < 1$ 时有

$$f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

3. 简单幂级数的和函数及简单数项级数求和

求幂级数的和函数问题，是将函数展开成幂级数问题的反问题。下面通过几个具体例子来说明此类问题的求解方法。

9.3 傅里叶级数

傅里叶级数是刻画周期信号的常用工具。只有理解傅里叶级数的概念，掌握狄里克雷收敛定理，才能写出函数的傅里叶系数、傅里叶级数及其函数等。

9.3.1 周期为 2π 的傅里叶级数

1. 有关概念

(1) 三角函数系 $\{1, \cos nx, \sin nx | n=1, 2, \dots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性：即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mxdx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mxdx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mxdx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots$$

(2) 周期函数的傅里叶级数

定义 9.7 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积，则称

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数；称级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数。记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)。$$

当 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积奇函数时有

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

此时 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数为 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ，称为正弦级数。

而当 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积偶函数时， $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶

级数为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, 称为余弦级数 , 且

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots)。$$

根据周期函数的性质 , 傅里叶系数可在任何一个周期长度的区间上积分得到 , 即

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx dx。$$

2. 傅里叶级数的收敛性

定理 9.5 (狄里克雷收敛定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数 , 且满足

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点 ,

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上只有有限个单调区间 ,

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛 , 且

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))。$$
 也就是说 , 在 $f(x)$ 的连续点处 ,

和函数 $S(x)$ 与函数 $f(x)$ 的值相等 ; 在 $f(x)$ 的第一类间断点处 , $S(x)$ 的值等于

$f(x)$ 在此点的左、右极限的平均值。

9.3.2 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

与周期为 2π 的函数类似 , 当函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数 , 且在 $[-l, l]$ 上可积时 , 称

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶系数 ; 称级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

为 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期的傅里叶级数。记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

周期为 $2l$ 的傅里叶级数的收敛性结论与周期为 2π 的傅里叶级数有类似结论。

9.3.3 只在 $[0, l]$ 上有定义的函数的傅里叶级数展开

定义在 $[0, l]$ 上的函数可以有多种方式展开成 $2l$ 三角级数 , 但常用的方式只有

三种, 即: 周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为:

1. 正弦级数展开

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad (\text{周期为 } 2l)$$

$$\text{其中 } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2. 余弦级数展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad (\text{周期为 } 2l)$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

例 9.11 已知 $f(x) = x+1, x \in [0, 1]$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数, 则 $S(0), S(\frac{1}{2})$ 的值分别为 $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ 。

注: 求傅里叶级数和函数或和函数的值并不需要将函数展开为傅里叶级数, 因为狄里克雷收敛定理已经把傅里叶级数的和函数与函数本身联系了起来, 从函数本身的表达式就可以得到和函数的表达式。

解: 根据狄里克雷收敛定理, 得和函数 $S(x)$ 的周期为 1, 且

$$S(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x=0 \\ x+1, & 0 < x < 1, \text{ 所以 } S(0) = \frac{3}{2}, S(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, & x=1 \end{cases}$$

例 9.12 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_2 = \underline{1}$ 。

注: 本题主要考查将函数展开成余弦级数的有关知识, 如何给出傅里叶系数的表达式和正确算出傅里叶系数的值是解决本题的关键。

解: 根据条件, a_n 是 x^2 在 $[-\pi, \pi]$ 上周期为 2π 的傅里叶系数, 所以

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2\pi} [x^2 \sin 2x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [x \cos 2x]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx = 1. \end{aligned}$$

例 9.13 设函数 $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$, 而 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$,

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, n=0, 1, 2, \dots$,

则 $S(-1)$ 的值为 [D] .

- (A) -1 。 (B) $-\frac{1}{2}$ 。 (C) $\frac{1}{2}$ 。 (D) 1 。

解：本题主要考查函数的余弦级数展开和傅里叶级数的狄里克雷收敛定理。由于级

数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ 是对函数

$f(x) = x^2, x \in [0, 1]$ 作偶延拓得到的三角级数展开式，且延拓后得到的函数连续，即

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & -1 \leq x < 0 \end{cases}, \text{ 因此 } S(-1) = f(1) = 1. \text{ 即选项(D)正确.}$$

9.4 综合例题

例 9.14 下列命题中正确的是 [D] .

- (A) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \neq 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ 。
- (B) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有收敛半径。
- (C) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$ ，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$ 。
- (D) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$ ，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$ 。

解：选项(A)考查的是幂级数收敛半径的计算公式，因为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ 只是

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件，而当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

R 时，未必能保证极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 存在，因此选项(A)错误。选项(B)考查是收敛半径

的存在惟一性，由于任何幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径都存在而且惟一，所以选项(B)

不对。选项(C)和(D)考查的是幂级数的逐项积分和逐项求导性质，利用级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$

可以排除选项(C)，选项(D)则可以直接由幂级数的逐项积分性质得到。并且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收

敛时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ 一定收敛, 反之未必。

注: 将函数展开成指定点的幂级数是级数部分的一类重要问题, 一般地都是利用几个初等函数的麦克劳林级数作间接展开, 在展开过程中会用到幂级数的有关性质, 如线性运算性质及逐项积分和逐项求导的性质等。

例 9.15 已知 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 且对任意 x , $F'(x) = f(x)$ 则 $F(x)$

麦克劳林展开式为 $F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

解: 根据幂级数的逐项积分性质及 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-\infty, +\infty)$, 得

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \text{ 所以}$$

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, x \in (-\infty, +\infty)。$$

例 9.16 设 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$, 则

$$f^{(101)}(0) = -101!。$$

注: 利用泰勒级数展开是求高阶导数的一种有效方法。因为在泰勒级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

中含有 $f^{(n)}(x_0)$, 所以, 当 $f(x)$ 的泰勒展开式能利用一些已知函数的展开式得到

时, 则由展开形式的惟一性可方便地求出 $f^{(n)}(x_0)$ 。

解: 由

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+2}, x \in (-1, 1) \quad \text{及}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

且 $f^{(3n+2)}(0) = (-1)^n (3n+2)! (n=0, 1, 2, \dots)$, $f^{(m)}(0) = 0 (m \neq 3n+2)$ 。

则 $3n+2=101$, 于是 $n=33$, 故 $f^{(101)}(0) = -101!。$

例 9.17 将函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 展开为 $x=0$ 处的幂级数。

解：因为

$$f(x) = \ln(1+x+x^2) = \ln \frac{1-x^3}{1-x} = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \text{ 且 } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

所以 $f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x^3)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1). \end{aligned}$$

例 9.18 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ 在 $x_0=1$ 点展成幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$ 。

解：因为 $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \right)$

且

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} &= -\frac{1}{1-(x-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n, \quad x \in (0, 2) \\ \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{4} \right)^n, \quad x \in (-3, 5) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+x-6} = -\frac{1}{5} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{4} \right)^n \right] \\ &= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \right] (x-1)^n, \quad x \in (0, 2), \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的系数为 $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$,

所以 $f^{(n)}(1) = (n!)a_n = -\frac{n!}{5} \left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \right]$ 。

例 9.19 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和。

解 1 : 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$, 其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$, 只需求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1)$ 。

记其和函数为 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty)。$$

由于

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - 1 = e^x - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 于是 $\int_0^x S(t) dt = x e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

因此 $S(x) = (x+1)e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e$ 。

解 2 : 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

对上式两边求导, 得 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$, 所以 $x e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$,

此式两边再求导, 得 $(x+1)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}$,

令 $x=1$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$ 。

解 3 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + e = 2e \end{aligned}$$

例 9.20 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$, 又 $g(x) = \frac{x f(x)}{1+x}$, 求

$g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

解 : 由 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$ 得到

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^n, \quad (|x| < 1),$$

逐项微分一次得到

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot nx^{n-1}, \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{xf'(x)}{1+x} = \frac{x^2}{(1+x)^2} = x^2 f'(x) \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n+1}, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

例 9.21 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解: 因为

$$f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 且 } f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续, 于是

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ 。

注: 单独考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的求和问题, 也可用更简便的方法求得, 如:

$$\text{考虑 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1], \text{ 则}$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

且 $S(0) = 0$, 所以

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, \quad x \in [-1, 1], \text{ 故}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = S(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 9.22 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

证明: $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$.

证: 易知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 和 $f(1-x)$ 的定义域分

别是 $[-1, 1]$ 和 $[0, 2]$. 令

$F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$, 则 $F(x)$ 定义域为 $(0, 1)$.

根据幂级数和函数的可导性及逐项求导公式, 得

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \quad x \in (-1, 1),$$

$$f'(1-x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} \right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1-x} \ln x, \quad x \in (0, 2),$$

由于

$$(\ln x \ln(1-x))' = \frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} \ln x, \quad x \in (0, 1),$$

所以 $F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + (\ln x \ln(1-x))' = 0, x \in (0, 1)$

因此 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) \equiv C, x \in (0, 1)$

在上式两端令 $x \rightarrow 1^-$, 根据幂级数和函数的连续性, 得

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \\ &= f(1) + f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+(x-1)) \ln(1-x) \\ &= f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}, x \in (0,1).$$

例 9.23 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展成周期 $T=2$ 的正弦级数,

则 $S(-\frac{5}{2})$ 为 (C)。

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) 1.

解：奇延拓得到

$$F(x) = \begin{cases} -2-2x, & -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -x, & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases},$$

(或用画图方法！)

注意周期 $T=2$ ，由迪里可雷定理计算如下：

$$S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{1}{2}^{-}\right) + F\left(-\frac{1}{2}^{+}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{4}$$

例 9.24 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ ，写出 $f(x)$ 的

傅里叶级数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。

解：根据傅里叶系数的计算公式，得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos n\pi x dx = \int_0^1 x \cos n\pi x dx \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 f(x) \sin n\pi x dx = \int_0^1 x \sin n\pi x dx \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \cos n\pi x + (-1)^{n-1} \sin n\pi x \right]$$

由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，根据狄里克雷收敛定理得

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \right] = \frac{1}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 \pi^2} = f(0) = 0 ,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$