

基础部分

第二课 微积分

第 6 章 三重积分、第一、二类曲线积分

内容简介

一, 三重积分

一. 第一类曲线积分

二. 第二类曲线积分

15.1 三重积分

15.1.1 三重积分的定义及性质

设函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 $\Omega \subset R^3$ 上有定义, 且有界, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

Ω 称为**积分区域**, $f(x, y, z)$ 称为**被积函数**, x, y, z 称为**积分变量**, 体积元素 dV 又记

作 $dx dy dz$. 三重积分的值与积分中间变量的符号无关:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(u, v, w) du dv dw$$

三重积分也有与二重积分相似的性质: 对积分区域的可加性; 对被积函数的线性性; 保序性; 估值定理; 中值定理及对称区域上的对称函数的三重积分的性质.

15.1.2 在直角坐标系下的三重积分化为三次积分

三重积分可以化为二重积分和定积分进行计算; 即先一后二, 或先二后一。

若三重积分的积分区域: $\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$,

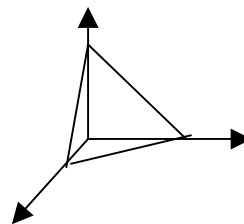
其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq x \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ 。则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

例 1 求 $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

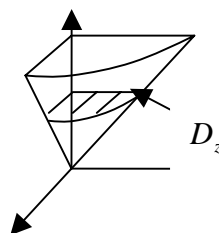
$$\left(= \frac{1}{12} \right)$$



例 2 求 $\iiint_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, 其中 Ω 为锥面 $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

与平面 $z = c$ ($c > 0$) 所围成的区域在第一卦限的部分.

解: $\left(= \frac{a^2 b^2 \sqrt{c}}{36} \right)$



15.1.3 在柱坐标系下的三重积分化为三次积分

若三重积分积分区域 Ω 在柱坐标系下的表达形式为

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi, z) : \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi) \\ z_1(\rho, \varphi) \leq z \leq z_2(\rho, \varphi) \end{cases} \right\}$$

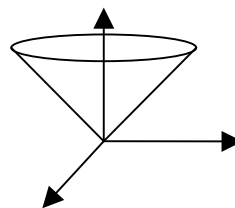
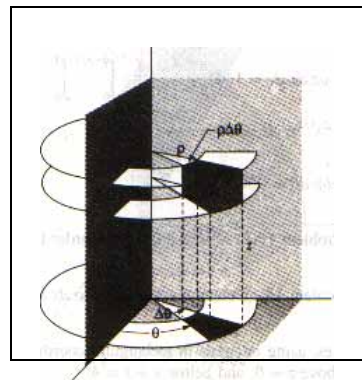
则三重积分

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho dz \end{aligned}$$

例 3 求 $\iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) z dx dy dz$,

其中 $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H\}$.

解: $= \pi \left(\frac{H^4}{4} + \frac{H^6}{12} \right)$



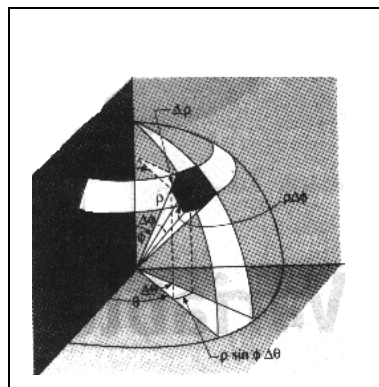
例 4 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} 0 \leq z \leq h \\ x^2 + y^2 \leq t^2 \end{cases} \right\}, \quad (t > 0). \quad \text{求 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}. \quad \left(= \frac{\pi h^3}{3} + \pi h f(0) \right)$$

15.1.4 在球坐标系下的三重积分化为三次积分

$$\text{球坐标系为 } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases},$$

$$\text{其中, } \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



若三重积分的积分区域 Ω 在球坐标系下的表示为 Ω^* ,

则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

例 5 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 与极轴

所围的图形绕极轴旋转所得的体积。

$$\text{解: } = \frac{8}{3} \pi a^3$$

例 6 求三重积分: $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, 其中

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2} \\ z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right. \right\}$$

$$\text{解: } = \frac{\pi}{8};$$

例 7 已知 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 求 $F'(t)$.

$$\text{解: } F(t) = 4\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho^2 d\rho, \quad F'(t) = 4\pi f(t^2) t^2$$

15.2 第一类曲线积分

15.2.1 第一类曲线积分的定义与性质

(1) 第一类曲线积分的定义

定义: $f(x, y)$ 定义在 L 上. $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) dl = \int_L f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$

函数 $f(x, y)$ 为被积函数, $\widehat{AB}(L)$ 为积分路径, dl 为弧微分。

注意: (1) $dl > 0$.

(2) 几何意义: $\int_L dl = L$ 的弧长; 物理意义;

(3) 对称性的利用。

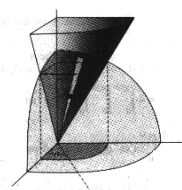
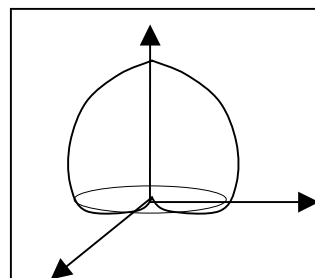
(4) 空间曲线积分的定义。

(2) 第一类曲线积分的性质:

1) 曲线积分存在的必要条件和充分条件:

必要条件: f 在 L 上有界; 充分条件: f 在 L 上连续。

2) 可加性: 若 $L = L_1 \cup L_2$, 则 $\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl$



3) 线性性: $\int_L [\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)] dl = \lambda \int_L f(x, y) dl + \mu \int_L g(x, y) dl$

4) 估值定理: $m \cdot L \leq \int_L f(x, y) dl \leq M \cdot L$, L 为曲线的弧长.

5) 中值定理: 若 $f(x, y)$ 在曲线 L 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in L$ 使 $\int_L f(x, y) dl = f(\xi, \eta) L$.

15.2.2 第一类曲线积分的计算

(1) 平面曲线积分:

设 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, 则 $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

设 L 的方程为 $y = y(x), x \in [\alpha, \beta]$, 则 $dl = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx$;

设 L 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, 则 $dl = \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$

(2) 空间曲线积分: 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

则弧长微分: $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$,

第一类曲线积分可按下式计算:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

注意: 第一类曲线积分化成定积分时, 积分下限一定小于积分上限.

例 1 求 $\oint_L xy dl$, 其中 L 是正方形 $|x| + |y| = a$, ($a > 0$). (0)

例 2 设 L 为椭圆 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$, 其周长为 a , 求 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) dl$ ($12a$)

例 3 计算 $\int_L xy dl$, 其中 L 是封闭路径 $OABO$. ($= \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}$)

例 4 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 求 $\oint_L x^2 dl$. ($= \frac{2}{3} \pi R^3$)

例 5 求 $\oint_L (x + y) dl$, 其中双纽线的右半支, L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad r(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right). \quad (= \sqrt{2}a^2)$$

例 6 求 $\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl$, 其中 L 为星型线, 其方程为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a = 4a^{\frac{7}{3}}$)

例 7 求圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 被抛物面 $z = c - x^2$ 及 $z = 0$ 所截成的一段的侧面积.

$$(\quad = 2\pi Rc - \pi R^3.)$$

例 8 设圆柱螺旋线 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的密度分布与 x, y 无关, 而与 z 成正比, 求这一

段圆柱螺旋线的质量与质量中心.

$$\text{解: } \bar{y} = \frac{1}{m} \int_L y \rho(x, y, z) dl = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot kt \sqrt{2} dt = \frac{8}{\pi^2},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \int_L z \rho(x, y, z) dl = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot kt \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{3}.$$

15.3 第二类曲线积分

15.3.1 第二类曲线积分的定义与性质

(1) 定义: 平面 向量函数 $\vec{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ 定义在 $L \subset R^2$, L 是平面上一条逐段光滑的有向弧段 \widehat{AB} (记作 L) 上.

$$\int_{L(AB)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} = \int_{L(AB)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [X(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

函数 $\vec{F}(x, y)$ 为被积函数, 有向曲线 L 为有向积分路径,

$d\vec{l} = (dx, dy)$ 为有向弧微分. L 的方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

完全类似, 对空间向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$

及空间中逐段光滑的有向弧段 \widehat{AB} (记作 L) 上. 可定义第二类空间曲线积分

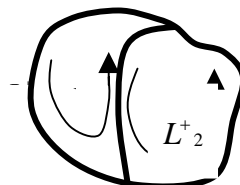
$$\int_{L(AB)} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{l} = \int_{L(AB)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

在空间, L 的方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$.

(2) 第二类曲线积分的性质:

1) 有向性: $\int_{L(AB)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} = - \int_{L(BA)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$.

2) 可加性: 若 A, B, C 为路径 L 上的三个点, 则



$$\int_{L(AC)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} = \int_{L(AB)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} + \int_{L(BC)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} ;$$

当 L 为闭路时, 规定逆时针方向为正, 记作 $\oint_{L^+} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$

$$\oint_{L^+} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} = \oint_{L_1^+} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} + \oint_{L_2^+} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$$

对第二类空间曲线积分, 亦有类似性质。

15.3.2 第二类曲线积分的计算

(1) 平面曲线积分的计算:

- 设 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, 起始点 A 与终点 B 对应的参数分别为 $t = \alpha$

与 $t = \beta$, 如果向量值函数 $\vec{F}(x, y)$ 在区域 Ω ($L \subset \Omega$) 内连续, 则第二类曲线积分

$$\begin{aligned} \int_{L(AB)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} &= \int_{L(AB)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t)]dt \end{aligned}$$

- 两类曲线积分的关系:

$$\begin{aligned} \int_{L(AB)} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} &= \int_{L(AB)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{L(AB)} (\vec{F}(x, y) \cdot \vec{l}_0)dl, \\ &= \int_{L(AB)} (X(x, y)\cos\alpha + Y(x, y)\cos\beta)dl = \int_{L(AB)} \|\vec{F}(x, y)\|\cos\theta \cdot dl, \end{aligned}$$

其中, $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx$

$\vec{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 为 L 的单位切向矢量。

(2) 空间曲线积分的计算: 若 L 的方程为 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 起始点 A 与终

止点 B 对应的参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = \beta$,

$$\begin{aligned} \int_{L(AB)} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{l} &= \int_{L(AB)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ &\quad + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt \end{aligned}$$

例 9 求 $\int_{L^+} xdy$, 其中 L^+ 是上半单位圆周, 由 $(-1, 0)$ 到 $(1, 0)$. ($\theta = -\frac{\pi}{2}$)

例 10 求 $I = \int_{L(A)}^{(B)} ydx + xdy + (x + y + z)dz$, L 由 $A(3, 5, 7)$ 到 $B(2, 3, 4)$ 的直线. (45)

例 11 设 L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向(逆时针方向), 求

$$I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy \quad (= -18\pi)$$

例 12 求 $I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

从 Ox 轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向. ($= 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha)$)

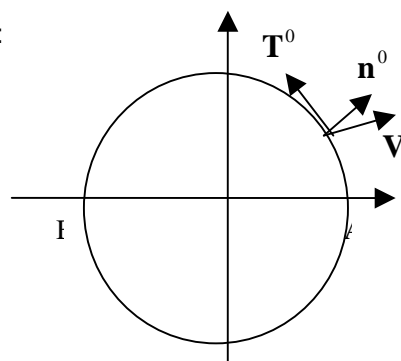
例 13 求 $I = \oint_{L^+} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, L^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界线, 方向为 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$. (-4)

例 14 平面流场 $\vec{V} = (x, -y)$, 求单位时间流过曲线 L 的流量:

(1) $L_1: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 由下往上的流量;

(2) $L_2: y = 0, -1 \leq x \leq 1$, 由下往上的流量;

(3) $L_3: x^2 + y^2 = 1$, 由里往外的流量.



例 15 椭圆 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 上每一点 $P(x, y)$ 处有作用力 $\vec{F}(x, y)$,

其方向指向椭圆圆心, 其模等于从点 P 到椭圆中心的距离.

(1) 求当质点 P 沿椭圆周在第一象限中的弧从点 $A(a, 0)$ 移动到点 $B(0, b)$ 时, 力 $\vec{F}(x, y)$ 所作的功. ($= \frac{a^2 - b^2}{2}$)

(2) 求当质点 P 沿椭圆周正向一周时, 力 $\vec{F}(x, y)$ 所作的功. (0)

15.3.3 Green 公式 设平面二元向量函数为 $\vec{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$,

(1) **定理 (Green 公式)** 设 D 为平面上的有界连通闭区域, 记 ∂D 为 D 的有向边界, 其正方向由右手法则确定. 若 $X(x, y), Y(x, y)$ 在 D 上连续可微, 则

$$\int_{\partial D} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} = \int_{\partial D} Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

(i). 用于平面曲线积分的计算:

例 16 L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向, 求 $I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy$ ($= -18\pi$)

例 17 求 $\int_L (1 + ye^x)dx + (x + e^x)dy$, L 为沿 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的上部由 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$.

解: $(= \frac{\pi}{2} ab - 2a)$

若曲线本身不封闭, 可以通过添加辅助线的方法使其封闭, 然后再用 Green 公式简化计算.

(ii). 判断平面曲线积分与路径无关的条件:

定理: 若向量函数 $\vec{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$ 在平面区域 D 上连续, 则对的线积分

$\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$ 有如下等价结果:

1) 线积分 $\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$ 与路径 L 无关;

2) 闭路径积分为零, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0, \forall C \subset D$

3) 存在单值的原函数(势函数), 即, 存在函数 $\Phi(x, y)$ 使得

$$d\Phi(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy;$$

$$\text{或 } grad \Phi(x, y) = \vec{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j};$$

$$\text{或 } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y(x, y).$$

定理: 在单连通域 D 中: 线积分 $\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l}$ 与路径无关的充要条件是

$$\text{可积性条件 } \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \text{ 成立.}$$

(iii). 求原(势)函数的方法:

若 $\vec{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$ 存在原函数, 如何求原函数呢? 有三种方法:

第一: 特殊路径积分法: 即: $f(M) = \int_L Xdx + Ydy = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} Xdx + Ydy$

第二: 偏积分法: 由于 $df(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$, 即

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = X(x, y) \Rightarrow f(x, y) = \int X(x, y)dx + C(y),$$

再由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int X(x, y)dx + C(y) \right) = Y(x, y)$, 解出函数 $C(y)$.

第三: 凑微分法

例 18 求微分形式 $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ 的原函数. ($f(x, y) + c$)

例 19 设 $Q(x, y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$ 与路径无关,

并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0, 0)}^{(1, t)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0, 0)}^{(t, 1)} 2xydx + Q(x, y)dy$.

求函数 $Q(x, y)$. ($Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$)

例 20 知积分 $\int_L (x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关, $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

(1) 求 $f(x)$; ($f(x) = x(\sin x - x \cos x - 1)$)

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u = u(x, y)$ 使得 $du = (x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x}dy$;

($u = \frac{x^2}{2} - xy \cos x + y \sin x - y + C$)

(3) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi, 1)$ 到 $B(2\pi, 0)$ 的任意路径.

($= (1 - \pi) + \frac{3\pi^2}{2}$)

例 21 求 $\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right)ydx$, L 为沿任一条不与轴相交的曲线。

($= \pi + 1$)

例 22 设 C 为正向闭曲线: $|x| + |y| = 2$, $\oint_C \frac{axdy - bydx}{|x| + |y|} = [A]$

(A) $4(a + b)$; (B) $8(a + b)$; (C) $4(a - b)$; (D) $8(a - b)$.

例 23 设 C 为正向闭曲线: $\oint_C \frac{xdy - ydx}{a^2x^2 + b^2y^2} = ?$