基础部分

第二课 微积分

第 7 章 第一、二类曲面积分与场论

内容简介：

一．第一类曲面积分

二．第二类曲面积分

三．Guass 公式，Stokes 公式

16.1 第一类曲面积分

16.1.1 第一类曲面积分的定义与性质

(1) **定义**：设 S 是 R^3 中的一块逐片光滑的曲面，函数 $f(x,y,z)$ 定义在 S 上.

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta S_i$$

函数 $f(x,y,z)$ 为**被积函数**，S 为**积分曲面**，dS 为曲面的**面积微分**，

注意：1) $dS>0$. 2) 当 $f(x,y,z)=1$ 时，$\iint_S dS = S$.

(2) **第一类曲面积分的性质**：

1) 曲面积分存在的**必要条件**和**充分条件**：

必要条件：f 在 S 上有界；**充分条件**：f 在 S 上上连续.

2) 可加性：若 $S=S_1\cup S_2$， 则 $\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{S_1} f(x,y,z)dS+\iint_{S_2} f(x,y,z)dS$

3) 线性性：$\iint_S[\lambda f(x,y,z)+\mu g(x,y,z)]dS=\lambda\iint_S f(x,y,z)dS+\mu\iint_S g(x,y,z)dS$

4) 估值定理：$m\cdot S\le \iint_S f(x,y,z)dS\le M\cdot S$, S 为曲面的面积.

5) 中值定理：若 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上连续，则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in S$

使 $\iint_S f(x,y)dS = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot S$.

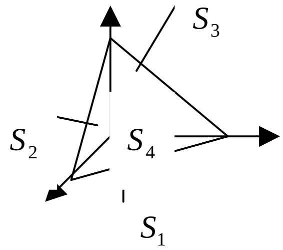
16.1.2 第一类曲面积分的计算

设空间曲面 S 的方程为 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$, 则 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

当曲面 S 为隐函数 $F(x,y,z)=0$, $(x,y)\in D_{xy}$ 时，则 $dS=\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy ,$$



例 1 求 $I=\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$，与三个坐标面围成的四面体的四个面．（ $=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\ln 2$ ）

例 2 求 $I=\iint_S (x+y+z)^2 dS$，其中 S 为单位球面．（$I=4\pi$）

例 3 求 $\iint_S |xyz|dS$，其中 $S: z=x^2+y^2,\quad 0\le z\le 1$． $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$ ）

例 4 求质量密度为 $\rho=1$ 的上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2,(z\ge 0)$ 绕 z 轴的转动惯量 J_z．

解：$J_z=\iint_S (x^2+y^2)dS$， $R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=\frac{4}{3}\pi R^4$

例 5 S 是平面 $x+y+z=1$ 截取球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的球冠部分，计算曲面积分

$$\iint_S (x-2y-2z)^2 dS = ?\ (\ =3\iint_S dS\ )$$

16.2 第二类曲面积分

16.2.1 第二类曲面积分的定义与性质

(1) **第二类曲面积分定义：** 设 $\vec{F}(x,y,z)=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$，定义在 $\Omega\subset R^3$ 上，S 是 Ω 中的一块逐片光滑的**有向曲面 $\mathbf{S}$**．向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)$ 在有向曲面 $\mathbf{S}$ 上的**第二类曲面积分**，$\iint_{\mathbf{S}^+}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{\mathbf{S}}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\cdot\Delta\vec{\mathbf{S}}_i$

函数 $\vec{F}(x,y,z)$ 为**被积函数**，$\mathbf{S}$ 为**积分曲面(有向)**，$d\vec{\mathbf{S}}=\vec{n}^0 dS$ 为曲面的**有向面微分**．

(2) **二类曲面积分的关系：** $d\vec{\mathbf{S}}=\vec{n}^0 dS=\left(dS\cos\alpha,\ dS\cos\beta,\ dS\cos\gamma\right)$

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}^0 dS$$

$$=\iint_S \left[X(x,y,z)\cos\alpha+Y(x,y,z)\cos\beta+Z(x,y,z)\cos\gamma\right]dS$$

上式等号的右端为第一类曲面积分．

(3) **第二类曲面积分的面微分向量投影表示：**若记

$$dy\wedge dz=\cos\alpha\, dS,\quad dz\wedge dx=\cos\beta\, dS,\quad dx\wedge dy=\cos\gamma\, dS$$

分别称为 dS 在 yz,zx,xy 平面上的**有向投影**，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 可正可负，因此 $dy\wedge dz, dz\wedge dx, dx\wedge dy$ 也可正可负．

$$dx\wedge dy=\cos\gamma\, dS=\begin{cases} d\sigma_{xy}, & 0\le\gamma\le\pi/2 \\ -d\sigma_{xy}, & \pi/2<\gamma\le\pi \end{cases},$$

$$dy\wedge dz=\cos\alpha\, dS=\begin{cases} d\sigma_{yz}, & 0\le\alpha\le\pi/2 \\ -d\sigma_{yz}, & \pi/2<\alpha\le\pi \end{cases},$$

$$dz\wedge dx=\cos\beta\, dS=\begin{cases} d\sigma_{zx}, & 0\le\beta\le\pi/2 \\ -d\sigma_{zx}, & \pi/2<\beta\le\pi \end{cases}.$$

其中 $d\sigma_{xy}\ge 0$ 为 dS 在 xy 平面上的投影面积.

所以第二类曲面积分也可以记成

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S X(x,y,z)dy\wedge dz+Y(x,y,z)dz\wedge dx+Z(x,y,z)dx\wedge dy$$

(2) 第二类曲面积分的性质

1). 方向性：第二类曲面积分与曲面的取向有关：$\iint_{S^-}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=-\iint_{S^+}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$；

2). 可加性：若 $S=S_1\cup S_2$，S,S_1,S_2 的正向一致,则

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$$

16.2.2 第二类曲面积分的计算

1). 曲面的法向量:

(1) 若曲面方程为 $z=f(x,y)$，　单位法向量 $\vec{n}^0=\pm\dfrac{f_x'\vec{i}+f_y'\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2+1}}$，

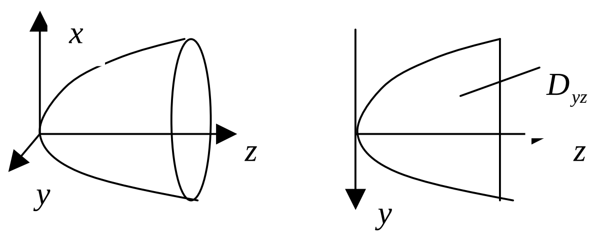
(2) 若曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，单位法向量 $\vec{n}^0=\pm\dfrac{F_x'\vec{i}+F_y'\vec{j}+F_z'\vec{k}}{(F_x')^2+(F_y')^2+(F_z')^2}$

对于有向曲面,曲面的正法向量指向曲面的正侧.

封闭曲面的正向为曲面的外侧.

例 6 求 $\oiint_{S^+} y^2zdx\wedge dy$，其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围的空间区域的外侧面.（ $\pi/3$ ）

例 7 求 $\oiint_{S^+} xdy\wedge dz$，其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围的空间区域的外侧面(如上题).



（ $\oiint_{S^+} xdy\wedge dz=\dfrac{\pi}{2}$ ）

例 8 计算 $I=\iint_S |z|dS$，$J=\iint_S |z|dx\wedge dy$，其中 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，外法线为正向.

（ $2\pi a^3$ ，0 ）

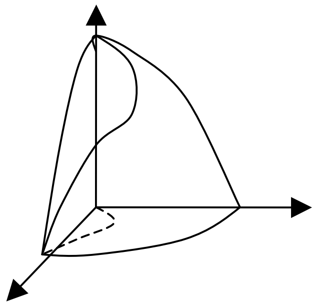
例 9 $I=\oiint\limits_{S^+}\dfrac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$， S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧(4π)

例 10 求 $\oiint\limits_{S^+}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$，其中 S^+ 为 $x^2+y^2+z^2=r^2, r>0$ 的外侧.

（ $=4\pi r^3$ ）

例 11 计算积分

$$I=\iint\limits_{S^+}x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$$



其中 $\mathbf{S}^+$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，限于

柱面 $x^2+y^2-x\le 0, z\ge 0$ 部分的外侧.

（ $I=\iint\limits_{S^+}x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy=\dfrac{38}{105}+\dfrac{5}{32}\pi$
）

16.3 场论

16.3.1 数量值函数的梯度,向量值函数的散度和旋度

(1) 数量值函数的梯度

数量值函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点可微，则其在 (x_0,y_0,z_0) 点的**梯度**为：

$$grad f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$,**数量值函数的梯度为向量**.

数量值函数的梯度的意义：函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 点的梯度作为向量,其方向为使函数 $f(x,y,z)$ 在该点的方向导数取得最大的方向;其大小为这个最大的方向导数.

(2) 向量值函数的散度 向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)=\left(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\right)$

在 (x_0,y_0,z_0) 点可微,则其 P_0 点的**散度**为：$div\mathbf{F}(x_0,y_0,z_0)=\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$

向量值函数的散度为数量．向量值函数的散度的意义:反映流场在该点的源强.

(3) 向量值函数的旋度 向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)=\left(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\right)$

在 (x_0,y_0,z_0) 点可微,则其在 (x_0,y_0,z_0) 点的**旋度**为:

$$rot\,\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{matrix}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

向量值函数的旋度为向量．向量值函数的旋度的意义：反映流场在该点的旋量的情况．

16.3.2 Guass 和 Stokes 公式

（1）**定理**:（Guass 公式）$\Omega \subset R^3$ 为有界闭区域,其边界面 $\partial\Omega$ 外侧为正，向量值函数

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\right)\in C^{(1)}(\Omega),$$

则 $$\oiint_{\partial\Omega} Xdydz+Ydzdx+Zdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv,$$

或 $$\oiint_{\partial\,\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\left(div\vec{F}\right)\ dv$$

（2）**定理**(Stokes 公式)：有界曲面 S 分块光滑可定向,其边界 ∂S 为分段光滑的闭曲线,$\mathbf{S}^+$ 与 $\partial\mathbf{S}^+$ 的方向满足右手螺旋法则，向量值函数

$\vec{F}(x,y,z)=\left(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\right)$在 S 及 ∂S 上是 $C^{(1)}$ 类，则

$$\oint_{\partial S^+}\vec{F}\cdot d\,\vec{l}=\iint_{S^+}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}\cdot d\vec{S}=\iint_{S^+}rot\vec{F}\cdot d\vec{S}\text{。}$$

16.3.3 Guass， Stokes 公式的其应用

(1).曲线积分、曲面积分的计算问题

例 12 求 $\oint_C ydx+zdy+xdz$，$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$.从正 z 轴方向看，$C$ 的正向为反时钟方向。（ $\oint_C ydx+zdy+xdz==-\sqrt{3}\pi a^2$ ）

例 13 计算 $\oiint_S \dfrac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$S$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧面.（ $4\pi a^2$ ）

例 14 求 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 穿过 $z^2=x^2+y^2\ (0\le z\le h)$ 的流量.（ $=\pi h^3$ ）

例 15 求 $I=\iint_S\left(x^3+az^2\right)dy\wedge dz+\left(y^3+ax^2\right)dz\wedge dx+\left(z^3+ay^2\right)dx\wedge dy$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上半球面上侧。 （ $\dfrac{29}{20}\pi a^2$ ）

例 16 设 $f(u)$ 连续可微,计算积分

$$\oiint_{S^+}x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]dx\wedge dy$$

其中 S^+ 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $y^2+z^2+x^2=1$，$y^2+z^2+x^2=4$ 围成

的空间区域的边界面的外侧.（ $=\dfrac{93\sqrt{2}}{5}\pi$ ）

例 17 设函数满足条件：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$，$n$ 为正整数，S_1：$f(x,y,x)=0$

与平面 $S_2: ax+by+cz=d$，所围区域为 Ω，$\partial\Omega$ 取外法线作正向，计算：

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy \quad \left(\frac{1}{3}H\cdot S\right)$$

例 18 求 $I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为圆周

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

其中为平面 $y=x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分内的面积.（πa^2）

例 19 在半空间 $x>0$，对任何光滑有向曲面 S，有

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy\equiv 0$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$ 求 $f(x)$。（$f(x)=\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-1\right)$）

例 20 Ω 是空间有界闭区域，S 是其外侧面，函数 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$ 在 Ω 上二阶

连续可微. 证明：$\iiint_\Omega u\Delta vdxdydz=\oiint_S u\dfrac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_\Omega\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}\right]dxdydz$，

其中 $\Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿外法向量的方向导数。

例 21 $u=u(x,y,z)$ 是闭域 Ω 上的调和函数，即满足方程：

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

(1)　若 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，求 $I=\oiint_{\partial\Omega}\left(u\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS$，

其中，$\vec{r}$ 是矢径，即 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|$，$\vec{n}$ 是 dS 的法线方向。

(2)　若 Ω 是任一不包含原点作为内点的闭域，求 $I=\oiint_{\partial\Omega}\left(u\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS$.

(3)　　若Ω是任一包含原点作为内点的闭域，求$I=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS$

(4)　　若Ω是任一包含$P_0(a,b,c)\in\Omega^0$点作为内点的闭域，求:

$$I=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS,$$

其中，$\vec{r}$是以P_0为起点的矢径,即 $\vec{r}=(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}$， $r=|\vec{r}|$，　$\vec{n}$是dS的法线方向。（　$I=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\dfrac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS=u\left(P_0(a,b,c)\right)$　）

提示∵ 设 $\vec{r}_0=\dfrac{1}{r}\vec{r}$，$\vec{n}_0=\dfrac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$，则有：

$$\cos(\vec{r},\vec{n})dS=(\vec{r}_0\cdot\vec{n}_0)dS=\vec{r}_0\cdot(\vec{n}_0dS)=\vec{r}_0\cdot d\vec{S}=\frac{1}{r}\vec{r}\cdot d\vec{S};$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}dS=(grad\,u\cdot\vec{n}_0)dS=\nabla u\cdot(\vec{n}_0dS)=\nabla u\cdot d\vec{S},$$