基础部分
第二课　微积分
第 8 章　数项级数

（一）级数的概念与性质
（二）正项级数的判敛问题
（三）任意项级数的判敛问题
（四）综合例题

级数内容提要

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，是数与函数的一种重要表示形式，也是研究函数的一种重要方法。级数问题的基础是极限理论。数项级数、幂级数、傅里叶级数是我们研究的三种基本级数。为了掌握好数项级数的有关内容，必须理解数项级数的有关概念，熟练掌握级数运算的记号，掌握并运用收敛级数的基本性质及常见的判别法（比较、比值、根式、莱布尼兹、绝对值），做到正确判断正项级数、交错级数及任意项级数的敛散性。

8.1 数项级数基本概念

8.1.1 定义与符号运算

定义 8.1：设 $\{u_n\}$ 是一个数列，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

为一个数项级数，简称级数，其中 u_n 称为数项级数的通项（或一般项）。

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 称为数项级数的前 n 项部分和。

级数的部分和记号 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 与级数一般项 u_n 的运算关系是

$$S_{n+1} = S_n + u_n，\ u_n = S_{n+1} - S_n$$

定义 8.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，极限值 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 称为此级数的和；当 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在时，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

根据级数收敛的定义，其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S\text{。}$$

例 8.1 几何级数(等比级数--尺度 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1} + \cdots$$

$$(a \neq 0,\ \ x \in R).$$

解：显然有，$S_n = \dfrac{a(1-x^n)}{1-x}$，$n = 1, 2, \cdots$.

当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-x^n)}{1-x} = \dfrac{a}{1-x}$，

该级数收敛，和为$\dfrac{a}{1-x}$

当$|x|\geq 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，该级数发散.

例 8.2 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛，其和为$\dfrac{1}{2}$。

解：首先 $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$，

级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

例 8.3 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和为 $\underline{\dfrac{1}{4}}$。

分析：求数项级数的和常用的方法有两种，一种是用部分和的定义，求出部分和及其极限；另一种是将数项级数看成是某一个函数项级数在一点取值时的情况，然后求函数项级数的和函数在此点的值。

解：因为

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)$$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \dfrac{1}{4}$，故原级数的和为 $\dfrac{1}{4}$。

例 8.4 数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{1}{2n^2}$的和为 $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$。

分析：例 8.3 中利用拆项求数项级数部分和，进一步直接求出级数的和，这种方法也可以处理一些比较复杂的级数问题。上述例题也可用这类方法。

解：由三角函数的差角公式可得到

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \arctan\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{m} \arctan\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}[\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)]$$
$$=\arctan(2m+1)-\arctan 1$$
$$=\arctan(2m+1)-\frac{\pi}{4}\,,$$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\frac{\pi}{4}$，故原级数的和为 $\frac{\pi}{4}$。以上第三个等号用到差角公式。

8.2.2 收敛级数的性质

性质 1：（级数收敛的必要条件）：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

证：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则由 $u_n=S_{n+1}-S_n$ 取极限得到 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1}-S_n)=S-S=0$。

注：项数列为无穷小量是级数收敛的必要条件，即当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必然发散。

值得注意的是，即使 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也不一定收敛，例如调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

性质 2（ 充要条件 ）：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$（ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$）存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$.

性质 3（ 运算性质 ）：

（1）数乘运算： 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，α 是任意实数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha u_n$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha u_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{。}$$

（2）加法运算： 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{。}$$

上述几条性质，一定要注意它们成立的条件，若条件不满足，可能会得到错误结果。

例如 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$，下述运算是错误的

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n}+(-1)^{n-1}]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\neq 0$$

性质 4（ 重组性质---更新性质 ）：

（1）收敛级数加括号后所生成的新级数仍收敛，且两个级数的和相同.

注意：此性质的逆命题并不成立，即一个级数加括号后所形成的级数收敛并不能保证原级数收敛；若合并级数相邻有限项后所得到的更新级数发散，则可推断原级数发散。级数的重组性质类似于有限个数的加法所满足的结合律。

（2）一个级数去掉、增添或改变有限项后，生成的新级数与原级数有相同的收敛性结论。

从极限的概念来理解，一个级数的收敛性，只依赖于某个足够大的下标 N 之后的无穷多项和是否存在（有极限），与级数的前面限项无关。

例 8.5 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于（ C ）。

（A）3；　（B）7；　（C）8；　（D）9。

[寓意] 本题练习级数的符号运算，以及收敛级数的运算法则，而级数的运算法则的实质是极限的运算法则。

解：（方法 1）

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n},$$

因此　$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=5-2=3$，

所以　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=5+3=8$。

（方法 2）　由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=6$。又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=2$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{2n}+(-1)^{n-1}a_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=6+2=8\ .$$

例 8.6 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性的结论是[　　]。

（A）收敛，（B）发散，（C）不定，（D）与 a_n 正负有关

解：$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})$，$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}a_k$，

由 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1}) = S\text{，}$$

考虑

$$S_n = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})$$

$$= -a_0 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + na_n$$

$$= -a_0 - S_{n-1}^* + na_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^* = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}^* = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_0 - S_n + na_n) = a_0 - S$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性。

8.2 正项级数

为了研究级数的判敛方法，我们先讨论一种特殊的数项级数，即正项级数。

定义 8.3 若 $u_n > 0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。

8.2.1 正项级数基本属性

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的基本属性是：部分和数列 $\{S_n\}$ 为单增数列。由此属性，构成下述几个正项级数判敛法的理论基础。

定理 8.1（正项级数收敛的充要条件） 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

例 8.8 讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的收敛性。

证：由 $\dfrac{1}{n^p}$ 的单调性与积分估值定理得到 $\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x^p}dx \le \dfrac{1}{n^p} \le \int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{x^p}dx$，

所以 $\int_2^{m+1} \dfrac{1}{x^p}dx = \sum\limits_{n=2}^{m}\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x^p}dx \le \sum\limits_{n=2}^{m} \dfrac{1}{n^p} \le \sum\limits_{n=2}^{m}\int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{x^p}dx = \int_1^{m} \dfrac{1}{x^p}dx$，

故当 $p > 1$时，部分和有界，级数收敛；而当 $p \le 1$时，部分和无界，级数发散。

标准级数 1：几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$，由于 $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$，所以当 $|q| < 1$时，几何级数收敛，

其和为 $\dfrac{1}{1-q}$；当 $|q| \ge 1$时，几何级数发散。

标准级数 2：$p-$级数 $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^p}$，当 $p > 1$时，级数收敛，当 $p \le 1$时，级数发散。特别当 $p = 1$

时，称$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}$为调和级数。

8.2.2 正项级数的判敛法

(1) 定理 8.3（直接比较判敛法）若存在$N>0$，使得当$n>N$时，有$0\le u_n\le v_n$，则

(1)　当级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

(2)　当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

证：只证 (1) 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$有界，即存在$N_1>N$与$M>0$，使

当$n>N$时$S_n<M$且$0\le u_n\le v_n$，因此$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}u_k\le S_n<M$，即$\{S_n^*\}$有界，所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

比较判敛法是正项级数的基本判敛法，利用此判敛法的关键就是要找敛散性已知的级数与所
研究的级数作比较。比较判敛法的一种常用形式就是下述比阶判敛法。

(2) 定理 8.4（比阶法）设$a_n\ge 0$，$b_n\ge 0$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$，则$S_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$有界，

(1) 当$A\ne 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$同为收敛或同为发散；

(2) 当$A=0$时，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛可推断$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

(3) 当$A=+\infty$，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散可推断$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

证：(1) 设 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.\ne 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，显然$A>0$，

则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当$n>N$时有$A-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon$，

特别取$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，则$\frac{A}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3A}{2}$，

于是有 $a_n < \frac{3A}{2} b_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3a}{2} b_n$ 收敛，由比较法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

其余留给读者练习证明。

推论：设 $u_n \geq 0$，且 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = \rho$，则

(1)　当 $0 \leq \rho < +\infty$，且 $p > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2)　当 $0 < \rho \leq +\infty$，且 $p \leq 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注：相当于将 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 进行比阶。即当 $p > 1$ 时，若 $u_n \geq 0$ 是 $\frac{1}{n^p}$ 高阶或同价无穷小量，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $p \leq 1$ 时，若 $u_n \geq 0$ 是 $\frac{1}{n^p}$ 低阶或同价无穷小量，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。也就是说，当 $u_n \geq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可以由无穷小量 $u_n \quad (n \to \infty)$ 的阶来判断。

例 8.7 设 $a_n > 0,\ p > 1$ 且 $\lim_{n\to\infty}(n^p(e^{\frac{1}{n}} - 1)a_n) = 1$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 p 的取值范围是 $\underline{(2, +\infty)}$。

解：$\lim_{n\to\infty}[n^p(e^{\frac{1}{n}} - 1)a_n] = \lim_{n\to\infty}[n^p \cdot \frac{a_n}{n}] = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = 1$，因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由比阶法，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$ 收敛，于是得到 $p > 2$。

注：比阶判敛法是讨论正项级数敛散性的常用方法，本题主要考查比阶判敛法及等价无穷小量等有关内容。

例 8.8 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加且有界，求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx]$ 收敛。

证：由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加有界，则 $f(x)$ 可积，且有 $f(n-1) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n)$，或

$-f(n) \leq -\int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq -f(n-1)$，

于是 $0 \leq f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n) - f(n-1)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx]$ 为正项级数。

再注意到 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(0)$，

且由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加且有界，所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，由此得到

极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}[f(n)-f(0)]$ 存在，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，

由正项级数比较判定准则，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n-1}^{n} f(x)dx]$ 收敛。

(3) 定理 8.4（比率判敛法） 设 $u_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则

（1）当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$；

（3）当 $\rho = 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断。

证：只证（1）。$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$，则 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使当 $n > N$ 时有

$\rho-\varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \rho+\varepsilon$，特别取 $\varepsilon = \dfrac{1-\rho}{2} > 0$，则 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1+\rho}{2} < 1$，

令 $q = \dfrac{1+\rho}{2} < 1$，于是有 $u_{N+1} < qu_N$，$u_{N+2} < q^2 u_N$，…，$u_{N+p} < q^p u_N$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^p u_N$ 收敛，由比较法，所以级数 $\sum\limits_{p=1}^{\infty} u_{N+p}$ 收敛。

再由重组性质，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

其余留给读者练习证明。

比率判敛法是正项级数最常用的判敛法，对于判断任意项级数的敛散性和求幂级数的收敛半径也十分方便。

(4) 定理 8.6（根值判敛法） 设 $u_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

（1）当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断。

与比值判敛法类似，根值判敛法也可以与绝对值判敛法结合在一起判断任意项级数的敛散性和求幂级数的收敛半径。

（5）**定理 8.5（积分判敛法）** 设 $f(n)\ge 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充分必要条件是存在 $N\ge 1$，使得广义积分 $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

典型例题是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，因为 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}$ 发散。

例 8.9 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的收敛性。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，因此该级数收敛。

注：若用比率法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2+(-1)^n}$ 不存在，因为 $n=2k$ 时上述极限为 $\frac{1}{6}$，$n=2k+1$ 时上述极限为 $\frac{3}{2}$，故不能得出收敛性结论。一般来说，由比率法可以判断收敛性的级数，用根值法一定可以给出同样结论，而反之未必。

例 8.10 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 的收敛性。

解：记 $u_n=\frac{n!}{n^n}$，用比率法。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1，$$
因此该级数收敛。

例 8.11 设 $u_n>0, v_n>0$，且 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$，证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

证：因为 $u_n>0, v_n>0$，且 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$，

所以 $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\le\frac{u_n}{v_n}$，

从而 $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\le\frac{u_n}{v_n}\le\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\le\cdots\le\frac{u_1}{v_1}$，

故 $0<u_n\le\frac{u_1}{v_1}v_n$。由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，根据直接比较判敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

8.3 任意项级数

8.3.1 交错级数

定义 8.4： 设 $u_n>0$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数。

对于交错级数，我们有下述常用的判敛法。

定理 8.7（莱布尼兹判敛法） 若 $u_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$ 满足：

（1）数列 $\{u_n\}$ 单减，即 $u_n\ge u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且

$$u_n-u_{n+1}\le R_n=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}u_k\right|\le u_n。$$

定理 8.7 中的两个条件也称为莱布尼兹条件。莱布尼兹判敛法不仅给出了交错级数的收敛性结论，而且还给出了用部分和近似级数和时的误差限，这是一般判敛法做不到的。

例 8.12 设数列 $\{a_n\}$ 非负单减，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

证： 因为数列 $\{a_n\}$ 非负（有下界）单减，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，

由极限的保序性，则 $A\ge 0$。

由于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，根据莱布尼兹判敛法，通项极限 $A\ne 0$，故 $A>0$。

再由极限的性质，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，有 $a_n>\frac{A}{2}>0$，

故当 $n\ge N$ 时，有 $0<\frac{1}{(1+a_n)^n}<\frac{1}{(1+\frac{A}{2})^n}$。

由于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{A}{2})^n}$ 收敛，由比较判敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

8.3.2 任意项级数

（1）绝对收敛与条件收敛

定义 8.5: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但级数

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 就是绝对收敛的，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 则是条件收敛。绝对收敛级数可以重排，即绝对收敛级数重排后所得级数的敛散性与和不变，这类似于有限个数加法的交换率。条件收敛的级数就没有这种性质。

（2）绝对值判敛法

定理 8.8（绝对值判敛法）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

证：由不等式 $0\le|u_n|-u_n\le 2|u_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|-u_n)$ 收敛。

而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|-\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|-u_n)$，由级数运算法则得到，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

注：除了定义，绝对值判敛法是判断任意项级数收敛性的最常用方法。

例 8.12 设 $f(x)$ 在 $|x|\le 1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，

且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

解 1：$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 在 0 与 x 之间。

$f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，因此存在 $M>0$ 使得

$|f''(\xi)|\le M$，于是 $|f(x)|\le\frac{1}{2}Mx^2$。

令 $x=\frac{1}{n}$，$\frac{M}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较法，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

解 2：用比率法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=2f'(0)=2C$$

（常数）。

例 8.13 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（ C ）

(A)绝对收敛；　（B）条件收敛；　（C）发散；　（D）敛散性与 a 取值有关。

解：利用级数运算法则，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}$ 收敛（绝对收敛），$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，因此原级数发散。

例 8.14 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的收敛性。

解 1：因为$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$，

所以$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$与$\frac{1}{n\sqrt{n}}$在$n\to\infty$时是等价无穷小量。

而 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，根据比阶判敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$收敛。

解 2：因为$0<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，所以 $0<\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n\sqrt{n}}$。

又 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，由比较判敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$收敛。

8.4 综合例题

例 8.15 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数为（D）。

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ （B）$\sum_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{2n})$ （D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解：记$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=u_1+u_2+u_2+u_3\cdots+u_{n-1}+u_n+u_n+u_{n+1}+\cdots=u_1+2\sum_{n=2}^{\infty}u_n=u_1+2S。$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛。

取$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则（B）（C）不成立，取$u_n=\frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$，则（A）不成立。

例 8.16 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性。

解：应对参数a分情况讨论。当$a\neq 0$时，记 $u_n=\left|\frac{a^n n!}{n^n}\right|$，则$u_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{|a|}{e},$$

根据比率法，当$|a|<e$时该级数绝对收敛，而当$|a|>e$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$，得知该级数发散。当$|a|=e$时，因为数列$(1+\frac{1}{n})^n$单调递增趋于$e$，所以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$，

即 $u_{n+1}>u_n$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，于是当$|a|=e$时，该级数发散。

当 $a=0$时，原级数显然收敛。

例 8.17 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则[D]。

(A) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$小于$1$。　　(B) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$小于等于$1$。

(C) 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在，其值小于$1$。　　(D) 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在，其值小于等于$1$。

解：本题主要考查正项级数的比率判敛法。由正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛并不能保证极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在，例如当取 $u_{2n}=\frac{1}{(2n)^2},u_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)^3}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=+\infty$，所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，故选项(A)，(B)错误。 利用 $u_n=\frac{1}{n^2}$时的级数可以排除掉选项(C)。根据比率判敛法，若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在，则当其值大于$1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。因此选项(D)正确。

例 8.19 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，且极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$绝对收敛。

证：因为极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，所以数列$\{b_n\}$有界，即存在$N>0$与$M>0$，使当$n>N$时有

$|b_n|\leq M$， 于是 $|a_n b_n|\leq M|a_n|$，又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，根据比

较判敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n b_n\right|$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$绝对收敛。

例 8.20 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，证明对任意的常数$\alpha>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$收敛。

证：令 $\tan x=t$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt$，

所以 $0<a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$，　因此 $0<\frac{a_n}{n^{\alpha}}<\frac{1}{(n+1)n^{\alpha}}<\frac{1}{n^{1+\alpha}}$。

而当$\alpha>0$时，p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$收敛，根据比较判敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$收敛。

例 8.21 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则[C]。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散。　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$发散。

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(\left|u_n\right|+\left|v_n\right|)$发散。　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$发散。

解：选项(A),(B)考查的是收敛级数的加法和乘法运算的反面，只要取$u_n=-\frac{1}{n},v_n=\frac{1}{n}$就可以说明选项(A)，(B)，(D) 错误。选项(C)考查了级数的收敛与绝对收敛之间的关系，也考查了正项级数收敛的充分必要条件。因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$和$\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n\right|$也都发散，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\left|u_n\right|+\left|v_n\right|)$发散。故选项(C)正确。

例 8.22 设$u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数 [　　]

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都收敛　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛

答案：(C)。$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$属于条件收敛的莱布尼茈级数。

例 8．23 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{b}{\sqrt{n}}\right)^2$（$b\neq 0$，常数）为[　　]。**答案**$(B)$

(A) 条件收敛。　　(B) 绝对收敛。

(C) 收敛性与 b 的取值有关。　　(D) 发散。

解：$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{b}{\sqrt{n}}\right)^2\right|$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot[2\sin^2\frac{b}{2\sqrt{n}}]^2=\frac{b^2}{4}\neq 0,$$

由正项级数的比阶判别法，该级数绝对收敛收敛。

例 8.24 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)+\frac{(-1)^n}{n}\right]$（$b>0$，常数）为[　　]。 答案$(D)$。

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 收敛性与 b 的取值有关　　(D) 发散

解：因为$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln(1+\frac{b}{n})=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{b}{n}=b$　　可知$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{b}{n})$发散，

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，所以由运算法则，$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)+\frac{(-1)^n}{n}\right]$发散。

例 8.25 已知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ [　　　　]。

答案(A)。

(A) 绝对收敛。 (B) 条件收敛 。(C) 收敛性与 b 的取值有关。(D) 发散。

解：答案(A)。级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，而 $\left|(-1)^n\frac{u_n}{n}\right|\leq\frac{1}{2}(u_n^2+\frac{1}{n^2})$，

由正项级数比较法推出该级数绝对收敛。