

## 基础部分

### 第一课 微积分

#### 第 2 章 函数的极限与连续函数

##### 2.1 函数的极限概念

###### 2.1.1 函数在无穷远处的极限

在掌握好数列极限的概念与方法的前提下,可以顺利地学好函数的极限,只需要注意在函数极限问题里,自变量的趋向应包括以下 6 种情况:

$$x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty.$$

掌握好函数极限的概念与方法,是进一步为学习函数连续性、导数等后续概念的重要基础。

**定义 2.1** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, +\infty)$  内有定义,  $\forall \varepsilon > 0$ , 若存在某个常数  $A$  与  $X > 0$ , 使当  $x > X$  时恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $y = f(x)$  当  $x$  趋于正无穷大时的极限为  $A$ , 或收敛于  $A$ 。记为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 。

若在上述的常数  $A = 0$ , 则称  $f(x)$  是当  $x$  趋于正无穷大时的无穷小量。若上述定义中的  $A$  不存在, 则称  $f(x)$  当  $x$  趋于正无穷大时的极限不存在, 或发散。

注: 上述定义的几何意义与数列极限类似。

**定义 2.2** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, +\infty)$  内有定义,  $\forall G > 0$ , 若存在某个常数  $A$  与  $X > 0$ , 使当  $x > X$  时, 恒有  $|f(x)| > G$ , 则称  $f(x)$  是当  $x$  趋于正无穷大时的无穷大量。

记为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ 。

当然, 还有有如下的两种情况:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (f(x) > G) \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (f(x) < -G)$$

类似上述两个定义, 可给出  $x \rightarrow -\infty$  时  $f(x)$  的极限与  $f(x)$  为无穷大量的定义。读者可练习给出下列  $x \rightarrow -\infty$  时的极限与无穷大量的定义描述:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**定义 2.3** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 若存在某个常数  $A$  与  $X > 0$ , 使当  $|x| > X$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $y = f(x)$  当  $x$  趋于无穷大时的极限为  $A$ , 或收敛于  $A$ 。记为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

若在上述的常数  $A = 0$ , 则称  $f(x)$  是当  $x$  趋于无穷大时的无穷小量。若上述定义中的  $A$  不存在, 则称  $f(x)$  当  $x$  趋于无穷大时的极限不存在, 或发散。应特别注意, 这里  $x$  以

双向方式趋于无穷大。

类似前面的定义, 还可以给出当  $x$  (双向) 趋于无穷大时,  $f(x)$  为无穷大量的三种描述, 即正无穷大量, 负无穷大量和 (双向) 无穷大量。请读者完成这些练习。

### 2.1.2 函数在一点处的极限

**定义 2.4** 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的去心邻域  $N^*(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$

内有定义, 若  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在某个常数  $A$  与  $\delta_0 > 0$  ( $\delta_0 < \delta$ ), 使当  $0 < |x - x_0| < \delta_0$  时,

恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $y = f(x)$  当  $x$  趋于  $x_0$  时的极限为  $A$ , 或收敛于  $A$ 。记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A。$$

若在上述的常数  $A = 0$ , 则称  $f(x)$  是当  $x$  趋于  $x_0$  时的无穷小量。若上述定义中的  $A$  不存在, 则称  $f(x)$  当  $x$  趋于  $x_0$  时的极限不存在, 或发散。

**定义 2.5** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内有定义, 若  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在

某个常数  $A$  与  $\delta_0 > 0$  ( $\delta_0 < \delta$ ), 使当  $0 < x - x_0 < \delta_0$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $f(x)$

当  $x$  趋于  $x_0$  时的右极限为  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A。$$

而当函数  $y = f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0)$  ( $\delta > 0$ ) 内有定义, 若  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在某个

常数  $A$  与  $\delta_0 > 0$  ( $\delta_0 < \delta$ ), 使当  $-\delta_0 < x - x_0 < 0$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $f(x)$

当  $x$  趋于  $x_0$  时的左极限为  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A。$$

特别, 上述三个极限)式中的  $A$  易为  $\infty$  或  $\pm\infty$  (即  $|f(x)|$  取值无限变大) 时, 分别称

$f(x)$  在相应趋向下的无穷大量或正、负无穷大量。记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty。$$

### 2.2 函数极限存在的条件

**定理 3.1** 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  (或  $\infty, \pm\infty$ ) 存在的充要条件是:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  (或  $\infty, \pm\infty$ )

与  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$  (或  $\infty, \pm\infty$ ) 都存在, 且  $A = B$  (或  $\infty, \pm\infty$ )。

**定理 2.2** 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  (或  $\infty, \pm\infty$ ) 存在的充要条件是:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  与

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = B$  都存在, 且  $A = B$ 。

## 2.3 极限存在的准则

### 2.3.1 单调有界准则

**定理 2.3** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, a + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内有定义且单调减有下界,

则右极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$  存在。而当函数  $y = f(x)$  在区间  $(a - \delta, a)$  ( $\delta > 0$ ) 内有定义且

单调增有上界时, 左极限  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  存在。

### 2.3.2 夹逼准则

**定理 2.4** 设函数  $y = f(x)$  与  $g(x), \phi(x)$  在区间  $(a - \delta, a + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内有定义且满

足  $\phi(x) < f(x) < g(x)$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  存在。

### 2.3.3 无穷小量与有阶函数的乘积的极限存在, 且仍为无穷小量。即

设  $f(x)$  在某种趋向下有界, 例如, 若存在某个常数  $M > 0$ ,

$\forall x \in (0, +\infty)$  都有  $|f(x)| \leq M$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 。

这可以作为极限存在的准则来应用。

## 2.4 两个标准极限

利用上述两个准则可以得到下述两个标准极限 (重要极限)

$$\text{标准极限 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.1)$$

$$\text{标准极限 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (2.2)$$

## 2.5 函数极限的性质

### 2.5.1 运算性质 (以下各条均适用于 $x \rightarrow \pm\infty, \infty$ 的情形)

(1) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $C$  为实常数, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = CA$ 。

(2) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = AB$ 。

(4) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $g(x) \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 。

(5) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $f(x) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ 。

利用上述运算性质可以计算或判断某些极限。为方便计算, 遇到无穷大量时, 应设法将无穷大量转化为无穷小量。上述运算性质的命题形式均为充分条件, 不满足前面条件时, 结

论不一定不成立。在考试中,极限的运算法则的运用错误是常见错误,应特别注意避免这类错误。

## 2.5.2 解析性质及复合极限定理

函数极限具有一些重要的解析性质,主要包括极限的保序性(保号性)与复合极限定理,掌握这些性质对处理极限以及后续的微分与积分内容会有较大帮助。下面给出这些性质均以  $x \rightarrow x_0$  的情形为例。

### 定理 2.5 极限的保序性(保号性)

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 则在  $x_0$  的附近(除去  $x_0$ ) 某区间内必然有  $f(x) > 0$ 。换言之,

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 则存在  $x_0$  的去心邻域  $N(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ ,

使当  $x \in N(x_0, \delta)$  时, 必然有  $f(x) > 0$ 。又若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$ , 则在  $x_0$  的附近(除

去  $x_0$ ) 某区间内必然有  $f(x) < 0$ 。

证 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 都存在某个常数  $A$  与  $\delta > 0$ ,

使当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \varepsilon$  或  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ 。

特别取  $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$ , 则  $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2}$ , 于是有  $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ 。

由此性质, 可以推论: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 且  $A > B$ , 则存在  $x_0$  的

某去心邻域  $N(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ , 使当  $x \in N(x_0, \delta)$  时,

有  $f(x) > g(x)$ 。并且, 进一步有如下推论:

极限保序性的逆(请读者自行练习证明)

若在  $x_0$  的附近(除去  $x_0$ ) 某区间内  $f(x) > 0$ , 且极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \geq 0$ ; 而当在  $x_0$  的附近(除去  $x_0$ ) 某区间内  $f(x) < 0$  时, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \leq 0$ 。

### 定理 2.6 有界性

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的附近(除去  $x_0$ ) 某区间内有界。

### 定理 2.7 复合极限定理

若  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ,  $u = u(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ ,  $x \neq x_0$  时,  $u \neq u_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = A \quad (2.3)$$

复合极限定理, 也适用于序列的极限运算。这一定理可以使得极限计算变的更加快捷方便。利用极限运算性质及复合极限定理可以得到极限的等价描述, 以及两个标准极限的变形表达式如下

$$\lim_{x \rightarrow (\cdot)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\cdot)} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \quad (2.6)$$

其中  $\alpha(x)$  为某种趋向  $x \rightarrow (\cdot)$  时的无穷小量, 且 (3.4) 与 (3.5) 中的  $\alpha(x) \neq 0$ 。

**例 求极限**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 。

**解:** 思路是有理化。首先, 由三角函数诱导公式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+n}) - n\pi \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin(\pi\sqrt{n^2+n}) - n\pi \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \end{aligned}$$

由复合极限定理, 只须计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \pi \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} \right) = \frac{\pi}{2},$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ 。

## 2.6 无穷小量比阶

**定义 2.6** 设  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  为某种趋向  $x \rightarrow (\cdot)$  时的无穷小量, 若满足

$$\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mu \quad (2.7)$$

则 (1) 当  $\mu \neq 0$  时, 称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  为同阶无穷小量 ( $x \rightarrow (\cdot)$ ), 特别  $\mu = 1$  时, 称  $\alpha(x)$

与  $\beta(x)$  为等价无穷小量 ( $x \rightarrow (\cdot)$ ), 可记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 。

(2) 当  $\mu = 0$  时, 称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  高阶的无穷小量 ( $x \rightarrow (\cdot)$ )。

(3) 当  $\mu = \infty$  时, 称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  低阶的无穷小量 ( $x \rightarrow (\cdot)$ )。

利用极限性质及运算, 可以得到下列几组常用等价无穷小量 ( $x \rightarrow 0$ )

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \quad (2.8)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (2.9)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0) \quad (2.10)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad (2.11)$$

$$(x+1)^4 - 1 \sim \lambda x \quad (\lambda \in R) \quad (2.12)$$

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3 \quad (2.13)$$

注：(1) 以上等价关系可在广义下应用，即等价关系中的  $x$  在应用中常换为满足  $\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \alpha(x) = 0$  的某个  $\alpha(x)$ 。

(2) 在极限运算中，可以用等价无穷小量进行替换，但必须注意，替换只能在因子位置上进行，因等价无穷小量是用因子乘积  $\alpha(x) \cdot \frac{1}{\beta(x)}$  定义的。非法替换是常见错误。

## 2.7 连续函数概念

连续函数的概念包括两个方面，首先是函数在一点处连续的概念，主要是用来刻画函数在一点及其附近的局部情况或微观性态；其次是函数在区间上连续的概念，主要是用来刻画函数在大范围内的全局情况或宏观性态。而所有这些概念都将是进一步研究函数性质的必备基础。

### 2.7.1 函数在一点连续的概念

定义 3.6 设函数  $y = f(x)$

(1) 在  $x_0$  的某邻域  $N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$  内有定义；

(2) 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  存在；

(3)  $A = f(x_0)$

则称函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续。以上三条见可称为函数在一点连续的三要素，缺一不可。又若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上或  $(a, b)$  内的任意一点处都连续，则称函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上或  $(a, b)$  内连续。

$y = f(x)$  在  $x_0$  处连续的直观意义是，当  $|\Delta x| = |x - x_0|$  任意小时，  
 $|\Delta f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$  也可以任意小。

对初等函数而论，连续性的重要结论是：一元初等函数在其定义域内部的任意区间内都是连续的。

函数在一点连续的定义可有以下两种等价性描述：

等价性描述 1：设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某邻域  $N(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$  内有定义，并且满足  $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$ ，其中  $\alpha(x)$  为无穷小量 ( $x \rightarrow x_0$ )。则称函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续。

等价性描述 2：设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某邻域  $N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$  内有定

义, 引入记号  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ , 若有  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , 则称函数

$y = f(x)$  在  $x_0$  处连续。

以上两种等价描述常常成为判断函数在一点处连续的手段。。

**定义 2.7** 若满足  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处为右连续, 而满足

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  时, 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处为左连续。

于是, 判断函数在一点处连续的方法还有以下定理

**定理 2.8** 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续的充要条件是:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  且

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 。

或描述为: 在一点处连续的充要条件是在该点处左连续, 且右连续。

**定义 2.8** 对函数  $y = f(x)$  不连续的点, 称之为  $f(x)$  的间断点。对间断点做如下分类:

当单边极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  都存在却不连续时, 称  $x_0$  为第一类间断点。其中满足

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  的间断点, 称之为可去型间断点。

可去型间断点的可能情况是:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$  或  $f(x_0)$  无定义,

而使得  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  的第一类间断点又常称为跳跃型间断点。

除去第一类间断点以外的所有间断点统称为第二类间断点。其中使得  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  的

点称为无穷间断点; 当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  正负交替取值或大小交替变化取值的点称为震荡间断点。

## 2.7.2 函数在一点处连续的性质

**性质 1** 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$ , 其中  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 。

**性质 2 (保号性)** 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续, 并且  $f(x_0) > 0$ , 则存在  $x_0$  的某邻域

$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ , 使得当  $x \in N(x_0, \delta)$  时, 恒有  $f(x) > 0$ 。

**性质 3 (有界性)** 若函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则存在常数  $M > 0$  与  $x_0$  的某邻域

$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ , 使得当  $x \in N(x_0, \delta)$  时, 恒有  $|f(x)| \leq M$ 。

即  $f(x)$  在某  $N(x_0, \delta)$  内有界。

注: 性质 1 可以使得对连续函数极限的计算大为简化 (变为简单的函数值计算); 而性质 2 称为连续函数的保序性或保号性, 在后续内容学习中, 这对函数的性态研究以及积分的保

序性有着重要作用。性质 3 也常用于对函数性态研究的根据。

### 2.7.3 连续函数的运算性质 复合函数与反函数的连续性

**定理 2.9** 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  处连续, 则函数  $af(x) \pm bg(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  在  $x_0$  处连续, 且当  $g(x_0) \neq 0$  时, 函数  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $x_0$  处亦连续。

### 定理 2.10 复合连续定理

若  $y = f(u)$  在  $u = u_0$  处连续,  $u = u(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $u(x_0) = u_0$ ,

则  $f(u(x))$  在  $x = x_0$  处连续。

**定理 2.11** 设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上严格单调且连续, 则  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上的反函数  $f^{-1}(y)$  在  $[\alpha, \beta]$  上严格单调连续。

### 2.8 闭区间上连续函数的性质

函数在区间上连续的概念及一系列性质, 是研究函数在大范围内的全局性态或宏观性态的重要手段, 也是后续学习内容的重要基础。

### 定理 2.12 有界性定理

若函数  $y = f(x)$  在有界闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 即存在  $M > 0$ , 使  $\forall x \in [a, b]$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ 。

**证:** 反证。假设这样的  $M > 0$  不存在, 则取  $x_n \in [a, b]$ , 使得  $f(x_n) > n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

显然  $x_n$  有界, 必有收敛之子列  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , 且  $f(x_{n_k}) > n_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),

又因为  $a \leq x_{n_k} \leq b$ , 由保序性知道  $x_0 \in [a, b]$ , 再有复合极限定理与  $f(x)$  的连续性, 必有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ , 于是  $f(x_{n_k})$  有界。这与  $f(x_{n_k}) > n_k$  相矛盾, 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界。

### 定理 2.13 最大最小值定理

设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有最大最小值。即存在  $x_M \in [a, b]$  与  $x_m \in [a, b]$  使得  $f(x_M) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  且  $f(x_m) = m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ 。

**注:** 若函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续且单调, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大最小值只能在区间端点取得。

### 定理 2.14 零点定理 (根的存在定理)

设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则(至少)存在  $x_0 \in (a, b)$



使得  $f(x_0) = 0$ 。

分析：几何意义是直观的。证明思路是采用程序化的方法求出  $x_0 \in (a, b)$ 。

证：不失一般性， $f(a) < 0, f(b) > 0$ ，记  $x_1 = \frac{a+b}{2} \in (a, b)$ ，若  $f(x_1) = 0$ ，则  $x_1 = x_0$

即为所求；若  $f(x_1) \neq 0$ ，不妨假设  $f(x_1)f(a) < 0$ ，再取  $a_1 = a, b_1 = x_1$ ，

$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \in (a_1, b_1)$ ，若  $f(x_2) = 0$ ，则  $x_2 = x_0$  即为所求；

若  $f(x_2) \neq 0$ ，不妨假设  $f(x_2)f(a_1) < 0$ ，再取  $a_2 = a_1, b_2 = x_2$ ，

$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \in (a_2, b_2)$ ，进一步考察是否有  $f(x_3) = 0$ ？……，

由归纳法，最终可得到  $[a, b]$  上的子区间序列  $\{[a_n, b_n] | n = 1, 2, \dots\} \subset [a, b]$ ，且满足

$f(a_n)f(b_n) < 0$ ，其中  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq a$ ，

子区间序列的长度为  $d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ ，并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ ，

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ，而序列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均为单调有界序列，因而都有极限，

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ ，由极限保序性，取  $x_0 = A \in (a, b)$ 。

另外有  $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ ，由  $f(x)$  在  $x_0$  处连续，应用符合极限定理得到

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \leq 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \geq 0$ ，

由实数比较公理得到  $f(x_0) = 0$ 。

注 1：零点定理可以扩充为：若有不同的两点  $x_1, x_2 \in [a, b] (x_1 < x_2)$  使得

$f(x_1)f(x_2) < 0$ ，则（至少）存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$  使得  $f(x_0) = 0$ 。

注 2：零点定理给出了在闭区间  $[a, b]$  上连续函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上至少有一个零点的充分条件。读者可以思考， $y = f(x)$  满足什么条件时，在  $[a, b]$  上至多有一个零点？又满足什么条件时，在  $[a, b]$  上恰有一个零点？

### 定理 3.15 介值定理（零点定理推论）

设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续，若  $f(b) \neq f(a)$ ，则对介于  $f(b)$  与  $f(a)$  之

间的任意实数  $A$  , 都存在  $x_0 \in (a, b)$  , 使得  $f(x_0) = A$ 。

**例 证明介值定理。**

**证：**思路是创造应用**零点定理**的条件。

令  $F(x) = f(x) - A$  , 则  $F(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续 , 只需证明  $F(x)$  至少有一个零点

$x_0 \in (a, b)$ 。不妨假设  $f(b) > f(a)$  , 则  $f(b) > A > f(a)$  , 因此

$$F(a) = f(a) - A < 0 , \text{ 且 } F(b) = f(b) - A > 0 ,$$

于是  $F(b) \cdot F(a) < 0$  , 由零点定理 ,  $F(x)$  至少有一个零点  $x_0 \in (a, b)$  , 所以

$$F(x_0) = f(x_0) - A = 0 , \text{ 即 } f(x_0) = A。$$

**例 2.1** 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 + 1}) =$  \_\_\_\_\_

(A)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  ; (B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ; (C)  $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$  ; (D) 不存在

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} , \text{ 因此该极限不存在, 因此选(D)。}$$

**例 2.2** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

**解：**错误做法举例

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} = 2 , \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} = 0 , \text{ 因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} \text{ 不存在。}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} \text{ 也不存在。}$$

由此得出结论原极限不存在。这一做法的错误在于没有正确使用极限的运算准则。极限运算准则均为充分条件，两个极限不存在的函数，其和的极限未必不存在。正确做法如下：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = 2 - 1 = 1$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1。$$

**例 2.3 求极限**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 。

**解：**思路是有理化。首先，由三角函数诱导公式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+n}) - n\pi \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin(\pi\sqrt{n^2+n}) - n\pi \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \end{aligned}$$

由复合极限定理，只须计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \pi \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} \right) = \frac{\pi}{2},$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ 。

**例 2.4 已知极限**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x-1} \right)^{x-1} = e^{-2}$ ，求常数  $a$ 。

**解：**已知极限为“ $1^\infty$ ”型，应考虑应用标准极限 2。将已知极限表达式凑成标准型，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x-1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1-a}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{1-a} \cdot (1-a)}$$

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1-a}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{1-a}} \right]^{1-a}$$

由  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1-a}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{1-a}} = e$ ，应用复合极限定理得到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x-1} \right)^{x-1} = e^{1-a} = e^{-2},$$

令  $e^{1-a} = e^{-2}$ , 即有  $1-a = -2, a = 3$ 。

例 2.5 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} \right)$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1} x^2 \left( e^{1-\cos \frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1} x^2 (1 - \cos \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1} x^2 \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} e^{-1}. \end{aligned}$$

例 2.6 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}} \right)$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \left( 3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \left( e^{\frac{1}{x(x+1)} \ln 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 3^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x(x+1)} \ln 3 = 1 \cdot 1 \cdot \ln 3. \end{aligned}$$

下列做法是错误的！第二个等号犯了极限运算法则运用错误，答案对实属巧合。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt[x]{3} - \sqrt[x+1]{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt[x]{3} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \sqrt[x+1]{3} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x-1} \ln 3} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x} \ln 3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 3}{x-1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{\ln 3}{x} \\ &= (\ln 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \ln 3 \end{aligned}$$

例 2.7 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解：该极限为“ $1^\infty$ ”型，应考虑应用标准极限(4.15)。将已知极限表达式凑成标准型。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x} \cdot \frac{1}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin x - x}{x}}, \text{ 注意到} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} &= e, \text{ 由复合极限定理, 只需求如下极限} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \cdot \frac{\sin x - x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{6} x^3 \right) = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

注：上述解法中用到了等价无穷小量(3.13)。

上述结论可用洛比达法则或泰勒公式证明。另外，本题亦可考虑极限  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\sin x}{x}}$ ，对指数部分直接用洛比达法则求极限。

例 2.8 求下列极限： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = -1$

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1.$$

注： $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$  含有无穷间断点  $x=1$ ，经过分解因式，消去因子  $x-1$  之后的函数在  $x=1$  处连续，极限计算变成了简单的函数值计算。

例 2.9 讨论下列函数  $f(x)$  的连续性，若有可去间断点，将函数修正为连续函数。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & x < 0 \end{cases}$$

解：这一分段函数各段表达式在给定的区间内均为初等函数， $f(x)$  有唯一的间断点  $x=0$ ，

$$\text{并且 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

因此  $x=0$  为  $f(x)$  的可去间断点 若改变  $f(x)$  在  $x=0$  处的定义为  $f(0) = \frac{1}{2}$  则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上处处连续。

例 2.10 (2004-04-01) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ ，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：本题属于已知极限求参数的问题。

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0,$$

由无穷小量比阶概念应有  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$ ，得  $a = 1$ 。原极限化为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) = 1 - b = 5, \text{ 得 } b = -4.$$

因此  $a = 1, b = -4$

注:(1) 已知  $\lim_{x \rightarrow \rightarrow (.)} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0 \text{ 或 } \infty$ , 则或同时有  $g(x) \rightarrow 0$  与  $f(x) \rightarrow 0$ , 或  $g(x)$

与  $f(x)$  都不为无穷小量。

(2) 若  $A = 0$ , 则由  $g(x) \rightarrow 0$  可推断  $f(x) \rightarrow 0$ , 若  $A = \infty$ , 则由  $f(x) \rightarrow 0$  可推断  $g(x) \rightarrow 0$ 。

例 2.11 考察函数  $y = e^{1 - \cos \frac{1}{x}}$  的连续性。

解: 这是一个复合函数,  $y = e^u$  处处连续, 而  $u = 1 - \cos \frac{1}{x}$  有第二类间断点  $x = 0$ , 于是

函数  $y = e^{1 - \cos \frac{1}{x}}$  除去点  $x = 0$  外处处连续 ( $x = 0$  为第二类间断点, 属于振荡形间断点。)

例 2.12 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\cos \frac{1}{n}} - e^{-1}}{\tan(n^{-k} \pi)} = a \neq 0$ , 则\_\_\_\_\_ (A)

(A)  $k = 2$  且  $a = \frac{e^{-1}}{2\pi}$ ; (B)  $k = -2$  且  $a = \frac{e^{-1}}{2\pi}$ ;

(C)  $k = 2$  且  $a = -\frac{e^{-1}}{2\pi}$ ; (D)  $k = -2$  且  $a = -\frac{e^{-1}}{2\pi}$ ;

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\cos \frac{1}{n}} - e^{-1}}{\tan(n^{-k} \pi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} (e^{1 - \cos \frac{1}{n}} - 1)}{\tan(n^{-k} \pi)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} \frac{1}{2n^2}}{n^{-k} \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} \pi}{n^{2-k} \pi} = a \neq 0,$$

则必有  $k = 2$ ,  $a = \frac{e^{-1}}{2\pi}$ , 答案为(A)。延伸: 可以是变限积分表示的无穷小量比阶问题。

例 2.13 设  $f(x)$  与  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有定义,  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有间断点,  $f(x)$

在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) \neq 0$ , 则\_\_\_\_\_

(A)  $f(\varphi(x))$  在  $(-\infty, +\infty)$  上必有间断点; (B)  $\varphi(f(x))$  在  $(-\infty, +\infty)$  上必有间断点;

(C)  $\varphi^2(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上必有间断点; (D)  $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上必有间断点.

解: 答案为(D)。取  $f(x) = x^2, \varphi(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ , 则(A)不对, (C)亦不对。

取  $f(x) = \sin x$ ,  $\phi(x) = \frac{1}{2-x}$ , 则  $\phi(f(x)) = \frac{1}{2-\sin x}$  无间断点, 因此(B)不对。

注: 从函数概念来考虑, 复合函数可将作为中间变量的函数的间断点修正为连续点, 由此可断定(A)不对。对(B),  $f(x)$  的值域未必包含  $\phi(x)$  的间断点。

例 2.14 设  $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( B )。

(A)可去间断点。(B)跳跃间断点。(C)无穷间断点。(D)震荡间断点。

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{2}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}{3 + 2e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$ , 因此答案为(B)。

例 2.17 设  $a, b \neq 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax + \sin bx)^{\cot x}$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax + \sin bx)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\cot x} \left(1 + \frac{\sin bx}{\cos ax}\right)^{\cot x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos ax - 1)^{\frac{1}{\cos ax - 1}(\cos ax - 1)\cot x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin bx}{\cos ax}\right)^{\frac{\cos ax}{\sin bx} \left(\frac{\sin bx}{\cos ax} \cot x\right)}$   
 $= e^0 \cdot e^b = e^b。$

例 2.15 设  $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}$ ,  $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ , 试补充定义  $f(1)$  使得  $f(x)$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$

上连续。

【解】由于  $x=1$  为间断点, 取变换  $y=1-x$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{\pi(1-x) \sin \pi x} = \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi y - \sin \pi y}{\pi y \sin \pi y} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi y - \sin \pi y}{\pi^2 y^2} = \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi - \pi \cos \pi y}{2\pi^2 y} \\ &= \frac{1}{\pi} + \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\pi \cdot \frac{1}{2} \pi^2 y^2}{2\pi^2 y} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

只需定义  $f(1) = \frac{1}{\pi}$ 。

例 2.16 证明介值定理。

证: 思路是创造应用零点定理的条件。

令  $F(x) = f(x) - A$ , 则  $F(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 只需证明  $F(x)$  至少有一个零点

$x_0 \in (a, b)$ 。不妨假设  $f(b) > f(a)$ ，则  $f(b) > A > f(a)$ ，因此

$$F(a) = f(a) - A < 0, \text{ 且 } F(b) = f(b) - A > 0,$$

于是  $F(b) \cdot F(a) < 0$ ，由零点定理， $F(x)$  至少有一个零点  $x_0 \in (a, b)$ ，所以

$$F(x_0) = f(x_0) - A = 0, \text{ 即 } f(x_0) = A。$$

**例 2.17** 证明：若函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续，且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  存在，则

$y = f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上有界。

**证：**由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  存在，则  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时有界，即存在  $M_1 > 0$  及某个

$X > 0$ ，使当  $x > X$  时有  $|f(x)| \leq M_1$ ，显然函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, X]$  上连续，因此

函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, X]$  上有界，即存在  $M_2 > 0$ ，使  $\forall x \in [a, X]$  都有  $|f(x)| \leq M_2$ 。

令  $M = \max\{M_1, M_2\}$ ，则  $\forall x \in [a, +\infty)$  必有  $|f(x)| \leq M$ ，这说明  $y = f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上有界。

**例 2.18** 证明：若函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，且  $a < f(x) < b$ ，则存在  $x_0 \in (a, b)$ ，使得  $f(x_0) = x_0$ 。（该命题称为连续函数的不动点定理）

**证：**该命题要证方程  $x = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有实根。引入辅助函数  $F(x) = x - f(x)$ ，

则只需证明函数  $F(x) = x - f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有零点，由  $F(a) = a - f(a) < 0$  及

$F(b) = b - f(b) > 0$ ，在区间  $[a, b]$  上应用零点定理，可知函数  $F(x) = x - f(x)$  在区间

$(a, b)$  内有零点。即存在  $x_0 \in (a, b)$  使得  $F(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$ 。

**例 2.19** 设  $a < b < c$ ，证明： $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$  仅在区间  $(a, c)$  内恰有两个实根。

**证：**首先， $x = a, b, c$  为三个无穷间断点， $f(x)$  定义域为

$(-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, c) \cup (c, +\infty)$ ，在各子区间内均为连续函数。

在  $(-\infty, a)$  内  $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} < 0$ ，因此无根。而在  $(c, +\infty)$  内，



$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} > 0, \text{ 亦无实根。}$$

$$\text{在 } (a,b) \text{ 内, } f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \text{ 为单调减函数 ( 三项均为单调减函数 ),}$$

最多有一个实根, 又因为  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  及  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ ,  $f(x)$  在  $(a,b)$  内必然变号, 由零点定理,  $f(x)$  在  $(a,b)$  内至少有一个实根, 于是  $f(x)$  在  $(a,b)$  内恰有一个实根。

$$\text{在 } (b,c) \text{ 内, } f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \text{ 亦为单调减函数 ( 三项均为单调减函数 ),}$$

最多有一个实根, 又因为  $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$  及  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$ , 故  $f(x)$  在  $(b,c)$  内必然变号, 再次由零点定理,  $f(x)$  在  $(b,c)$  内至少有一个实根, 于是  $f(x)$  在  $(b,c)$  内恰有一个实根。

$$\text{综合上述分析, } f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \text{ 仅在区间 } (a,c) \text{ 内恰有两个实根。}$$

**例 2.20** 设函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  存在, 若  $y = f(x)$  在

$(-\infty, +\infty)$  内可取到正值, 证明函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上必有正的最大值。

**证:** 由于  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可取到正值, 则至少有一点  $x_1 \in (-\infty, +\infty)$  使  $f(x_1) > 0$ , 又因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则对  $\varepsilon = f(x_1) > 0$ ,  $\exists X > |x_1| \geq 0$ , 使当  $|x| > X$  时,  $|f(x)| < f(x_1)$ . 另一方面当  $x \in [-X, X]$ , 由于  $f(x)$  连续, 必有  $x_m \in [-X, X]$ , 使  $f(x_m)$  为  $[-X, X]$  上的最大值, 且  $x_1 \in [-X, X]$ , 所以  $f(x_m) \geq f(x_1) > 0$ 。

**例 2.21** 设  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且满足  $f(0) = f(2a) \neq f(a)$ , 试证明存在  $x_0 \in (0, a)$ ,

$$\text{使得 } f(x_0) = f(x_0 + a)。$$

**证:** 考虑辅助函数  $F(x) = f(x) - f(x+a)$  在  $[0, a]$  上连续, 并且

$$F(0) = f(0) - f(a) \neq 0, F(a) = f(a) - f(2a) \neq 0,$$

$$F(0) + F(a) = f(0) - f(2a) = 0 \text{ 因此必有 } F(a) = -F(0) \text{ 由连续函数的零点定理,}$$

$$\text{存在 } x_0 \in (0, a), \text{ 使得 } F(x_0) = 0, \text{ 即 } f(x_0) = f(x_0 + a)。$$

**方法点评:** 移项取辅助函数, 讨论零点问题, 增减性问题或最大最小值问题, 是证明等式与不等式的常用方法。

**例 2.22** 方程  $1 - e^{-2x} = x$  在  $(0, +\infty)$  内实根的个数为 ( )。

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

解: 令  $f(x) = 1 - e^{-2x} - x$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} > 0$ .

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , 由极限的保序性, 存在  $x_1 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ , 使得  $f(x_1) < 0$ , 因此存在  $x_2 \in (\frac{1}{2}, x_1)$ , 使得  $f(x_2) = 0$ .

另外,  $f'(x) = 2e^{-2x} - 1$ ,  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{e} - 1 < 0$ ,  $f''(x) = -4e^{-2x} < 0$ , 所以当  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $f'(x) < f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{e} - 1 < 0$ ,  $f(x)$  单调减少, 于是  $x_2$  是  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  内的唯一实根。

当  $x \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $f'(x) > 1 > 0$ ,  $f(x)$  单调增加,  $f(x) > f(0) = 0$ ,  $f(x)$  无实根。

综合上述分析, 于是  $x_2$  是  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内的唯一实根。

例 2.23 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义, 在  $x=1$  处连续, 并且满足

$f(x) = f(\sqrt{x})$ , 试证  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上恒为常数。

【解】 由归纳法可有  $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{\sqrt{x}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}})$ ,

对  $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$ , 令  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ , 由复合极限定理得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1) = C。$$