基础部分

第一课　微积分

第 3 章　导数概念、性质与计算

3.1　导数概念

导数定义与概念是一元函数微分学的核心内容，对它的背景与概念，应从极限的角度去认识，并且应把导数的定义看作一种标准极限模式。

由导数概念本身，可以得到一系列重要性质，而这些性质是研究函数性态的重要依据与工具。在计算方面，应训练准确快速的导数计算能力。在学习中要掌握好基本初等函数的导数公式，导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，以及反函数、隐函数和由参数方程确定的函数的求导公式及要点。

3．1．1 导数定义及其变形形式

定义 3.1　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

导数 $f'(x_0)$ 的几何意义:切线斜率。

等价性描述：$\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$,

且 $A = f'(x_0)$。其中 $\alpha(\Delta x)$ 是 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量。　进一步可改写为

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

或　$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)$$

其中 $\beta(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ 为 $\Delta x \to 0$ 时的高阶无穷小量。

导数定义的描述，还可以扩展理解为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\alpha(\Delta x))-f(x_0)}{\alpha(\Delta x)}$$

定义 3.2　如果

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极值为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$；如果

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$。

显然由极限存在的充要条件，$f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数都存在，且相等 $f'_-(b)=f'_+(a)$。

当我们说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导时，是指 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都可导，并且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 均存在。

例 3.1

$$\lim_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=\_\_\_\_。$$

【解】令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

原极限 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$

$$=[\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)]'|_{t=0}=2。$$

例 3.2　若 $f'(a)=k$ 存在，则

$$\lim_{h\to+\infty} h\left(f(a-\frac{1}{h}) - f(a) \right) = \text{（ ）。}$$

（A）$-k$。 （B）k。 （C）0。 （D）不存在。

【解】 $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left(f(a-\frac{1}{h}) - f(a) \right)$

$$= -\lim_{h\to+\infty} \frac{f(a-\frac{1}{h}) - f(a)}{-\frac{1}{h}} = -\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

$$= -f'_-(a) = -f'(a) = -k.$$

上述第最后用到了导数存在的充要条件：左右导数存在且相等，因此应选（A）。

例 3.3 设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}(e^{\sin x}-1), & x\le 0 \end{cases}$，

讨论 $f(x)$ 的可微性，若可微，求 $f'(x)$ 并讨论其连续性。

【解】 首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。再由初等函数可导性的结论，只须讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性，为此考虑极限

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{\pi}{2} \text{存在，}$$

$$f'_-(0) = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = \frac{\pi}{2} = f'_+(0)$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，结论为：

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可微。

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{x^{3/2}}{2(x+1)}, & x>0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\\ \dfrac{\pi\cos x}{2}e^{\sin x}, & x<0\end{cases},$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$，于是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。结论为：

$f'(x)$ 处处连续。

例 3.4 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为（　）。

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$。　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$。

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h^3)$。(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$。

【解】答案应为(B)，因为(B)的极限存在等价于极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{1-e^h}\frac{1-e^h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}$$

存在，而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-e^h}{h}=\lim\dfrac{-h}{h}=-1$ 又存在，故极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$ 存在，若记 $\alpha(h)=1-e^h$，则 $\alpha(h)$ 趋于零的方式是任意的。可知 $f'(0)$ 存在，并且有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}=f'(0)$。

(A)不对，是因为 $h\to 0$ 时，$h^2\to 0^+$，不符合导数定义。考虑(C)，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h^3)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}f(h^3)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}f(h^3)\cdot 0$$ 存在，不能保证

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^3}f(h^3)$ 的存在，因此 (C)亦不对。至于选项(D)，极限表达式中缺少 $f(0)$，由极限运算法则，考虑

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[(f(2h)-f(0))-(f(h)-f(0))]$$

的存在不能保证 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)}{h}$ 或 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$ 的存在性，所以(D)亦不对。

例 3.5 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2 g(x) & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有（ D ）。

(A) 极限不存在。 (B)极限存在，但不连续。

(C) 连续，但不可导。(D) 可导。

【解】首先考查 $x=0$ 处的左右极限。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2 g(x)=0$$ (因为 $g(x)$ 有界)

因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 再 考 查 $x=0$ 处的左右导数是否存在。

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-} xg(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2x^{3/2}}=0$$

因此 $f_+'(0)$ 与 $f_-'(0)$ 均存在，且相等。

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$，

答案为(D)。

3．1．2 由函数在一点可导决定的函数局部性质

性质 1 当 $f(x)$ 在 x_0 处可导时，$f(x)$ 必然存在 x_0 处连续。但必须注意到：$f(x)$ 在 x_0 处连续时，却不一定在 x_0 处可导。

性质 2 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$，对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)<f(0)$。

证：由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$，则由极限保序性可推断存在 $\delta>0$，使当 $x\in(-\delta,0)$ 或 $x\in(0,\delta)$ 时，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,$$

即 $f(x)-f(0)$ 与 x 应保持同号，因此对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$，对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)<f(0)$。

注：只由一点处的导数正负号，不能决定函数的增减性。函数的增减性属于区间上或全局性质。

例3.6 设 $f'(0)$ 存在，$\left|f(0)\right|<1$，若

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}=e,$$ 则 $f'(0)$ =（ ）。

(A) 0。 (B) 1。 (C) $\sqrt{2}$。 (D) $\sqrt{e}$。

[解] 答案：C。由 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

可以知道当 $x\to0$ 时，有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}=1$$

因为$\left|f(0)\right|<1$，则必有$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2}=1$，

(不可用洛必达法则！)

又因为 $f'(0)$ 存在，所以

$$[f'(0)]^2=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2,$$

得到 $f'(0)=\sqrt{2}$。

例 3.7　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点某邻域内可导，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0, f'(0)=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$。

解：所求极限为“1^{∞}”型，设法利用标准极限，并与导数 $f'(0)=2$ 相联系。

$$\lim_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1-2f(x))^{-\frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{-2f(x)}{\sin x}}$$

由复合极限定理，只须考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2f(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

由 $f(0)=0, f'(0)=2$存在，故上述极限可利用极限的乘法运算求得，即有

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2f(x)}{\sin x}=-2[\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}]\cdot[\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}]$$

$$=-2f'(0)=-4$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}=e^{-4}$。

注：利用导数定义求某些极限是一类重要题型，应熟悉导数定义的极限构造形式，并注意利用复合极限定理与已知重要极限的结论。

3.2　微分概念与相对变化率

3.2.1 微分概念

由导数的等价性描述，我们已经知道可导函数 $f(x)$ 在 x_0 处的增量 $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

其中 $\alpha(\Delta x)$ 为 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量。若记 $\beta(\Delta x)=\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$，则 $\beta(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小量。于是又可记为

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\beta(\Delta x)$$

定义 3.3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义。若存在常数 A，使得对函数增量 Δy 可以表为　$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，

其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 是 $\Delta x\to 0$ 时的高阶无穷小量，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，记为 $dy\big|_{x_0}=A\Delta x=df(x_0)$。函数的微分通常记为 $df=dy=y'dx=f'(x)dx$

3.2.2 相对变化率

定义 3.4 设 $y=f(x)$ 为可导函数，称极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{x}{y}f'(x)$$

为 y 对 x 的相对变化率。

经济模型中定义需求函数 $Q=f(P)$，其中 P 为单位商品的价格。需求对价格的相对变化率为 $E_d=\frac{p}{Q}f'(P)$，作为价格对需求反弹的一种度量，取相对变化率的绝对值定义为弹性（需求对价格）$E_d=\left|\frac{p}{Q}f'(P)\right|$。收益函数定义为 $R=PQ=Pf(P)$。

3.3　初等函数的导数与微分公式

导数与微分四则运算规则

如果 $f(x),g(x)$ 在点 x 处都有导数，则其和、差、积、商(分母不为零时)在点 x 处均有导数，且可微。

$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\mathrm{d}(f(x)\pm g(x))=\mathrm{d}f(x)\pm \mathrm{d}g(x)$；

$\mathrm{d}(f(x)g(x))=f(x)\mathrm{d}\,g(\mathrm{x})+g(x)\mathrm{d}\,f(\mathrm{x})$，

$\mathrm{d}(cf(x))=c\mathrm{d}\,f(\mathrm{x})$　（c 为常数）；

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\mathrm{d}\,f(\mathrm{x})-f(x)\mathrm{d}\,g(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(x)+g(x)+h(x)]' = f'(x)+g'(x)+h('x)$$

$$[f(x)g(x)h(x)]'$$

$$= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

例 3.9 设 $y = y(x)$ 在任意点 $x \in (-\infty,+\infty)$ 满足

$\Delta y = \dfrac{y}{1+x^2}\Delta x + o(\Delta x)$，若 $y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$，则

$y(\sqrt{3}) = \underline{\pi e^{\frac{\pi}{3}}}$。

解：由已知等式对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$ 成立，则有 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$y' = \dfrac{y}{1+x^2}$，$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x^2}$，积分后得到

$\ln y = \arctan x + \ln C$，又 $y = Ce^{\arctan x}$，

由 $y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$，于是 $C = \pi$。于是

$y = \pi e^{\arctan x}$，$y(\sqrt{3}) = \pi e^{\frac{\pi}{3}}$。

例 3.9（2004-2-16）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x) = x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$，其中 k 为常数。

（1）　写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式；

（2）　问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

解：(1) 当 $-2 \le x < 0$，即 $0 \le x+2 < 2$ 时，

$$f(x)=kf(x+2)$$

$$=k(x+2)\left[(x+2)^2-4\right]=kx(x+2)(x+4)$$

（2）由题设知 $f(0)=0.$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(x^2-4\right)}{x}=-4,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k$$

令 $f'_{-}(0)=f'_{+}(0)$，得。即 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

3．4 高阶导数计算

如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'(x)$ 仍有导数 $[f'(x)]'$，则称 $[f'(x)]'$ 为 $y=f(x)$ 的二阶导数，记为 $y'', f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$。

一般把 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记为 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^ny}{dx^n}$ 或 $\dfrac{d^nf}{dx^n}$。

n 阶导数定义为

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

函数的二阶及二阶以上的各阶导数统称高阶导数。

根据高阶导数的定义，欲求高阶导数，只需按导数的基本公式与运算法则逐阶进行计算。

例 3.10　求 $y=e^{\lambda x}$(λ 为常数)的各阶导数。

解：$y'=\lambda e^{\lambda x}$，　$y''=\lambda^2 e^{\lambda x},\cdots,$

$y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$。

例 3.11　求 $y=\sin x$ 的各阶导数。

解：$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

… … … … …

$$y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})。$$

当对两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 乘积进行高阶导数运算时，常用到下面定理(假设 $f(x)$，$g(x)$ 均有 n 阶导数)，称为莱布尼茨公式：

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$，并规定

$f^{(0)}(x)=f(x)$，$g^{(0)}(x)=g(x)$。

例 3.12　$y=x^2\sin x$ 的 100 阶导数是______.

解：由莱布尼茨公式，注意到 x^2 的 $n\geq 3$ 阶导数均为零，则有

$$y^{(100)}=x^2(\sin x)^{(100)}+100(x^2)'(\sin x)^{(99)}$$
$$+\frac{100\times 99}{2!}(x^2)''(\sin x)^{(98)}$$

$$=x^2\sin\left(x+\frac{100\pi}{2}\right)+200x\sin\left(x+\frac{99\pi}{2}\right)$$
$$+100\times 99\sin\left(x+\frac{98\pi}{2}\right)$$

$$=x^2\sin x-200x\cos x-9900\sin x。$$

例 3.13 求 $y=\dfrac{1}{x^2-a^2}$ 的 n 阶导数。

解：

$$y^{(n)}=\left[\frac{1}{x^2-a^2}\right]^{(n)}=\left[\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right]^{(n)}$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}\right]$$
$$=(-1)^n\frac{n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

例 3.14　$f(x)=\ln(2-3x)$ 的 10 阶导数是（　）。

(A) $\dfrac{-3^{10}\cdot 10!}{(2-3x)^{10}}$；(B) $\dfrac{3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$；

(C) $\dfrac{3^{10}\cdot 10!}{(2-3x)^{10}}$；(D) $\dfrac{-3^{10}\cdot 9!}{(2-3x)^{10}}$。

解：答案为(D)。只须注意到(-1)的次数（19 次)、阶乘的结果几 3 的方幂即可。

3.5 复合函数求导法则与微分法

定理 3.2 如果$u=\varphi(x)$在点 x 处有导数$\dfrac{du}{dx}=\varphi'(x); y=f(u)$在对应点$u(u=\varphi(x))$处也有导数$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点 x 处也有导数，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \text{或} \{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

例3.15 求$y=a^{\arctan\frac{1}{x}}$与$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的导数。

解：$(a^{\arctan\frac{1}{x}})'=a^{\arctan\frac{1}{x}}\ln a\dfrac{1}{1+x^{-2}}(-x^{-2})$

$$=-\frac{\ln a}{1+x^2}a^{\arctan\frac{1}{x}}$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

例 3.16 求函数 $y = x^{\sin x}(x > 0)$ 的导数。

解：（方法 1） 这类函数叫做幂指函数。首先两边取对数，得隐函数 $\ln y = \sin x \ln x$。

再由隐函数求导法得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x},$$

从而 $y' = x^{\sin x}[\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}]$。

这种先取对数再求导的方法叫做取对数求导法。除适用于幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 外，对含有多个因式相乘除或带乘方、开方的函数也适用。

（方法 2） 将幂指函数改写为 $y = x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$ 后，再用复合函数求导法则及乘法公式

例 3.17（2004-4-02）设

$$y = \arctan e^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}},$$

则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \underline{\dfrac{e-1}{e^2+1}}$。

解：将函数表达式改写为

$$y=\arctan e^{x}-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$$，则

$$y'=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1},$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{e}{1+e^{2}}-1+\frac{e^{2}}{e^{2}+1}=\frac{e-1}{e^{2}+1}。$$

在复合函数求导计算时，需要引入中间变量，把函数分解成一串已知导数的函数，再用复合函数求导法则，最后要把引入的中间变量用自变量的函数替代。当熟练地掌握了复合函数的分解和求导法则后，可以不引入中间变量记号，只要作到心中有数，分解一层，求导一次，直到最终自变量为止。

复合函数的微分法则(一阶微分形式不变性)。

设 $y=f(u)$ 可微，当 u 为自变量时，$y=f(u)$ 的微分 $dy=f'(u)\mathrm{d}u$。

当 u 为中间变量，u 是变量 x 的可微函数 $u=\varphi(x)$ 时，则 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分

$\mathrm{d}y=\{f[\varphi(x)]\}'\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u$ 可见，无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分形式不变。

3.5 隐函数求导法与微分法

若 $y=y(x)$ 由一个隐函数方程 $F(x,y)=0$ 确定，则可视为 $F(x,y(x))\equiv 0$，直接利用复合函数求导法则进行求导数运算，解出 y'_x 即可。

下面举例说明求隐函数的二阶导数的方法。

例 3.18 设 $x^{2}+xy+y^{2}=4$，求 y''。

解：设想把 $x^{2}+xy+y^{2}=4$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 代入方程，则得恒等式 $x^{2}+xy(x)+y^{2}(x)=4$

方程两边关于 x 求导得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

解得 $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$。

两边关于 x 再次求导得

$$2 + y' + y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0,$$

解出 $y'' = -\dfrac{2+2y'+2(y')^2}{x+2y}$

将 y' 的表达式代入，并整理得

$$y'' = -\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3} = \frac{-24}{(x+2y)^3}。$$

例 3.19 设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + \ln y = 1$ 确定，求曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 1$ 处的法线方程。

解：由已知方程令 $x = 1$，则有 $y + \ln y = 1$，显然有 $y = 1$。再由已知方程两边分别关于 x 求导数

$$xy'_x + y + \frac{1}{y}y'_x = 0,$$

令 $x = 1, y = 1$，由此可得到 $2y'_x\big|_{x=1} + 1 = 0$

因此 $y'_x\Big|_{x=1} = -\dfrac{1}{2}$，所以 $y = y(x)$ 在 $(1,1)$ 处法线斜率 $k = 2$。法线方程为

$$y - 1 = 2(x-1),$$

或 $y = 2x - 1$。

3.6 反函数与参数方程的求导法则

定理 3.3 （反函数求导法则） 若 $x=\varphi(y)$ 在某区间内单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}。$$

注：这里的反函数没有改变原来函数 $y=f(x)$ 的变量记号。

例 3.20 设 $f(x)$ 为单调函数，$g(x)$ 为其反函数，且 $f(1)=2,\ f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$f''(1)=1$，

(1) 求 $g''(2)$；(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$。

[解] (1)请注意，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数的条件中，已经改变了变量记号，为利用反函数导数公式，应将 $g(x)$ 易为 $g(y)$，其中 $y=f(x)$。

由反函数导数公式可得到 $f'(x)g'(y)=1$

两边关于 x 再次求导，$f''(x)g'(y)+f'(x)g''(y)y'_x=0$， 或

$$f''(x)g'(y)+[f'(x)]^2g''(y)=0$$

令 $x=1$，应有 $y=2$。注意到

$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=-\sqrt{3}$，因此得到

$g''(2)=3\sqrt{3}$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}=-\frac{1}{2}f'(1)=\frac{\sqrt{3}}{6}$。注：上述(2)是用到了导数定义。

定理 2.4 （参数方程确定的函数的求导法则） 若 $x = x(t), y = y(t), t \in T$ 都可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$，则由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T$$

所确定的函数也可导，且 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$。

应特别注意：$\dfrac{d^2 y}{dx^2} \neq \dfrac{y''(t)}{x''(t)}$，正确公式为：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3},$$

例 3.21　求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$

在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

解：由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (t \neq 2k\pi)$$

所以摆线在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

摆线上对应于 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点是 $\left(\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a,a\right)$，

故所求的切线方程为 $y-a=x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a$，

即 $x-y+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a=0$。

例 3.22　设 $x=a\cos t,y=b\sin t$，求 y''_x。

解：

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

$$y''_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(-\frac{b}{a}\cot t)'}{(a\cos t)'}$$

$$=\frac{\frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}$$

例 3.23 设 $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$，求 $f^{(10)}(-1)$.

解：为方便计算，先对 $f(x)$ 做予处理如下：

$$f(x)=\frac{x-1}{x+3}=\frac{x+3-4}{x+3}=1-\frac{4}{x+3},$$

$$f^{(10)}(x)=\frac{4\cdot(-1)^{11}\cdot 9!}{(x+3)^{11}}\quad f^{(10)}(-5)=\frac{4\cdot 9!}{2^{11}}=\frac{9!}{2^9}$$

例 3.24 设 $\delta>0$，$f(x)$在$[-\delta,\delta]$上有定义，$f(0)=1$,且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}=0,$$

（1） 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot f(x)-\sin x}{e^{x^2}-1}$存在，并求此极限值。

（2） 证明函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可微，并求 $f'(0)$。

［解］（1） （方法 1）首先

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot f(x)-\sin x}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}。$$

由已知：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x+\sin x\cdot f(x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot f(x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}+1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{x}{\sin x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1+1-\frac{x}{\sin x}}{x}=0$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2-2x} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{\sin x}1}{x}$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} + 0 = 0$$

运用极限运算法则，可推断极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$存在，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$。

错误做法：

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x\cdot f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 0,$$

因此$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot f(x)-\sin x}{e^{x^2}-1} = 0$。

（方法 2） 应用泰勒公式则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x-\frac{1}{2}\cdot x^2+o(x^2)+\sin x\cdot f(x)}{x^2}$$（2）由导数定义，

极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}$$存在，

于是 $f(x)$在 $x=0$ 处可微，并且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}。$$

例 3.25 设 $y=y(x)$是二阶常微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$

满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$

的特解，则当 $x\to 0$ 时函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（ ）。

(A) 不存在。　　(B)等于 1。

(B)(C) 等于 2。　　(D) 等于 3。

[解] $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{1}=2。$$

选(C)。