基础部分

第一课　微积分

第 4 章　微分学基本定理及应用

4.1　引言

微分学基本定理的首要背景是研究可导函数 $y = f(x)$ 在某点 x_0 处取得极值的问题。函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值(应该说是局部极值——微观性态）的基本事实是在 $x = x_0$ 处的函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 在 x_0 附近(或者说两侧)为定号，即恒为正或恒为负。

以在 x_0 处取得极大值情况来分析 $y = f(x)$ 在 x_0 附近(某 $N(x_0, \delta)$ 邻域)的微观性态如下：

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，在 x_0 处取得极大值，即在 $N(x_0, \delta)$ 内的任意 x 处应有 $f(x) \le f(x_0)$，由此可知 $\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0$，即在 $N(x_0, \delta)$ 内偏离 x_0 时，函数 $f(x)$ 取值会变小，于是可知：

若 $x > x_0$，$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$。

由极限的保序性便得到

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0, \quad f'_+(x_0) \le 0。$$

当 $x < x_0$，则 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$。

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0, \quad f'_-(x_0) \ge 0,$$

于是我们有 $f'(x_0)\ge 0$ 并且 $f'(x_0)\le 0$。由此断定 $f'(x_0)=0$，这便是费马定理的结论。

由费马定理可以直接导出导数零点定理，并且可以导出其余几个微分学基本定理。

4.2 微分中值定理

定理 4.1　费马定理(Fermat 定理，可导函数取得极值的必要条件)

设 $f(x)$ 满足：1° 在某邻域 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，并且 $\forall x\in N(x_0,\delta)$ 有 $f(x)\le f(x_0)$（或≥ $f(x_0)$）；2° 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$。

例 4.1　证明导数零点定理

导数零点定理　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$。则必 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$（在 x_0 处有水平切线）。

思路：$f'(x)$ 在 a,b 两点异号，若 $f'_+(a)<0$，由局部增减性，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处减少，所以 $x=a$ 不是 $f(x)$ 的最小值点：而 $f'_-(b)>0$, $f(x)$ 在 $x=b$ 处增加，则 $x=b$ 亦不是最小值点。因此可导函数 $f(x)$ 必有最小值点 $x_0\in(a,b)$，再由费马定理，即有 $f'(x_0)=0$。

证：设 $f'_+(a)<0$ 且 $f'_-(b)>0$（另一情况请读者完成证明），即有

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

按极限定义，$\forall\varepsilon_1>0$，$\exists\delta_1>0$，使当 $0<x-a<\delta_1$ 时

有

$$f'_+(a)-\varepsilon_1<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'_+(a)+\varepsilon_1。$$

取$\varepsilon_1=-\frac{1}{2}f'_+(a)>0$，则有

$$f(x)-f(a)<\frac{1}{2}f'_+(a)(x-a)<0，$$

即 $f(x)<f(a)$，因此 $f(a)$不是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值。

另外又有 $f'_-(b)>0$，则$\forall\varepsilon_2>0$。$\exists\delta_2>0$，使当 $0<b-x<\delta_2$时必有

$$f'_-(b)-\varepsilon_2<\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<f'_-(b)+\varepsilon_2。$$

特别取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}f'_-(b)>0$，则有

$$f(x)-f(b)<\frac{3}{2}f'_-(b)(x-b)<0$$

即 $f(x)<f(b)$。因此 $f(b)$亦不是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值。

因为 $f(x)$在$[a,b]$上可导，则必连续，由最大最小值定理，特别必有，使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，而且 $x_0\neq a, x_0\neq b$，即存在 $x_0\in(a,b)$，由费马定理，必有 $f'(x_0)=0$。

定理 4.2　罗尔定理(Rolle)　设函数 $y=f(x)$满足：$1°$　在$[a,b]$上连续；

2° (a,b)内可导；

3° $f(a)=f(b)$。

则$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$（即在$x=\xi$处有水平切线)。

【证】 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则必在上取得最大最小值，因为$f(a)=f(b)$，若 $f(x)$的最大最小值在$[a,b]$端点取得，则$f(x)\equiv C$，$\forall x\in[a,b]$均有$f'(x)=0$。否则，$f(x)$的最大最小值中至少有二者之一在$[a,b]$内部取得，不妨设，

使得 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，又因为$f(x)$在可导，$f(\xi)$必为$(a,b)$内的极大值点，由

费马定理，得到$f'(\xi)=0$。

注：罗尔定理及前面的导数零点定理的命题形式均为有水平切线的充分条件。不满足这两个定理的条件时，结论也可能成立。

定理 4.3　拉格朗日微分中值定理(Lagrange)　设 $f(x)$满足

1° 在$[a,b]$上连续；2° 在(a,b)内可导。

则$\exists\xi\in(a,b)$使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 【证】设点 $A(a,f(a))$与点 $B(b,f(b))$之间的弦为 AB，则$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=K_{AB}$，$AB$的直线方程为

$$y(x)-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

取辅助函数

$$F(x)=f(x)-y(x)$$
$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，且 $F(a)=0,\quad F(b)=0$，于是$\exists\xi\in(a,b)$，

$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

注 1：拉格朗日微分中值定理是罗尔定理(Rolle)的进一步拓展，证明方法是通过引入辅助函数，构造罗尔定理的条件，从而得到结果。并且(4.1)式可有如下等价表达式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$
$$=f(a+\theta(b-a))(b-a),\ (0<\theta<1);$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(\xi)h$$

注 2：微分中值定理的证明是先引入辅助函数，以创造应用罗尔定理的条件，导出结论。

注 3：由微分中值定理可直接得出 4 个推论如下：

推论 1：若$\forall x\in(a,b)$恒有 $f'(x)=0$，则 $f(x)=c$，其中 c 为常数。

推论 2：若$\forall x\in(a,b)$有 $f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内必有 $f(x)=g(x)+c$。当且仅当两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有一个公共点$(x_0,y_0),x_0\in(a,b)$时，有 $f(x)=g(x)$。

推论 3：若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则对 $[a,b]$ 上的任意两点 x_1, x_2 存在常数 $L>0$，使得

$$\left| f(x_2)-f(x_1) \right| \le L\left| x_2-x_1 \right|$$

其中 L 称为利普希茨常数。(若进一步有 $0<L<1$，则这样的 $y=f(x)$ 满足压缩映象原理。压缩映象原理不属于本课程要求的内容)

推论 4：若 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)\ge 0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上单调(非严格)增加，且 $f'(x)>0$ 时 $y=f(x)$ 严格单调增加。而当 $f'(x)\le 0$ 时(或 $f'(x)<0$)，$y=f(x)$ 非严格(或严格)单调减少。

注 4：拉格朗日中值定理的两个常用重要功能是：

(1) 由 $y=f(x)$ 在某 x_1 处的取值或性态，可推知 x_1 近旁处 $f(x)$ 的取值或性态，像是一条“链锁”，对满足定理条件的 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上有某种全局控制作用。

(2) 拉格朗日中值定理在 $y=f(x)$ 的函数取值（或增量）与其导数取值之间搭起了一座桥梁。

定理 4.4 柯西中值定理(Cauchy) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；(2) 在开区间 (a,b) 内可导，且 $g(b)\ne g(a),\ g'(x)\ne 0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

4.3 微分学基本定理的几何意义

微分学几个基本定理有着明显的几何意义，了解这些几何意义，将有助于我们建立必要的直观感性认识。

读者可以进一步思考，$f(x)$满足什么条件时，罗尔定理与拉格朗日定理中的ξ点具有唯一性？又满足什么条件时有两个不同的ξ_1与ξ_2？

例 4.2 设m,n为自然数，$f(x)=x^m(1-x)^n$，则$f'(x)$在(0,1)内零点个数为（ B ）。

(A) 0。 (B) 1。 (C) 2。 (D) 3。

【解】正确选项为(B)。

由罗尔定理，$f(0)=f(1)=0$，因此至少存在一点$\xi\in(0,1)$使$f'(\xi)=0$，又

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-nx^m(1-x)^{n-1}$$

$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-nx)。$$

令$f'(x)=0$，当$x\in(0,1)$时，

$x^{m-1}(1-x)^{n-1}\neq 0$，得$x_0=\dfrac{m}{m+n}\in(0,1)$

为唯一驻点，即$\xi=x_0$为$f'(x)$的唯一零点。

例 4.3 设$f(x)$是周期为 1 的周期函数，在$[0,1]$内可导，且$f(1)=0$，

令$M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，试证明存在$\xi\in(1,2)$，使得$|f'(\xi)|\geq 2M$。

【证】首先，因$f(x)$是周期为 1 的周期函数，则只须证明

$\xi_0\in(0,1)$使得$|f'(\xi_0)|\geq 2M$。(用 Lagrange 中值定理)

由$f(x)$在$[0,1]$内可导，则必在$[0,1]$内连续，又因

$f(1)=f(0)=0,$

则只能存在$x_M\in(0,1)$使得$\left|f(x_M)\right|=M=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|$。

（最大最小值不在端点取得）

对区间$(0,x_M)$：$\pm M-0=f'(\xi_2)(1-x_M)$

对区间$(x_M,1)$：$0\pm M=f'(\xi_1)x_M$，

$\xi_1\in(0,x_M)$，$\xi_2\in(x_M,1)$

上两式分别取绝对值后相加得到

$2M=\left|f'(\xi_1)x_M\right|+\left|f'(\xi_2)(1-x_M)\right|$，令

$\left|f'(\xi_0)\right|=\max\left\{\left|f'(\xi_1)\right|,\left|f'(\xi_2)\right|\right\}$，

则有$\xi_0\in(0,1)$，此时有不等式$2M\le\left|f'(\xi_0)\right|$，

因此存在$\xi=1+\xi_0\in(1,2)$，使得$\left|f'(\xi)\right|\ge 2M$.

作为练习，请读者将拉格朗日中值定理的 4 个推论依次进行证明，这将有助于这一重要定理的理解与应用。

例 4.4 设$f(x)$在$[1,2]$上有二阶导数，且$f(1)=f(2)=0$，$F(x)=(x-1)^2f(x)$，证明$\exists x_0\in(1,2)$，使得$F''(x_0)=0$。

思路：对$F'(x)$应用罗尔定理。

证：(方法 1)

$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，令$x=1$则有$F'(1)=0$，另由$F(1)=0,F(2)=f(2)=0$，由罗尔定理$\exists\xi_1\in(1,2)$，使得$F'(\xi_1)=0$，对$F'(x)$在$[1,\xi_1]$上应用罗

尔定理，则 $\exists\xi = x_0 \in (1,\xi_1) \subset (1,2)$，使得 $F''(x_0) = 0$。

（方法 2）

反证，设 $F''(x) \neq 0$，则由导数零点定理之推论可知 $F''(x)$ 在(1,2)上取定号，不妨设 $F''(x) > 0$，因此 $F'(x)$ 在 $[1,2]$ 上为严格单调增函数。

考虑到 $F'(1) = 0$ 及 $x \in (1, 2)$，所以 $F'(x) > 0$，即 $\forall x \in (1, 2)$ 有 $F'(x)$ 定号的结论。但由 $F(1) = F(2) = 0$，由罗尔定理应 $\exists\xi_1 \in (1,2)$，使得 $F'(\xi_1) = 0$，这与上述 $F'(x)$ 定号结论矛盾，于是原假设不成立，即必 $\exists x_0 \in (1,2)$，使得 $F''(x_0) = 0$。

例 4.5 设 $g(x) = x(x+1)(2x+1)(3x-1)$，

试确定方程 $g'(x) = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内有几个实根。

思路：已知函数 $g(x)$ 表达式已是因子乘积形式，应采用连续函数零点定理及罗尔定理综合讨论 $g'(x)$ 的零点问题，而不应把 $g'(x)$ 求出来再讨论其零点。

【解】函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且可导，显然 $g(x)$ 有 4 个实根：$x_1 = 0$，

$x_2 = -1$，$x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_4 = -\frac{1}{3}$，由罗尔定理，$g'(x)$ 至少有 3 个零点：$\xi_1 \in (0,\frac{1}{3})$，

$\xi_2 \in (-1,-\frac{1}{2})$，$\xi_3 \in (-\frac{1}{2},0)$。

又 $g'(x)$ 为 3 次多项式，最多有 3 个实根，因此 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 内恰有 2 个实根。

例 4.6 设 $x>0$，证明不等式

$$\frac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}。$$

【证】（方法 1）由 $x>0$，只需证明不等式

$$\frac{1}{x^2+2x+2}<\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x}<\frac{1}{2},$$

注意到 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，对任意 $x\in(0,\infty)$ 令

$f(x)=\arctan x$，则有

$$\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)-1}$$

在 $[1,1+x]$ 上用 Lagrange 中值定理则有

$$\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{(x+1)-1}=\frac{1}{1+\xi^2},\quad \xi\in(1,x+1)$$

因 $\frac{1}{1+x^2}$ 为单调减函数，于是

$$\frac{1}{x^2+2x+2}<\frac{\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}}{x}<\frac{1}{2}。$$

（方法 2）令

$$f(x)=(x^2+2x+2)\arctan(x+1)$$
$$-\frac{\pi}{4}(x^2+2x+2)-x$$

$f(0)=0$,

$$f'(x)=(2x+2)\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}(2x+2)$$
,
$$=(2x+2)[\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}]>0$$

于是当 $x>0$ 时 $f(x)>0$，即原左侧不等式成立。

令 $\varphi(x)=\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\varphi(0)=0$,

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{2}<0,\quad\Rightarrow\varphi(x)<0$$

即原右侧不等式成立。

例 4．7 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0。$$

【证】构造 $F(x)=x^2f(x)$，容易验证 $F(x)\in C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内可导，

且 $F(0)=F(1)=0$，对 $F(x)$ 应用罗尔定理得：

存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$，即

$$2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0,$$

两边同除 $\xi \neq 0$，于是原题得证。

4．4 用导数研究函数性态（极值 凸性与拐点 最值 不等式等）

4．4．1 引言

用导数研究函数性态是一类重要问题，属于导数应用范围。这类问题的理论基础是第十讲中若干微分学基本定理，并且还会涉及到导数定义与几何意义，以及连续函数的性质等内容。而这类问题涉及的范围是：函数及其导数(甚至二阶导数)的零点问题，增减性问题，极值与最大最小值问题，曲线的凹凸性问题与渐近线问题，以及某些不等式的证明问题。

4．4．2 函数的局部极值问题

定义 4.1　若在 x_0 的某邻域内，恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或

$f(x) \geq f(x_0)$)，

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值。

极大值、极小值统称为极值，使函数取极值的点 x_0 称为极值点。

一个可导函数在 $x = x_0$ 处取得极值的必要条件是 $f'(x_0) = 0$，这正是费尔马定理。满足 $f'(x_0) = 0$ 的点 x_0 称的为 $f(x)$ 的驻点。

从几何上看，曲线在极值点 x_0 处如果有切线，必是水平切线。

三类判断极值点的充分条件：

定理 4.5（第一类充分条件）

设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有定义，若在 x_0 处的增量 $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 两侧附近不变号，则 $x = x_0$ 必为 $f(x)$ 的极值点。并且 $\Delta f(x) \geq 0$ 时，x_0 为极小值点，而 $\Delta f(x) \leq 0$ 时，x_0 为极大值点。

例 4.8　求 $f(x) = |1 - x|$ 在 $[-1,1]$ 内的极值点。

【解】 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<1 \\ 1-x & x\geq 1 \end{cases}$，由 $f(1)=0$ 得，

$x<1$：$\Delta f=x-1-f(1)=x-1<0$，

$x>1$：$\Delta f=1-x-f(1)=1-x<0$，

在 $x=1$ 两侧附近均有 $\Delta f\leq 0$，等号仅在 $x=1$ 处成立。

定理 4.6 （第二类充分条件）

设 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域 $(x_0-\delta,x_0)\bigcup(x_0,x_0+\delta)$ 内可微，在 x_0 处连续，则当 $f'(x)$ 在 x_0 两侧变号时，x_0 为 $f(x)$ 的极值点，并且

(1) 当 $x\in(x_0-\delta,x)$ 时，$f'(x)>0$，而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，$x=x_0$ 必为极大值点。

(2) 当 $x\in(x_0-\delta,x)$ 时，$f'(x)<0$，而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，$x=x_0$ 必为极小值点。

例 4.10 设方程 $x^3-3x+A=0$，讨论 A 取何值时

(1) 方程有一个实根；

(2) 方程有二个不同实根；

(3) 方程有三个不同实根。

【解】设 $f(x)=x^3-3x+A$，则 $f(x)$ 为三次多项式，最多有三个实根。用导数讨论该函数的增减区间与极值的分布情况。

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1),$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$，并且

$x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加；

$x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加。

于是可知$x_1=-1$为$f(x)$的极大值点，而$x_2=1$为$f(x)$的极小值点。$f(x)$的极大极小值分别为：

(1) $f(-1)=A+2$，$f(1)=A-2$，

最大最小值均大于零(或小于零)时，$y=f(x)$在$(-1,+\infty)$内无零点，又$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，即$f(x)$可在$(-\infty,-1)$内可取得负值，由连续函数的零点定理，可知$f(x)$仅在$(-\infty,-1)$内有一个零点。

$$f(-1)\cdot f(1)=(A+2)(A-2)>0$$

由此可得A应满足$A^2-4>0$，即$|A|>2$

(2) 显然，当$f(x)$的最大最小值有一个为零时，即

$f(-1)\cdot f(1)=A^2-4=0$时，

$f(x)$恰有两个零点，此时$|A|=2$。

(3) 当$f(-1)$与$f(1)$取得异号时，注意到$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，于是$f(x)$恰有三个零点，分别位于$(-\infty,-1),(-1,1)$与$(1,+\infty)$内，此时$|A|<2$。

定理 4.7（第三类充分条件）　如果$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0\,(>0)$，则$f(x_0)$为极大值(极小值)。

注：进一步的广义充分条件，在关于凹凸性一节后面给出。

例 4.11 求$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-3x^2+4x+5$的极值。

【解】

$f'(x)=2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$，

得驻点$x_1=1$，$x_2=2$。

$f''(x)=4x-6$。$f''(1)=-2<0$，

所以 $f(1)=\dfrac{20}{3}$ 为极大值：因为 $f''(2)=2>0$，所以

$f(2)=\dfrac{19}{3}$为极小值。

4．4．3 闭区间与开区间上的最大最值问题

（1） 闭区间上的最大最值问题

当 $f(x)$在$[a,b]$上连续时，必然在$[a,b]$上有最大最小值。而在$[a,b]$上有间断点或不可导点时，求 $f(x)$在$[a,b]$上最大最小值时，应将驻点，不可导点及端点处的函数值逐一进行比较，而后确定最大最小值。

例 4.12 求$y=x^5-5x^4+5x^3+1$在$[-1,2]$上的最大最值。

【解】先求驻点，

$$y'=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x-1)(x-3)$$

令 $y'=0$，解得驻点 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=3$，且

$y''=20x^3-60x^2+30x$，x_3不在$[-1,2]$上。

$y''(0)=0$， $y''(1)=-10<0$，

$y(0)=1$，$y(1)=2$，

$y(-1)=-10$，$y(2)=-7$，

因此$y=f(x)$在$[-1,2]$上的最小值为$y(-1)=-10$，最大值为$y(1)=2$。

例 4.13 设 $1\le x\le 3e$ ，证明不等式

$1-(\ln 3)^2 \le \ln x^2 - \ln^2 x \le 1$。

【证】对这一不等式，只须令

$f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$，求 $f(x)$ 在 $[1,3e]$ 上的最大最小值。

先求驻点。

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln x$$

令 $f'(x) = 0$，解出驻点 $x_0 = e \in [1,3e]$

$f(x_0) = f(e) = 2 - 1 = 1$，　$f(1) = 0$，

$f(3e) = 2\ln(3e) - (\ln 3e)^2$

$= \ln(3e)(1 - \ln 3) = 1 - (\ln 3)^2$

所以 $\max\limits_{x\in[1,3e]} f = 1$，$\min\limits_{x\in[1,3e]} f = 1 - (\ln 3)^2$，这说明要证的不等式成立。

（2） 函数开区间 (a,b) 内的最大最小值（或上界下界）问题

在开区间内不等式的证明，常涉及到开区间 (a,b) 内连续的函数的最大最小值或上下界问题。首先，在开区间 (a,b) 内连续的函数未必有最大值或最小值。因此，考察开区间 (a,b) 内函数的最大最小值问题要比必区间上的情况来得复杂。

一般情况下，可采用必要的手段考察 $f(x)$ 在 (a,b) 内的上界与下界问题，具体方法是：首先求出 (a,b) 内的驻点与不可导点，确定 (a,b) 内的极值点，其次应进一步考查 $f(x)$ 在 (a,b) 内子区间上的增减性，以及两个单

侧极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$，最后确定函数的最大最小值，或上界与下界。这类问题一般是在区间内部取得最大最小值。

例 4.14 证明对任意 $x\in(0,2)$，成立不等式

$$4x\ln x\ge x^2+2x-3$$

【证】令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，

考虑 $f(x)$ 在 (0,2) 内的正负号与极值问题。先求驻点。

$$f'(x)=4+4\ln x-2x-2$$

令 $f'(x)=0$，解出驻点 $x_0=1\in(0,2)$，进一步考查两个单侧极限的情况。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=3>0,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=8\ln 2-5>0$$

又 $f''(x)=\dfrac{4}{x}-2$，$f''(x_0)=2>0$，因此 $f(1)=0=\min\limits_{x\in(0,2)} f(x)$。

这意味着 $f(x)\ge 0$，即原不等式成立。

例 4.15 求 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大最小值。

【解】

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_0=e^{-2}\in(0,+\infty)$

当 $x \in (0, e^{-2})$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减；

当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增；

于是 $x_0 = e^{-2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，另外，由

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0 \text{及} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \ln x = +\infty$$

可以断定 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最小值为 $f(e^{-2}) = -e^{-1}$，无最大值。

注：对实际应用问题，若实际问题背景有最大(小)值，且函数在其定义域内有唯一驻点，则该驻点即为最大(小)值点。

4．4．4　曲线的凹凸与拐点

定义 4.2　若曲线段位于其上各点的切线上(下)方，则说此曲线段是凹(凸)的。画图体会！

对可导函数，从图形上看，随着 x 的增大，凹曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率是单调增的，即 $f'(x)$ 单调上升；而凸曲线切线斜率单调减小，即 $f'(x)$ 单调下降，这是判断凹凸区间的重要方法。而当 $f''(x)$ 存在时，可以利用 $f(x)$ 的二阶导数正负号判定曲线段的凹凸性。

定理 4.8　在区间 I 上，若 $f''(x) > 0 (< 0)$，则曲线 $y = f(x)$ 是凹(凸)的。

在连续曲线上，凹凸部分的分界点称为曲线的拐点。

若 $y = f(x)$ 具有二阶导数，则点 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$。当然拐点也可能出现在二阶导数不存在的点处。

应该指出，当函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有足够阶数的导数时，

$f(x)$的拐点问题即为$f'(x)$的极值点问题。因此，拐点的判别法可参照极值点的判别方法。可归纳如下：

(1) 若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧改变增减性，则$(x_0, f(x_0))$必为曲线 $y = f(x)$的拐点。

(2) 若 $f''(x)$ 在 x_0 两侧变号，则$(x_0, f(x_0))$必为曲线$y = f(x)$的拐点。

(3) 当 $f''(x) = 0$，而 $f'''(x_0) \neq 0$时，$(x_0, f(x_0))$必为曲线 $y = f(x)$的拐点。

对极值点与拐点，更一般性的结论是如下定理。

定理 4.9　若$y = f(x)$在 x_0 某领域内有n阶导数，且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

但$f^{(n)}(x_0) \neq 0$，则

(1) 当$n = 2k$时，　为　的极值点，

且$f^{(2k)}(x_0) > 0$时，x_0为极小值点，

$f^{(2k)}(x_0) < 0$时，x_0为极大值点$(k = 1,2,\cdots)$。

(2) 当$n = 2k-1$时，$(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$的拐点。

例 4.16 判断$x = 0$是否为

$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值点？

【解】 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$，$f'(0) = 0$

$$f''(x)=e^{x}+e^{-x}-2\cos x，f''(0)=0$$

$$f'''(x)=e^{x}-e^{-x}+2\sin x，f'''(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x，$$

$$f^{(4)}(0)=4>0$$

由定理 4.9，$x=0$为 $f(x)$的极小值点。

例 4.17 设 $f(x)=x^5$，则（C）。

（A）$x=0$为 $f(x)$的极大值点。

（B）$x=0$为 $f(x)$的极小值点。

（C）$(0,f(0))$为曲线$y=f(x)$的拐点。（D）（A）(B)(C)均不确定。

【解】$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$，但

$f^{(5)}(0)=5\neq 0$，于是只有(C)正确。

例4.18 设 $f(x)$在$x=0$某邻域内有二阶连续导数,且 $f'(0)=0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{1-\cos x}=1，$$ 则（B）。

（A）$f(0)$是 $f(x)$的极大值，

（B）$f(0)$是 $f(x)$的极小值，

（C）$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点，(D) $x=0$ 不 是 $f(x)$的极值点，

$(0, f(0))$也不是曲线$y = f(x)$的拐点。

【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{1-\cos x}=1$，则可知$f''(0)=0$，但不足以说明$(0, f(0))$为拐点。

根据极限的保序性知道，在x_0的某邻域内，必有$f''(x)>0$，即知$f'(x)$在该邻域内为单调增加，又因为$f(0)=0$，于是知道$f'(x)$在$x=0$两侧变号，即$f(x)$改变增减性，且当x通过x_0而变大时，$f(x)$由递减变为递增，于是可以断定$x=0$为$f(x)$的极小值点。即只有选项(B)正确。

例 4.19 证明不等式

$$(1+x)^{\lambda} \ge 1+\lambda x \quad (\lambda > 1, x > -1).$$

【证】 设$f(x)=(1+x)^{\lambda}-1-\lambda x$，

问题变为证明$f(x)\ge 0.$ 　由于

$$f'(x)=\lambda(1+x)^{\lambda-1}-\lambda=\lambda[(1+x)^{\lambda-1}-1],$$

令$f'(x)=0$，得到$f(x)$的唯一驻点$x=0$。

当$x<0$时，$f'(x)<0$；

当$x>0$时，$f'(x)>0$，所以$f(0)=0$是$f(x)$的极小值，也是最小值。故$f(x)\ge f(0)=0$，即有$(1+x)^{\lambda}\ge 1+\lambda x$。

例 4.20 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f(a)=f(b)$，证明

至少存在一点$\xi \in (a,b)$使 $f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{b-\xi}$.

【证】 由 Rolle 定理，$\exists\, x_0 \in (a\,,\ b)$，使 $f'(x_0) = 0$，观察要证的等式含有

$$2f'(\xi) = f''(\xi)(b-\xi),$$

采用移项造辅助函数的方法，取

$$F(x) = (b-x)^2 f'(x),$$

$F(b) = F(x_0) = 0$，再次由 Rolle 定理，

$\exists\, \xi \in (x_0\ ,\ b)$，使$F'(\xi) = 0$，

$$F'(x) = -2(b-x)f'(x) + (b-x)^2 f''(x),$$

令$x = \xi$，则有

$$2(b-\xi)f'(\xi) = (b-\xi)^2 f''(\xi)$$

其中$\xi \in (x_0\ ,\ b)$，$\xi \neq b$，因此

$$f''(\xi)(b-\xi) = 2f'(\xi),$$

即有　$f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{b-\xi}$，$\xi \in (a,b)$。

例 4.21 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上二阶可导函数，且 $f(a) = f(b),\ f''(x) \neq 0$，则下列命题中错误的是（ D ）。

(A) $\forall x \in (a,b)$均有 $f(x) - f(b) \neq 0$。　(B) $f(x)$ 在(a,b)内不改变凹凸性。

(C) 至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi) = 0$。(D) 至少在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi) = 0$。

【解】首先，(A) 与 (C) 是对的，因为若有 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) - f(b) = 0$，即 $f(x)$ 在三个点上有相同函数值，则由 Rolle 定理可得知 $f'(x)$ 有两个零点，进而 $f''(x)$ 在 (a,b) 内有一个零点，这与 $f''(x) \neq 0$ 矛盾。

又因为 $f(a) = f(b),\ f''(x) \neq 0$，由导数零点定理知道 $f''(x)$ 在 (a,b) 内不变号，因此(B)正确。应选（ D ）。

例 4.22 设任意常数 $k > 0$，函数

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$$

在定义域内的零点个数为（ C ）。

(A) 0。(B) 1。 (C) 2。(D) 3。

【解】 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$，有唯一驻点 $x_0 = e$，

又 $f(0^+) = -\infty,\ f(e) = k > 0,\ f(+\infty) = -\infty$，且 $x \in (0,\ e)$ 时 $f'(x) > 0, \Rightarrow f(x) \uparrow$，$f(x)$ 恰有一个零点 $x_1 \in (0, e)$，

$x \in (e, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0, \Rightarrow f(x) \downarrow$，$f(x)$ 恰有一个零点 $x_2 \in (e, +\infty)$，因此答案为 (C)。

例 4.23 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 2$，

已知极限等式

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[f(x+1) - f(x)\right],$$

求常数c。

【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c},$$

由 Lagrange 中值定理，

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)\cdot 1=2,$$

其中$\xi\in(x,x+1)$，由已知等式则有$e^{2c}=2$，解出$c=\dfrac{\ln 2}{2}$.

例 4.24 设$0<a<b$，证明

$$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}.$$

【证】 要证$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(\frac{b}{a}-1)}{1+\frac{b}{a}}$，

或 $(1+\dfrac{b}{a})\ln\dfrac{b}{a}>2(\dfrac{b}{a}-1)$。

令$t=\dfrac{b}{a}$, $f(t)=(1+t)\ln t-2(1-t)$，

则有$t>1$, $f(1)=0$，

$$f'(t)=\frac{1+t}{t}+\ln t-2(t-1)，f'(1)=0,$$

$$f''(t)=\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})>0$$

$$\Rightarrow f'(t)>0,\Rightarrow f(t)>0。$$

4．4．5　渐近线

应掌握以下三类渐近线：

(1) 若存在常数 C，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$，则 $y=C$ 为 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

(2) 若存在 x_0 使 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的垂直渐近线。

例如，曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x-1}$ 的渐近线，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x-1}=0$，所以 $y=0$ 为曲线的水平渐近线。又因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为曲线的铅直渐近线。

（3）斜渐进线　若存在直线 $y=ax+b$，使得 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax-b)=0$ 则 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐进线。实用性的方法：考察是否存在极限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 与极限

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b。$$

注：只有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 的存在不足以保证斜渐进线的存在，反例：

$y=x+\sin x$ ， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=a$ 存 在 ， 但

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在。

（b 不存在），因而没有斜渐进线。

例 4.25　求函数 $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的渐近线。

【解】（1）

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty.$$

故有垂直渐近线： $x=1$

（2）

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty,$$

所以，无水平渐近线。

（3）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)}=+\infty,$$

所以，当 $x\to+\infty$ 时，没有斜渐近线。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)}=-3=a$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}+3x]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)+3x(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)e^x-3x-1}{x-1}=-3$$

所以，当 $x\to-\infty$ 时，有斜渐近线：

$$y=-3(x+1)$$

注：对渐近线问题，应从两个单边极限分别进行考察。

4．6 综合例题

例 4.26 方程 $1-e^{-2x}=x$ 在 $(0,+\infty)$ 内实根的个数为（　）。

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

【解】令 $f(x)=1-e^{-2x}-x$，$f(0)=0$，由

$f'(x)=2e^{-2x}-1=0$，求得驻点 $x_0=\dfrac{\ln 2}{2}$，

$f''(x)=-4e^{-2x}<0$，故 x_0 是唯一驻点，

且有最大值为

$$f(\frac{\ln 2}{2}) = 1 - e^{-\ln 2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) > 0。$$

又因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ，由极限的保序性，

存在 $x_1 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$,使得 $f(x_1) < 0$，因此存在

$x_2 \in (\frac{\ln 2}{2}, x_1)$，使得 $f(x_2) = 0$。

当 $x \in (0, \frac{\ln 2}{2})$ 时 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调增加，

$f(x) > f(0) = 0$，无零点。

当 $x \in (\frac{\ln 2}{2}, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调减少，最多有一个零点。

于是 x_2 是 $f(x)$ 在 $(\frac{\ln 2}{2}, +\infty)$ 内的唯一零点。

综合上述分析，于是 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一实根。

以上第三个等号用到了 $f'(x)$ 的连续性，而本题未给出 $f'(x)$ 的连续性条件，极限无法计算出结果。这是运用洛必达法则时的常见错误。

例 4.27 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 二阶可导，对一切 $x \in (0, +\infty)$ 有 $f''(x) \neq 0$，证明在 $(0, +\infty)$ 内曲线 $y = f(x)$ 上一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与该曲线除切点外无交点。

[证]（方法 1）

设切线方程为

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

并取辅助函数

$$F(x) = f(x) - y(x)$$
$$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

则只须证明$F(x)$在$(0,+\infty)$内除切点$(x_0, f(x_0))$外无零点。

或证明$F(x)$在$(0,+\infty)$内不变号。

$F'(x)=f'(x)-f'(x_0), F'(x_0)=0$，

$F''(x)=f''(x)\neq 0$，不妨假设$F''(x)>0$，$F''(x_0)>0$，于是$F(x_0)=0$为$F(x)$的极小值，又因为：

$0<x<x_0$时，

$F'(x)<0 \Rightarrow F(x)\downarrow \Rightarrow F(x)>0$，

$x>x_0$时，$F'(x)>0 \Rightarrow F(x)\uparrow \Rightarrow F(x)>0$，

即$F(x_0)=0$为$F(x)$在$(0,+\infty)$内的最小值，

所以$F(x)>0\ (x\neq x_0)$。证毕。

（方法 2）反证法。

假设$y=f(x)$在$(x_0, f(x_0))$处的切线与该曲线除切点外，还有一个交点$x_1\neq x_0$，不妨设$x_1>x_0$，在$[x_0, x_1]$上用 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(x_0, x_1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

注意到$(x_1, f(x_1)),(x_0, f(x_0))$都在切线上，因此应有

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=k_{切}=f'(x_0),$$

由 Rolle 定理，必存在$\exists\xi_1\in(x_0,\xi)$，使得

$f''(\xi_1)=0$，这与$f''(x)\neq 0$矛盾。证毕。

例 4.28 设 $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 内的连续奇函数，且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=a,$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 （ A ） 。

(A) a。 (B) $-a$。 (C) 0。 (D)不存在。

【解】

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=a$$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 a。

例 4.29 证明方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 至多有两个不同实根.

【证】假设 $2^x+2x^2+x-1=0$ 有三个或三个以上不同的实数根。

设 $f(x)=2^x+2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 三个或三个以上不同的零点。

于是，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2+4$ 至少有一个零点。

而 $f''(x)=2^x(\ln 2)^2+4$ 恒大于零，故原方程至多有两个不同的实数根。

例 4.30 设 $f(x)$ 满足

$$f''(x)+[f'(x)]^2=2\sin x,$$

则（ ）。　　答案：C

(A) 若 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$ 必为 $y=f(x)$ 的极值点。

(B) 若 $f'(0)=0$，则 $x=0$ 必为 $y=f(x)$ 的极值点。

(C) 若 $f'(0)=0$，则 $(0,f(0))$ 必为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

(D) 若 $f''(0)\neq 0$，则 $(0,f(0))$ 必为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

【解】 若 $f'(0)=0$，由

$$f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=2\sin x，则 f''(0)=0，$$

$$f'''(x)=2\cos x-2\left[f'(x)\right]\cdot f''(x)，$$

$$f'''(0)=2>0，$$

因此，点 $(0, f(0))$ 必为 $y=f(x)$ 的拐点。(B)不对，应选(C)。

若 $f''(0)\neq 0$，则 $f'(0)\neq 0$，于是(A)与(D)均不对。