基础部分

第一课　微积分

第 7 章　定积分的应用 综合例题

7．1　定积分应用的两种思想

- 定积分问题的持征：
- 解决定积分应用问题的两种思路：

元素相加法： 利用定积分定义一个量。

分小取近似: $\Delta I \approx f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$;

求和取极限:

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

微元分析法: 通过分析末知函数的增量求出其微分的方法。

分小取微分: $\Delta I \approx dI = f\left(x\right)dx$;

积分求增量: $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

7．2　定积分在几何方面的应用

7.2.1 平面区域的面积

1.直角坐标系中平面区域的面积

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则区域

$$D = \left\{(x,y)\middle| a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

的面积为 $A = \int_a^b\left[g(x) - f(x)\right]dx$。

注：若连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上变号，则 $A = \int_a^b f(x)dx$ 表示正负面积的代数和，有时称为代数面积。

例 7.1 求 $y = \dfrac{x^2}{2}$ 与 $y = x + \dfrac{3}{2}$ 围成的面积.

解：由$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$，解得交点$a=-1,b=3$。

$$A=\int_{-1}^{3}\left(x+\frac{3}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{16}{3}。$$

例 7.2 求非负常数a，使$y=x-x^2$与$y=ax$所围封闭区域之面积为$\frac{9}{4}$。

[解] 当$0<a<1$时，$\int_0^{1-a}(x-x^2-ax)dx=\dfrac{9}{4}$，$a=1-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}<0$（舍）

当$a\ge 1$时，$\int_{1-a}^{0}(x-x^2-ax)dx=\dfrac{9}{4}$，$a=1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

2．参数方程下区域的面积

设区域的边界由曲线

$L:\quad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\qquad (\alpha\le t\le\beta)$确定，其中$x(t),y(t)$连续可导，

$y(t)\ge 0$，则区域的面积为 $A=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$。

例 7.3 求椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$围的区域的面积.

解:解法一　第一象限部分的边界为

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\quad 0\le x\le 3,$$

$$A=4\int_0^1\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}dx=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=6\pi。$$

解法二 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的参数方程为

$$x=3\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{4},$$

$$A=4\int_0^3 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)dx(t)\ =4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin t(-3\sin t)dt=6\pi$$

3.极坐标系下区域的面积

设区域 D 为（$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$）

$$D=\left\{(x,y)\middle|\alpha\le\varphi\le\beta,0\le\rho\le\rho(\varphi)\right\},$$

则其面积为 $A=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$。

例 7.4 求心形线 $r=a(1+\cos\varphi)\quad(a>0)$ 所围的面积.

解：$A=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi=\int_0^\pi r^2(\varphi)d\varphi$

$$=4a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3}{2}\pi a^2$$

例 7.5 已知曲线 $y=a\sqrt{x}$（$a>0$）与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线。

(1)求常数 a 及切点之坐标值

(2)求上述二曲线与 x 轴所围图形的面积

[解]（1）由 $a\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0}$，$a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0}$，解得 $a=e^{-1}$，切点为（e^2,1）

（2）面积为

$$A=\int_0^{e^2}a\sqrt{x}dx-\int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}e^2-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}。$$

7.1.2 旋转体的体积

1.绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积（小圆台法）

平面区域

$D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$$

2．绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积（薄壁筒法）　平面区域

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$$

绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积为 $V_y=\int_a^b 2x\pi f(x)dx$

例 7.7 求由曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=\sqrt{x}$ 及 y 轴所为平面区域绕 x 轴及绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积.

解: $V_x=\int_0^1\pi\left[(2-x^2)-x\right]dx=\frac{7}{6}\pi$,

$$V_y=\int_0^1 2\pi\left(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{20\sqrt{2}-22}{15}\pi$$

例 7.8　设常数 $a<1$，直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，他们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2。

（1）　试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）　求该最小值所对应的图形绕 x 轴旋转一周所生成旋转体的体积。

[解]（1） $A_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{1}{6}a^3$,

$$A_2=\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}a^3$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3},$$

当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， 取到最小值 $A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$。

（2） 用小圆台法

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi[(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 - (x^2)^2]dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \pi[(x^2)^2 - (\frac{x}{\sqrt{2}})^2]dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi。$$

例 7.9 求曲线 $y = \ln x, \ (2 \le x \le 6)$ 上的一条切线，使该切线与直线 $x = 2, x = 6$ 所围成平面图形面积最小。

[解] 设切点为 x_0，则切线方程为

$y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$，该切线与直线

$x = 2, x = 6$ 所围成平面图形面积为

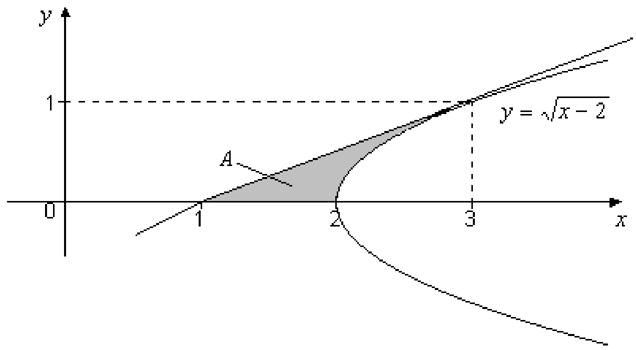
$$\int_2^6 (\frac{x}{x_0} + \ln x_0 - 1)dx = \frac{16}{x_0} + 4(\ln x_0 - 1),$$

当 $x_0 = 4$ 时，面积最小。切线为 $y = \frac{1}{4}x - 1 + \ln 4$。

例 7.10 过点 $(1,0)$ 作曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述曲线及 x 轴围成一平面图形 A。

（1） 求 A 的面积；

（2） 求 A 绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积。



解：(1) 设切点坐标为(x_0, y_0)，则在此点的切线斜率为$y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$

在此点的切线方程为

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)+\sqrt{x_0-2}$$

把点$(1,0)$代入上式得$x_0=3$，

切线方程为$y=\dfrac{1}{2}(x-1)$，

则 $A=\int_0^1[(y^2+2)-(2y+1)]dy=\dfrac{1}{3}$

(2) $V_x=\pi\int_1^3[\dfrac{1}{2}(x-1)]^2dx-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2dx$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$$

7.1.3 光滑曲线的弧长

1. 直角坐标系中的光滑曲线$y=f(x),\quad a\le x\le b$的弧长为

$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$。

2．参数方程下

$x=x(t),y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 的弧长为

$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[x'(t)\right]^2++\left[y'(t)\right]^2}dt$。

3．极坐标系下光滑曲线

$\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$ 的弧长为

$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)++\left[\rho'(\varphi)\right]^2}d\varphi$。

例7.11　求心形线

$r=a(1+\cos\varphi)\quad (a>0)$ 的弧长.

解：$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}d\varphi$

$$=a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi$$

$$=2a\int_0^{\pi}2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=8a。$$

7.1.4 旋转体的侧面积

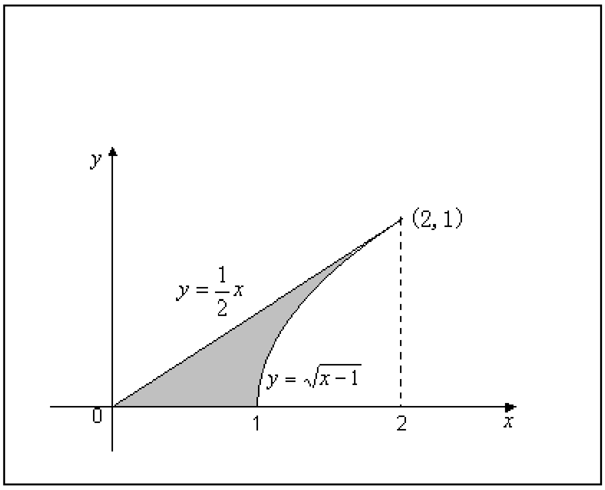
1．直角坐标系中曲线 $y=f(x),\quad a\le x\le b$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积为 $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$。

2．参数方程下曲线

$x=x(t),y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 绕 x 轴旋转生成的旋转体的侧面积为

$A=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2++\left[y'(t)\right]^2}dt$。

例 7．12 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求此曲线，切线及 x 轴为成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体



表面积．

解：可以求得切线为 $y=\dfrac{1}{2}x$，

切点为 $(2,1)$．

旋转体表面积由两部分组成：

由曲线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

$$A_1=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}dx$$

由切线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

$$A_2=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}\pi$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

所以旋转体表面积

$$A=A_1+A_2=\frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5}-1\right)。$$

例 7．13 设外旋转线的方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le 2\pi, a>0),$$

（1）求它绕 X 轴旋转一周生成的体积与侧面积；

（2）求它绕 y 轴旋转一周生成的体积与侧面积。

解：（1）体积为

$$\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt$$
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos t^2-\cos^3 t)dt$$
$$=5\pi^2 a^3。$$

侧面积为

$$2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$
$$=2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$
$$=8\pi a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$
$$=-16\pi a\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d(\cos\frac{t}{2})=\frac{64}{3}\pi a^2$$

（2）绕 y 轴旋转体积与侧面积分别为

体积：$\pi\int_0^{2\pi} a^2(t-\sin t)^2 a\sin t dt=6\pi^3 a^3,$

侧面积：

$$2\pi\int_0^{\pi} x\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$
$$=2\pi\int_0^{\pi} a(t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}dt=16\pi^2 a^2$$

7.2 定积分的物理应用

1．平面图形的形心

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则平面图形

$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\}$ 的形心为

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx}\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx}$$

例 7．14 求半径为 R 的半圆板的形心．

解：设半圆板的圆心在原点，由对称性，

$$\bar{x}=0.\ \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{4}{3\pi}R.$$

例 7．15 假设区域 D 由曲线

$y=px^3(y>0,P>0)$ 及其过点 $(1,p)$ 的切线

与 x 轴围成，设此区域的形心为 (X,Y)，(1) 求 X 的值；

(2) 求 p 的值，使 D 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体体积为 $V_y=\frac{7}{135}\pi$。

[解] (1) $y'\big|_{x=1}=3px^2\big|_{x=1}=3p$，

切线为 $y=p+3p(x-1)$。

与 x 轴交点为 $(2/3,0)$，

$$A=\int_0^1 px^3dx-\frac{1}{6}p=\frac{1}{12}p,$$

$$M_y=\int_0^1 px^3\cdot xdx-\int_{2/3}^{1}[p+3p(x-1)]xdx$$

$$=\frac{1}{5}p-\int_{2/3}^{1}(3px^2-2px)dx$$

$$=\frac{1}{5}p-(1-\frac{8}{27}-1+\frac{4}{9})p=\frac{7}{135}p$$

$$X=\frac{84}{135}=\frac{28}{45}。$$

(2) $V_y=\frac{1}{3}\pi[1^1 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\pi\int_0^p \frac{y^{2/3}}{p^{2/3}}dy$

$$=\frac{1}{3}\pi[1^1\cdot 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\pi\int_0^p \frac{y^{2/3}}{p^{2/3}}dy$$

$$=\frac{1}{3}\pi[1^1\cdot 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\frac{3\pi}{5}p=\frac{14}{135}\pi\, p$$

令 $\frac{14}{135}\pi\, p=\frac{7}{135}\pi$，得到 $p=\frac{1}{2}$。

或：由古耳金定理得到

$$V_y=2\pi\, XA=2\pi\frac{84}{135}\cdot\frac{1}{12}p$$

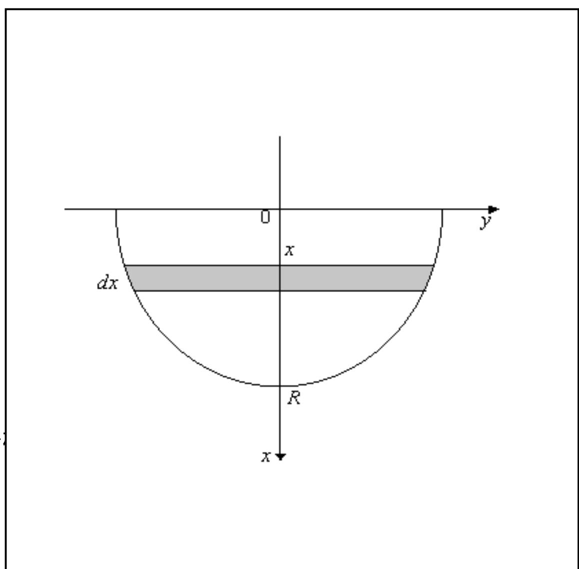
$$=\frac{14}{135}\pi\, p=\frac{7}{135}\pi,\quad p=\frac{1}{2}。$$

2．压力问题

同一深度的各方向的压强相等，小微元的压力微元为 $dp=gh\cdot dA$，

其中 h 为该小微元离液面的高度，g 为重力加速度，dA 为该小微元的面积.积分可得压力.

例 7.16 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合,水的密度为本 1,求闸门受的压力.



解：以水平面为 y 轴，垂直向下为 x 轴建立坐标系，

$dp = 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx$，其中 R 为半径.

压力 $p = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = \dfrac{2}{3}R^3$

2．引力问题

例 7．17 有一长为 L、质量均匀分布、总质量为 M 的细杆，在沿杆所在的直线上，离其一端 O 相距为 a 的 P 处，放有一质量为 m 的质点，求杆对质点的引力.

解：取杆的微元 $[x, x + dx]$，其对 P 点的引力微元为

$$dF = g\frac{m}{(l + a - x)^2} \cdot \frac{M}{L}dx$$

杆对质点的引力

$$F = \int_0^L g\frac{m}{(l + a - x)^2} \cdot \frac{M}{L}dx = \frac{gmM}{a(l + a)}$$

3．变力作功

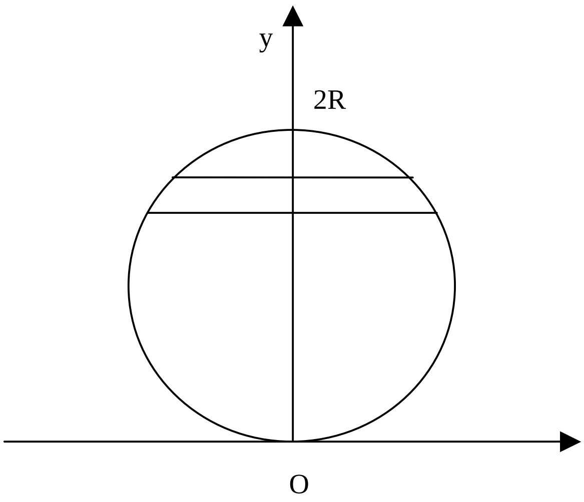
两个关键量的表达：

（1）导致作功的力，

（2）导致作功的有效路程

例 7．18 将一半径为 R 的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力作的功 (设水的密度为 1).

解：平面曲线为 $x^2 + (y - R)^2 = R^2$，



取厚度为 Δy 的水平薄片，其受水的浮力微元为 $dF = \pi x^2 dy$，导致

作功的有效行程为 $(2R - y)$，因此功的微元（元功）为

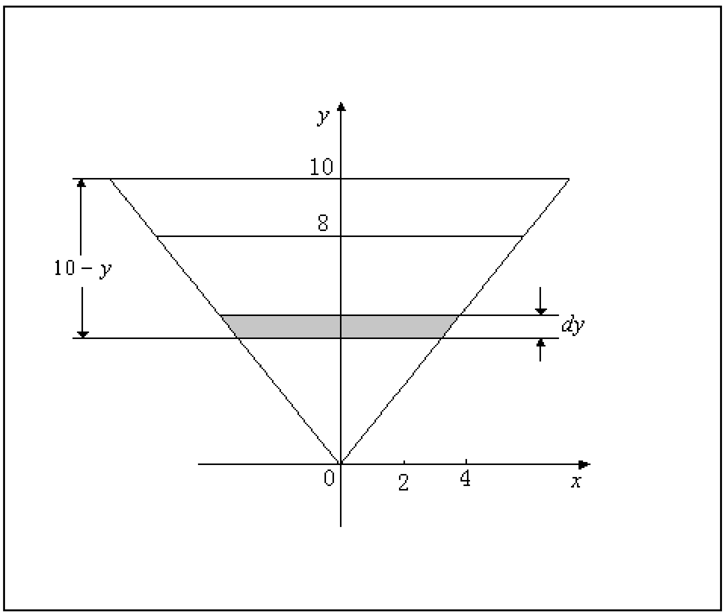
$dW = \pi x^2 (2R - y)dy$ ，所作功为

$$W = \pi \int_0^{2R} \left[R^2 - (y - R)^2 \right] (2R - y)dy = \frac{4}{3}\pi R^4$$ （公斤米)。

例7.19　　　一圆锥形油罐高 10m，上方开口直径为

10m,油面高度为 8m，油的密度为 480kg/m^3,问将罐内的油全部抽出至罐外需作多少功。

解：建立坐标如图，圆锥侧母线为 $y = 2x$，沿 y 轴方向将圆锥分割成小圆台，



体　积　微　元　为

$dv = \frac{\pi}{2} y^2 dy$,

质量微元为 $dm = 480 \cdot \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy$,

导致作功的有效行程为 $(10 - y)$ 米,

因此功的微元（元功）为

$dw = 480(10 - y)\pi \frac{y^2}{4} dy$, 所作功为

$$w = \int_0^8 480(10 - y)\pi \frac{y^2}{4} dy$$

$$= 120\pi \int_0^8 (10y^2 - y^3) dy = 8192\pi (kgm)。$$

7.3 定积分综合问题

例 7.20 求由 $x^2 + y^2 \le 2x$ 与 $y \ge x$ 确定平面图形绕直线 $x = 2$ 旋转而成的旋转体体积 V。

解：(方法法 1)

记 $x_1 = 1 - \sqrt{1 - y^2}$, $x_2 = y$,

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad dv = [\pi (2 - x_1)^2 - \pi (2 - x_2)^2] dy$

$= \pi [(1 + \sqrt{1 - y^2})^2 - (2 - y)^2] dy$

$$V = \int_0^1 dv = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1 - y^2})^2 - (2 - y)^2] dy = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2}{3}\pi$$

(方法 2 记 $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{2x - x^2}$,

$$dv = 2\pi(2-x)(y_2 - y_1)dx = 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$$

$$V = \int_0^1 dv = 2\pi\int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2}{3}\pi$$ 例

7.21 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负且单调增加，(X,Y) 为区域 $D = \{(x,y)\in R^2 \mid a \le x \le b，0 \le y \le f(x)\}$ 的形心，证明 $x \ge \dfrac{a+b}{2}$。

【思路】本题要证

$$X = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \ge \frac{a+b}{2}$$，即证

$$I = \int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \ge 0. \qquad (1)$$

将 b 视为变量，引入变上限的积分 $F(x)$，证明 $F(x) \ge 0$，

这便是（方法 1）；将二个积分合并为一个积分号，再插入分点 $\dfrac{a+b}{2}$，

把积分拆分为两个区间上的积分，利用 $f(x)$ 单调性对积分估计正负号，

形成（方法 2）；利用积分中值定理对积分进行估计，便形成（方法 3）。

【证】（方法 1）　令 $F(x) = \int_a^x tf(t)dt - \dfrac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，

则 $F(a) = 0$，

而

$$F'(x) = xf(x) - \frac{a+x}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}(x-a)f(x) - \frac{1}{2}f(\xi)(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)\big(f(x)-f(\xi)\big).$$

其中$\xi\in(a,x)$，又$f(x)$单调增加，因而$F(x)>0$，令$x=b$，则不等式(1)成立。

（方法 2）考虑（1）式中的积分合并后得到

$$I=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

将上述等号右端第一个积分记为I_1，$f(x)$单调增加，则

$$0\le f(x)\le f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ x-\frac{a+b}{2}<0.$$

由积分的保序性（注意被积函数为负），因此

$$I_1\ge\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx.$$

（2）再考虑前面等号右端中的第二个积分，

记为I_2，注意$f(x)\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，

$x-\dfrac{a+b}{2}>0$，由保序性又有

$$I_2\ge\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx.$$

（3）将同向不等式（2）和（3）相加，则有

$$I=I_1+I_2\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0.$$

(4)

于是不等式（1）得证。

（方法 3）对（方法 2）中的 I_1 与 I_2，注意到 $x-\frac{a+b}{2}$ 在两个积分号内分别保持定号，而 $f(x)$ 连续，由积分中值定理则有

$$I_1 = f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = -\frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_1)$$

$$I_2 = f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = -\frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_2)$$ 其 中

$\xi_1\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$，

即有 $\xi_2 > \xi_1$，

由 $f(x)$ 的单调性，则有

$f(\xi_2) \ge f(\xi_1)$，于是

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{8}(b-a)^2(f(\xi_2) - f(\xi_1)) \ge 0.$$

例 7.22 设 $k>0$，$y=kx^2$ 与

$y=\sin x\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$

在 $x=t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 处相交，记 S_1 为 $y=kx^2$ 与 $y=\sin x$ 围成的的面积，

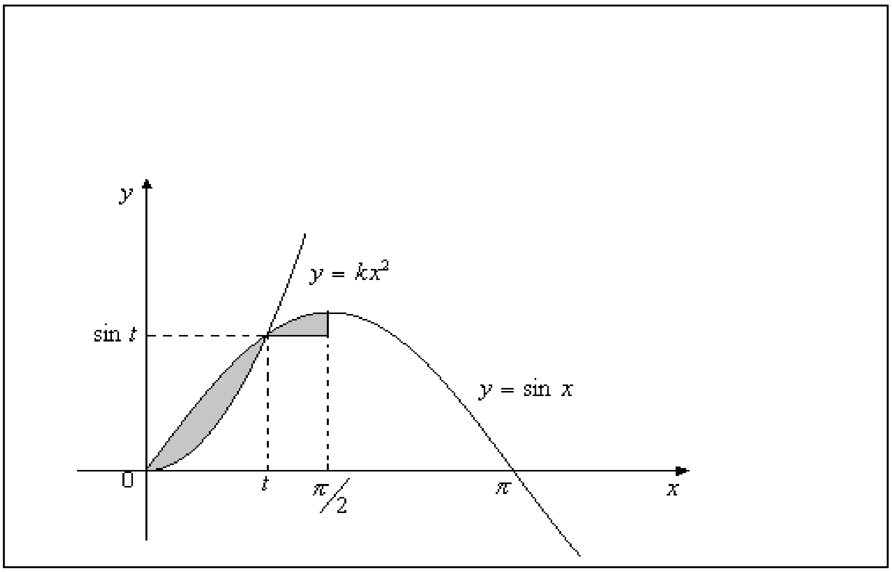
S_2 为

$y=\sin x,\ y=\sin t$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 围成的面积.

证明: $S(t)=S_1+S_2$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内必有唯一最小值.

证明：曲线 $y=kx^2$ 与 $y=\sin x$ 在 $(t,\sin t)$ 处相交，$\sin t=kt^2$，

$$k=\frac{\sin t}{t^2}$$



$S_1=\int_0^t\left(\sin x-\dfrac{\sin t}{t^2}x^2\right)d$

$$S_2=\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin t)dx=\cos t-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t$$

$S(t)=1+\left(\dfrac{2}{3}t-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin t$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且

$S(0)=1, S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{6}>0$.

$S'(t)=\dfrac{2}{3}\sin t-\dfrac{\pi}{2}\cos t+\dfrac{2}{3}t\cos t$,

$S'(0)=-\dfrac{\pi}{2}<0,\quad S'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}>0$,

由导数零点的存在性可知，$\exists t_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,使$S'(t_0)=0$.

$S''(t)=\dfrac{4}{3}\cos t+\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}t\right)\sin t>0, \quad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ $S'(t)$ 单调增,因此 t_0 为唯一的最小值点。

例 7.23　设$S(x)$连续，$S(x)=\int_0^x |\cos t| dt$,

（1）当 n 为正整数时，且$n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时,证明

$2n \le S(x) \le 2(n+1)$.

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

[解]　（1）$|\cos x| \ge 0$，当$n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，$S(x)$为增函数，所以

$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt \le S(x) < \int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt$,

注意到$|\cos x|$以π为周期，$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt = n\int_0^{\pi}|\cos t|dt = 2n$,

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt \quad =(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|dt = 2(n+1)$　于 是 得 到 $2n \le S(x) \le (n+1)$。

（2）当$n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时,

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{S(x)}{x} \le \frac{2(n+1)}{n\pi},$$

令$n \to \infty$，由夹逼准则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}。$$

例 7.24 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x)>0$，试证明：在(a,b)内存

在一点ξ，使曲线$y=f(x)$与$y=f(\xi)$，$x=a$所围成的图形面积，S_1是由曲线$y=f(x)$与$y=f(\xi)$，$x=b$所围成平面图形S_2的 3 倍.

[解] 在(a,b)内取一点t，则

$$S_1=S_1(t)=\int_a^t(f(t)-f(x))dx,$$

$$S_2=S_2(t)=\int_t^b(f(x)-f(t))dx,$$

令$F(t)=S_1(t)-3S_2(t)=\int_a^t(f(t)-f(x))dx-3\int_t^b(f(x)-f(t))dx$,

则只须证明$F(t)$在(a,b)有且仅有一个零点$\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$。

注意到由 $f'(x)>0$，于是 $f(t)$在(a,b)内单调增加，由积分估值定理可得

$F(a)<0$，且$F(b)=\int_a^b(f(b)-f(x))dx>0$。所以$F(t)$在$(a,b)$内至少有一个零点。

另由 $f'(x)>0$，考察$F(t)$在(a,b)内的单调性。

$$\begin{aligned}F'(t)&=f(t)+(t-a)f'(t)-\\&\quad f(t)-3(b-t)f(x)+3(b-t)f(t)\\&=(t-a)f'(t)+3(b-t)[f(t)-f(x)]\\&=(t-a)f'(t)+3(b-t)f'(\xi)>0\end{aligned}$$

其中$\xi\in(t,x)$。于是$F(t)$在(a,b)内单调增加，最多有一个零点。

综合上述分析，所以$F(t)$在(a,b)有一个零点$\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$。

例 7.25 求曲线段 $y=\ln x,\ (2\le x\le 6)$ 的一条切线，使该切线与直线 $x=2,x=6$及此曲线段所围平面图形的面积最小。

解：曲线 $y=\ln x$ 在 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

曲线$y=\ln x$在$(x_0,\ln x_0)$处的切线与直线$x=2,x=6$及此曲线段所围平面图形的面积为

$$S(x_0)=\int_2^6[\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)-\ln x]dx$$

$$=4\ln x_0+\frac{16}{x_0}-6\ln 6+2\ln 2$$

由 $S'(x_0)=0$，得$x_0=4$。又有

$$S(2)=4\ln 2+8-6\ln 6+2\ln 2,$$

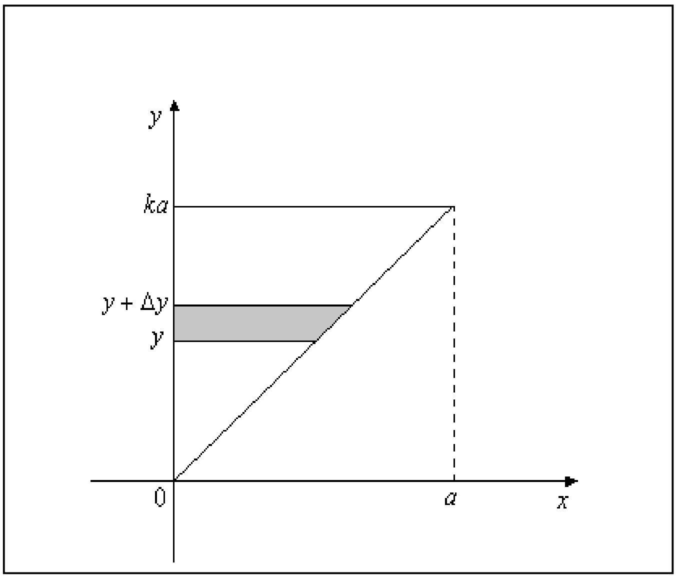
$$S(4)=8\ln 2+4-6\ln 6+2\ln 2,$$

$$S(6)=4\ln 6+\frac{8}{3}-6\ln 6+2\ln 2,$$

所以$S(4)$最小，故所求切线方程为 $y=\ln 4+\frac{1}{4}(x-4)$.

例 7.26 设有三角形闸板，两直角边和为l将其竖直放入水中，使一直角与水面重合，另一直角边垂直向下，问两直角边成何比例时，三角形闸板承受水压力最大？ 设水的密度为 1，求出此最大压力.

解：以垂直向下直角边顶点为坐标原点，垂直向上方向为y轴，$x-y$平面与三角板所在平面相平行建立坐标系，并设水平直角边与垂直向下直角边的边长分别为a 与 ka，则有$a+ka=l$，斜边所在直线方程为$y=kx$.



记 $P(k)$ 为闸板承受的水压力，取横向分割，xdy 表示面积，$ka-y$ 为水深，

则有微分关系

$$dP(k)=x(ka-y)dy=k^2(ax-x^2)dx$$

于是

$$P(k)=k^2\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{k^2a^3}{6}=\frac{k^2l^3}{6(k+1)^3}$$

$$P'(k)=\frac{(2k-k^2)l^3}{6(k+1)^4},$$

解得驻点 $k=2$，且 $P'(k)$ 在驻点两则

变号(先正后负)，因此最大压力为 $P(2)=\dfrac{2l^3}{81}$。