基础部分

第三课　线性代数

第 2 章　矩阵代数

2.1 矩阵的概念

由 mn 个数排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**矩阵**，记作 A．其中 a_{ij} 称作矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素．

两个矩阵如果大小一样，就说他们是同型的．

两个同型的矩阵，如果对应的元素也都一样，就说这两个矩阵相等．

若 $m=1$，即 A 是 $1\times n$ 的，$A=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$ 称为行矩阵或行向量；若 $n=1$，即 A 是 $m\times 1$ 的，$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵或列向量；若 $m=n=1$，这是一个 1×1 的矩阵，只有一个元素，就看成是一个数，按数的规律进行运算．

2.2 矩阵的运算

两个同型的矩阵可以做加法，它们的和是和它们同型的矩阵，相加的规则是矩阵中对应的元素相加．即

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，则

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

矩阵加法的运算性质：

（1） **交换律** $A+B=B+A$；

（2） **结合律** $A+(B+C)=(A+B)+C$；

（3） 有零矩阵 0，对任意矩阵 A，有

$$A+0=0+A=A;$$

（4） 任意矩阵 A，都有负矩阵 $-A$，使得

$$A+(-A)=0.$$

其中 $-A=\left(-a_{ij}\right)$．

设 k 是一个数，$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则数 k 和矩阵 A 的数乘为

$$kA=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$$

设k,l是两个常数，A,B是同型矩阵，则

（1）$1A=A$，$0A=0$；

（2）$k(lA)=(kl)A$；

（3）$k(A+B)=kA+kB$；

（4）$(k+l)A=kA+lA$.

设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times l}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{l\times n}$，则

$$AB=\left(c_{ij}\right)_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}.$$

矩阵乘法有性质：

（1）结合律 $A(BC)=(AB)C$；

（2）分配律 $(A+B)C=AC+BC$，

$C(A+B)=CA+CB$.

（3）k是常数，则

$$k(AB)=(kA)B=A(kB).$$

设A,B是n阶方阵，则$|AB|=|A||B|$.

设矩阵A是n阶方阵，A可以自乘，k个A相乘A^k叫A的k次幂.

矩阵的幂有性质：

（1）$A^kA^l=A^{k+l}$；

（2）$\left(A^k\right)^l=A^{kl}$.

设A是n阶方阵，

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个一元n次多项式.

用A代多项式中的x，得到矩阵多项式

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$

矩阵多项式还是一个n阶方阵.

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T .

转置有性质：

（1）$(A^T)^T = A$ ；

（2）$(A+B)^T = A^T + B^T$ ；

（3）$(kA)^T = kA^T$ ；

（4）$(AB)^T = B^T A^T$ ；

例 1 设 $\alpha=\left(1,\quad 0,\quad -1\right)^T$， $A=\alpha\alpha^T$， n 是正整数，求 $\left|aI-A^n\right|$.

例 2（1）命题“ $A^2=0$，则 $A=0$ ”是否正确，若正确，证明之，若不正确，举例说明.

（2） A 是二阶矩阵，求满足 $A^2=0$ 的所有矩阵.

（3）证明 $A^2=0$，且 $A^T=A$，则 $A=0$.

例 3 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，而 $n\ge 2$ 是整数，求 A^n-2A^{n-1} .

例 4 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n .

例 5 设 $\alpha=\left(1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\right)^T$， $\beta=\left(1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}\right)^T$， $A=\alpha\beta^T$，则 $A^n=$?

例 6 设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，求 A^n .

2.3 逆矩阵

设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB=BA=I$$

成立，则称 A 为可逆矩阵． B 是 A 的**逆矩阵**.

矩阵可逆的充分必要条件是矩阵的行列式不等于 0 .

设 A 是 n 阶方阵，若 $\left|A\right|\neq 0$，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,$$

其中，$A^* = \left(A_{ij}\right)^T$ 是 A 的伴随矩阵．

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，若 $ad-bc\neq 0$，则

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

用矩阵的初等行变换．适合任何具体的数字矩阵．

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵的逆矩阵公式：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

逆矩阵有性质：

（1）$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$；

（2）$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，其中常数 $k\neq 0$；

（3）$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，其中 A,B 都是可逆矩阵；

（4）$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$．

例 7 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=0$，求 $(A-I)^{-1}$．

例 8 设 A,B,C 是 n 阶方阵，满足 $ABC=I$，求$\left(AC^{-1}\right)^{-1}$．

例 9 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，求 t．

例 10 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $A^{-1}=?$

例 11 已知 $A,B,A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，并求$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$．

例 12 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$，$B=(A+I)^{-1}(A-I)$，求矩阵 $(I+B)^{-1}$.

例 13 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $(2I-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，求矩阵 A.

矩阵可逆的等价命题

n 阶矩阵 A 可逆

$\Leftrightarrow$ A 的行列式的值不为 0

$\Leftrightarrow$ A 满秩

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ A 的行向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ A 可以通过一系列初等行变换化作单位矩阵

$\Leftrightarrow$ A 可分解为一系列初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow$ A 的列向量可作为 n 维向量空间 R^n 的一组基

$\Leftrightarrow$ R^n 中任意一个向量都可以由 A 的列向量线性表出

$\Leftrightarrow$ 对任意 n 维向量 b，方程组 $Ax=b$ 必有惟一解

$\Leftrightarrow$ A 没有零特征值

$\Leftrightarrow$ AA^T 正定

例 14 设 A 是 n 阶方阵，且 $A\neq 0$,　若 $A^*=A^T$，证明 A 可逆.

例 15 设 A 是实矩阵，$A^TA=I$, $|A|<0$, 证明 $A+I$ 不可逆.

2.4 矩阵方程

含有未知矩阵的等式，如 $AX=B$，就是矩阵方程．矩阵方程的最基本形式是 $AX=B$ 和 $XA=B$，其中 X 是未知矩阵.

设 A 是 n 阶方阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 A 可逆，则矩阵方程 $AX=B$ 有解，其解为

$$X=A^{-1}B.$$

设 A 是 n 阶方阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，若 A 可逆，则矩阵方程 $XA=B$ 有解，其解为

$$X=BA^{-1}.$$

这里要注意的是矩阵 A 是可逆的．如果 A 不是方阵或 A 不可逆，这个公式就不能用了，一般来说，要用待定系数法求解.

例 16 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，满足 $AX+I=A^2+X$，求 X．

例 17 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $AX=BA$，求 X^{100}．

2.5　分块矩阵

在矩阵 A 中，用一些横线和纵线将 A 分成若干小矩阵，这些小矩阵称为矩阵 A 的子块．以子块为元素的矩阵就叫分块矩阵．例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\1&2&3&4\end{pmatrix},$$

令 $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}^T$，则 $A=\begin{pmatrix}I&\alpha\\\alpha^T&4\end{pmatrix}$是分块矩阵．对矩阵进行分块是为了简化计算．我们特别关注的是将矩阵按列分块：

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix},$$

其中，α_i 是列向量．

按行分块：

$$A=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix},$$

其中 β_i 是行向量，以及准对角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},$$

其中 A_i 是方阵．

设 $A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_s\end{pmatrix}$，其中的子块都是方阵，并且假设以下涉及的运算都可行．关于准对角矩阵的运算有以下一些重要结论：

（1）$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s+B_s \end{pmatrix}$；

（2）$kA=\begin{pmatrix} kA_1 & & & \\ & kA_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & kA_s \end{pmatrix}$；

（3）$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}$；

（4）$A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$

（5）$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

（6）$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$．

（7）$r(A)=r(A_1)+r(A_2)+\cdots r(A_s)$

例 18 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix},$$

（1） 计算并化简 PQ；

（2） 证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $b-\alpha^T A^{-1}\alpha \neq 0$．

例 19 设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A，B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

（I）计算 $P^T DP$，其中 $P=\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$

例 20 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，

若 $B=E+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C$ 为

（A）E.　　（B）$-E$.

（C）A.　　（D）$-A$.