基础部分

第一课　微积分

第 8 章　广义积分 阶段综合问题

8.1 广义积分的定义及收敛性

定积分研究的问题:　有界函数在有界区间上的积分.

广义积分研究的问题: 有界函数在无界区间上的积分（第 1 类）.无界函数在有界区间上的积分（第 2 类)。

定义 8.1 (第一类广义积分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内的任意有限区间可积,并且极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 广义积分收敛,其广义积分为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$，若不收敛,则称广义积分发散。

定义 8.2 (第二类广义积分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内的任意有限闭子区间可积，并且极限 $\lim\limits_{B\to b^-}\int_a^B f(x)dx$ 存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分收敛,其广义积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{B\to b^-}\int_a^B f(x)dx。$$

同样我们可以定义其它广义积分的收敛性:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to a^+}\int_A^b f(x)dx。$$

8.2 收敛性的判断准则

8.2.1 第一类广义积分收敛性的判断准则

准则 8.1 若第一类广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛，此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛.

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 方发散时,称广义积分条件收敛.

准则 8.2（比较法）非负函数 $0 \le f(x) \le g(x),\ x \in [a,+\infty)$，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛；若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 一定发散.

准则 8.3 设 $f(x), g(x)$ $[a,+\infty)$ 内的任意有限区间可积，$g(x)$ 非负，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$，则

(1) 当 $\lambda \ne 0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $\lambda = 0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

(3) 当 $\lambda = \infty$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛.

准则 8.4 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ \ (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p \le 1$ 时发散.因此，若

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda \ge 0$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

例 8.1 判断 $\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 的收敛性.

解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0$，存在 $X>0$，使得当 $x > X > 0$ 时，$\ln x < \sqrt[3]{x}$，

$\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}} < \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+1}},\ p=\frac{7}{6}>1$，由直接比较法，收敛.

例 8.2 判断 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$ 的收敛性.

解：与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 比较，由极限比较法，收敛.

例 8.3 判断$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^2 x}$的收敛性.

解：$\dfrac{x^p}{x^p\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln^2 x}\to 0\ \ (x\to+\infty)$，因此 $p>1$ 时 $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^2 x}$收敛.

$p=1$时，$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{B\to+\infty}\left[\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^B\right]=1,$

$p<1$时，与$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$比较，

可知$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{p-1}n^2 x}=+\infty$，

因此答案为：$p\geq 1$时收敛，$p<1$时发散。

8.2.2 第二类广义积分收敛性的判断准则

准则 7.5 若第二类广义积分$\int_a^b|f(x)|dx$收敛，$\int_a^b f(x)dx$一定收敛，此时称$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛. $\int_a^b f(x)dx$收敛而$\int_a^b|f(x)|dx$方发散，则称广义积分条件收敛.

准则 8.6（比较法）非负函数 $0\leq f(x)\leq g(x),\ x\in[a,b]$，若$\int_a^b g(x)dx$收敛，$\int_a^b f(x)dx$一定收敛；若$\int_a^b f(x)dx$发散，$\int_a^b g(x)dx$一定发散.

准则 8.7 函数 $f(x),g(x)$在$[a,b]$内的任意区间上可积，$g(x)$非负，且

$\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $\lambda=0$ 时，广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(3) 当 $\lambda=\infty$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛.

准则 8.8 $\int_a^b\dfrac{1}{(x-b)^p}dx$ 当 $p<1$ 收敛，$p\geq 1$ 时发散．因此，若

$\lim\limits_{x\to b^-}(x-b)^p f(x)=\lambda\geq 0$，且 $p<1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

例 8.9 判断广义积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ 的收敛性.

解：$\int_0^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx,$$

第一个积分显然收敛，对第二个积分令 $x-\pi=t,\ dx=dt$，

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，收敛.

例 8.10 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}dx$ 的收敛性.

解：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}dx$

$$=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$$

对第一个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^{p-1}}$ 等价（$x\to 0$），

$p-1<1,\quad \Rightarrow p<2$收敛.

对第二个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$与$\frac{1}{x^q}$进行比阶，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p-q}}=\begin{cases}0 & p>q\\ \frac{\pi}{2} & p=q\end{cases}$$

因此，当$p\ge q>1$时第二个积分收敛。综合上述分析，$1<p<2$时积分收敛。

例 8.11 计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$。

解：取变换$x=\tan t, dx=\frac{dt}{1+t^2}$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{1+5\tan^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+4\sin^2 t}=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\arctan 2$$

例 8.12 设常数$a>0$,若

$\int_0^a\frac{1}{1+x^2}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$,则$a=$__ 。

解：$\arctan a=\dfrac{\pi}{2}-\arctan a$，

$\arctan a=\dfrac{\pi}{4},a=1$.

例 8.13 计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

解：$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d(\dfrac{1}{x})$

$$=-\frac{1}{x}arctanx\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

例 8.14 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$____________。

$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\sec t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\dfrac{\pi}{2}$ 或令 $x=\dfrac{1}{t}$，用凑微分法

则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ .$$

例 8.15 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=$_____.　　答案：$\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}$.

解: 取变换 $e^x=\sec t$，则

$$x=\ln(\sec t),\quad e^x dx=\sec t\tan t dt,$$

$$I=\int_{\arccos e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan t}dt=\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}=\arcsin e^{-1}$$

例 8.16 计算广义积分 $\int_0^1 x\ln^n x dx$。

[解] 采用分部积分，即有

$$I_n=\frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{n}{2}I_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)I_{n-2}=\cdots=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}.$$

或 $I_1=-\frac{1}{4}$，$I_n=-\frac{n}{2}I_{n-1}$。

8.3 阶段复习综合问题

定积分定义在考研中的应用 用于求特定极限

运用定积分求极限常用公式为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}k)=\int_a^b f(x)dx。$$

其中 $\frac{b-a}{n}k = f(\xi_k)$，$\frac{b-a}{n} = \Delta x_k$。

例 8.17　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。答案：$\frac{1}{e}$。（清华大学考研辅导班 2004 强化班例题）

[解]　记 $y_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，则

$$\ln y_n = \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k - \ln n,$$

或记为

$$\ln y_n = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}\ln k - n\ln n) \qquad = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n},$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$ 等于广义积分 $\int_0^1 \ln x dx$ 的值，

相应于将区间 $[0,1]$ 分割成 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ $(k = 1,2,\cdots,n)$ 的积分和式的极限，

且积分和式中的 $f(\xi_k) = \ln\frac{k}{n}$。

注意到广义积分 $\int_0^1 \ln x dx$ 为第二类广义积分，并且收敛，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x dx$$

$$=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$。

类似方法可以计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}。$$

其中 $\Delta x_k=\dfrac{1}{k}, \sin\xi_k=\sin\dfrac{k\pi}{n}$。请看 2004 年考题：

（2004-209） $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$

等于　　[B]

$(A)\int_1^2\ln^2 xdx.$　　　　$(B)2\int_1^2\ln xdx.$

$(C)2\int_1^2\ln(1+x)dx.$　　　$(D)\int_1^2\ln^2(1+x)dx.$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$=2\int_0^1\ln^2(1+x)dx=2\int_1^2\ln^2 tdt$=（B）。

$$=2\int_1^2\ln^2 tdt=4\ln^2 2-8\ln 2+4$$

例 8.18 设 $a_n = \dfrac{3}{2}\int_0^{n/(n+1)} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n =$ [B]。

(A) $(1+e)^{3/2}+1$。　　(B) $(1+\dfrac{1}{e})^{3/2}-1$。

(C) $(1+\dfrac{1}{e})^{3/2}+1$。　　(D) $(1+e)^{3/2}-1$。

解: 积分得

$$a_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{n/(n+1)} (1+x^n)^{1/2}\, d(1+x^n)$$

$$= \frac{1}{n}(1+x^n)^{3/2}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}[(1+(\frac{n}{n+1})^n)^{3/2}-1]$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}[1+(\frac{n}{n+1})^n]^{3/2}-1 = (1+\frac{1}{e})^{3/2}-1$$

例 8.19 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 f(1)=0，则

$f(x)$= $\underline{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$.

【分析】 先求出 $f'(x)$ 的表达式，再积分即可。

【解】 令 $e^x = t$，则 $x = \ln t$，于是有

$$f'(t) = \frac{\ln t}{t}，\quad 即 \quad f'(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

积分得 $f(x) = \int \dfrac{\ln x}{x}dx = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$. 利用初始条件 $f(1) = 0$，得 C=0，故所求函数为

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

例 8.20 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & ,-\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1 & ,x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$,

则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{2} \quad}$.

【分析】对分段函数的定积分，先取区间变换：$x-1=t$，再利用对称区间上奇偶函数的积分性质。

【解】令 $x-1=t$，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

例 8.21 设 $F(x)=\begin{cases} e^{2x} & ,x\le 0 \\ e^{-2x} & ,x>0\end{cases}$, S 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$之间的面积。对任何 $t>0$，$S_1(t)$ 表示矩形$-t\le x\le t$，$0\le y\le F(t)$的面积. 求

(1) $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式；

(2) $S(t)$的最小值.

【分析】曲线 $y=F(x)$关于 y 轴对称，x 轴与曲线 $y=F(x)$围成一无界区域，所以，面积 S 可用广义积分表示. ，属于基本题型。

【解】(I) $S=2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1$,

矩形$-t\le x\le t$，$0\le y\le F(t)$的面积为 $S_1(t)=2te^{-2t}$,

因此 $S(t)=1-2te^{-2t}$，$t\in(0,+\infty)$.

(II) 由于 $S'(t) = -2(1-2t)e^{-2t}$，

故 $S(t)$的唯一驻点为 $t = \frac{1}{2}$，

又 $S''(t) = 8(1-t)e^{-2t}$，$S''(\frac{1}{2}) = \frac{4}{e} > 0$，

所以，$S(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{e}$为极小值，它也是最小值.

例 8.22 求曲线

$$y(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos t}{\sqrt{x^2 + 2x\sin t + 1}} dt(-2 \le x \le 2)$$ 与　直　线

$x = -2,\ x = 2,\ y = 0$所围图形绕 x 轴旋转而成的立体体积.

解： $$y(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos t}{\sqrt{x^2 + 2x\sin t + 1}} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(x^2 + 2x\sin t + 1\right)}{\sqrt{x^2 + 2x\sin t + 1}}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x\sin t + 1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = |x+1| - |x-1|$$

$$= \begin{cases} -2 & x \le -1 \\ 2x & -1 < x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$$

故 $y(x)$为奇函数，与直线 $x = -2,\ x = 2,\ y = 0$

所围图形绕 x 轴旋转而成的立体体积应按偶函数计算。

$V=2\int_0^2\pi y^2dx=2\pi\left(\int_0^1(2x)^2dx+\int_1^2 2^2dx\right)=\frac{32}{3}\pi$ 例 8.23 设

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且

$$f(x)>0,\ f(-t)=f(t),$$

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt$$

(1) 证明当 $x\in[-a,a]$ 时，$F'(x)$ 单调增；

(2) x 为何值时 $F(x)$ 取最小值；

(3) 当把 $F(x)$ 的最小值记为 a 的函数 $f(a)-a^2-1$ 时，试求 $f(x)$.

解：(1) $x\in[-a,a]$，

$$F(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_x^a(t-x)f(t)dt$$
$$=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+\int_x^a tf(t)dt-x\int_x^a f(t)dt$$

$$F'(x)$$
$$=xf(x)+\int_{-a}^{x}f(t)dt-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_x^a f(t)dt$$
$$=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_a^x f(t)dt$$
$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0,\quad x\in[-a,a]$$

故 $F'(x)$ 单调增.

(2)

$$F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_a^x f(t)dt$$
$$=\int_a^{-x}f(-u)d(-u)+\int_a^x f(t)dt$$
$$=-\int_a^{-x}f(t)dt+\int_a^x f(t)dt=\int_{-x}^{x}f(t)dt$$

因为 $f(x)>0$，$F'(x)=0$ 有唯一解 $x=0$. 由 $F''(0)>0$ 知 $x=0$ 是 $F(x)$ 的极小值点.

（3）$F(0)=2\int_0^a tf(t)dt = f(a)-a^2-1$，$f(0)=1$。对 a 求导

得到一阶线性方程 $2af(a)=f'(a)-2a$，

$$f(a)=e^{a^2}(\int 2ae^{-a^2}da+C)=Ce^{a^2}-1,$$

由 $f(0)=1,\quad C=2$，得到 $f(x)=2e^{x^2}-1$。

例 8.24 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导。数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b,\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0。$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$。

解 （泰勒公式，无穷小的运算，或导数概念，极限与无穷小的关系）

由 $f(x)$ 在 x_0 处的可微性，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 于是

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0)$$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right].$$

又因为 $a<x_n<x_0<y_n<b$，所以得到：

$$0\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\right|$$

$$0 \le \left|\frac{o(x_n - x_0)}{y_n - x_n}\right| \le \left|x\frac{o(x_n - x_0)}{x_n - x_0}\right|,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0)$。

例 8.25 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x}$，其中$[t]$表示不超过$t$的最大整数。

解 考虑充分大的x： $n < x < n+1$时有

$$\int_0^x (t-[t])dt = \int_0^1 (t-[t])dt + \int_1^2 (t-[t])dt + \cdots \int_{n-1}^n (t-[t])dt + \int_n^x (t-[t])dt$$

$$= \int_n^x (t-[t])dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} (t-[t])dt$$

令$u = t-(k+1)$，$du = dt$，则有

$$\int_{k-1}^{k} (t-[t])dt$$

$$= \int_0^1 [u-k+1-(k-1)]du = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}$$

而 $\int_n^x (t-[t])dt = \int_0^{x-n} udu < \int_0^1 udu = \dfrac{1}{2}$，

因此$\dfrac{n}{2} < \int_0^x (t-[t])dt < \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2}$，

于是$\dfrac{n}{2(n+1)} < \dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x} < \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2})$，

由夹逼定理得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x} = \dfrac{1}{2}$。

例 8.26 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0) = -1$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\cos u du = 1,$$

则当 $x>0$ 时，$\frac{d}{dx}[\int_0^x f(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{x})dt] =$ （ C ）。

(A) 0。　　　　(B) $f(\cos x)\cos x$。

(C) 1。　　　(D) -1。

解: 令 $t = x\sin u$，则有

$\int_0^x f(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{x})dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)x\cos u du = 1$，答案：(C)。

例 8.27 设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带 Lagrange 余项的一阶麦克劳林公式公式。

(2) 证明在 $[-a,+a]$ 上至少存在一点 η，使得

$$a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

[错误做法] 由泰勒公式，得

$$f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2,$$

其中 $x_0 \in (-a,a)$。两边从 $-a$ 到 a 积分，得

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{3}a^3 f''(x_0).$$

[解] (1) $\forall x \in [-a,a]$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中 ξ (变量)在 $0, x$ 之间。

(2) 由上式两边取积分得到

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(0)xdx + \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{2} f''(\xi)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx$$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上连续，因此 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上存在最大最小值 m, M，使 $m \le f''(x) \le M$。

于是由积分估值定理可得到

$$m\int_{0}^{a} x^2 dx \le \int_{-a}^{a} f(x)xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx \le M\int_{0}^{a} x^2 dx$$

例 8.28　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1} \frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx$.

[解] $\int_{0}^{1} \frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx$

$$= \int_{0}^{1} \frac{dx^n}{1+\sin x} = \left.\frac{x^n}{1+\sin x}\right|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \frac{x^n \cos x dx}{(1+\sin x)^2}$$

记 $I_n = \int_{0}^{1} \frac{x^n \cos x}{(1+\sin x)^2}dx$，则

$$0 < I_n \le \int_{0}^{1} x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1} \frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx = \frac{1}{1+\sin 1} + \lim\limits_{n\to\infty} I_n$

$$= \frac{1}{1+\sin 1}。$$

例 8.29 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$a>0$，则

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(t+\alpha)-f(t-\alpha)]dt=$ [B]。

(A) $f'(2\alpha)$。 (B) $f'(0)$。

(C) $f'(\alpha)$。 (D) $\frac{1}{2}f'(0)$

解：由罗必达法则

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(t+\alpha)-f(t-\alpha)]dt$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^{2\alpha}f(x)dx-\int_{-2\alpha}^{0}f(x)dx\right]}{8\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2f(2\alpha)-2f(-2\alpha)}{8\alpha}=f'(0)$$

例 8.30 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量

$\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ. (B) α,γ,β.

(C) β,α,γ. (D) β,γ,α. [B]

【解】

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x\cos t^2dt}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2}=0$，可排除(C),(D)选项，另外

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$$

$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}=\infty$，可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B).

例 8.31 设 $f(x)=\begin{cases}1\,,\ x>0\\0\,,\ x=0\\-1\,,\ x<0\end{cases}$，

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续.
(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导.
(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.
(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.　　[B]

【错误分析】先求分段函数 $f(x)$ 的变限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，再讨论函数 $F(x)$ 的连续性与可导性即可。

【正确分析】 $f(x)$ 可积，$F(x)$连续； $f(x)$ 有第一类间断点，$F(x)$不可导，故选(B).

【不需要的详解】

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x(-1)dt=-x$；

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_0^x 1dt=x$，当 $x=0$ 时，$F(0)=0$. 即 $F(x)=|x|$，

显然，$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导. 故选(B).

例 8.32 设 $f(x)$ 在 $[0,\beta]$ 上连续且单调减少，若 $0<\alpha<\beta$，证明

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx<\beta\int_0^\alpha f(x)dx。$$

[证] （方法 1）

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$

$$=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx+\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$

$$=\alpha(\alpha-\beta)f(\xi_1)-\alpha(\alpha-\beta)f(\xi_2)$$
$$=\alpha(\alpha-\beta)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]<0$$

（方法 2）$\forall x\in[\alpha,\beta]$，令

$$F(x)=\alpha\int_0^x f(t)dt-x\int_0^\alpha f(t)dt,\quad F(\alpha)=0$$

$$F'(x)=\alpha f(x)-\int_0^\alpha f(t)dt$$
$$=\alpha f(x)-\alpha f(\xi)<0,\ \xi\in(o,\alpha).$$

（方法 3）对$\int_0^\beta f(x)dx$取区间变换$t=\dfrac{\alpha}{\beta}x$，

则$dt=\dfrac{\alpha}{\beta}dx$，且$\dfrac{\beta}{\alpha}>1$，于是

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$
$$=\beta\int_0^\alpha f(\frac{\beta t}{\alpha})dt-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$
$$=\beta\int_0^\alpha f(\frac{\beta t}{\alpha})dt-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$
$$=\beta\int_0^\alpha (f(\frac{\beta t}{\alpha})-f(t))dt<0。$$

例 8.33 设$a>0$，$f(x)$在$[-a,+a]$上有二阶连续导数，且$f(0)=0$，

（1）写出$f(x)$的带 Lagrange 余项的一阶麦克劳林公式公式。

（2）证明在$[-a,+a]$上至少存在一点η，使得

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)dx。$$

[解]（1）$\forall x\in[-a,a]$有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中ξ在$0,x$之间。

（2）由上式两边取积分得到

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(0)xdx + \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{2} f''(\xi)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx,$$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上连续，因此 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上存在最大最小值 m, M，使 $m \le f''(x) \le M$。

于是由积分估值定理可得到

$$m\int_{0}^{a} x^2dx \le \int_{-a}^{a} f(x)xdx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx \le M\int_{0}^{a} x^2dx,$$

即有　　$$m \le \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx \le M,$$

对 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上应用连续函数的介值定理，则在 $[-a,+a]$ 上至少存在一点 η，使得

$$a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

注意如下错误做法。由泰勒公式，得

$f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2} f''(x_0)x^2$，其中 $x_0 \in [-a,a]$。两边从-a 到 a 积分，得

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{3}a^3 f''(x_0)。$$

错误原因：x_0 在 $0, x$ 之间且与 x 有关。