基础部分

第一课　微积分

第 9 章 常微分方程 (一) 基本概念 一阶可解方程、高阶可降价方程

微分方程的基本概念
一阶可积类型微分方程的求解
高阶可降阶类型方程的求解
应用问题举例 综合例题

9.1 微分方程的基本概念

9.1.1 引言与实例

- 什么是微分方程？

  包含未知函数的导数或微分的方程式就称为微分方程.

  微分方程是用函数与导数的关系式来表达(一类)函数的一种方法。

- 微分方程的基本问题:方程类型与求解方法，解的定性研究，列方程

9.1.2 微分方程其及其分类：

- 常微分方程和偏微分方程
- 微分方程的阶：方程中出现的最高阶导数的阶数称为这个微分方程的阶.

  n 阶常微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$$

- 线性与非线性方程

如果在上述方程中，函数 f 关于未知函数 y 及其各阶导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ 都是一次整式,则称这个方程是线性微分方程，否则称为非线性微分方程． n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

其中 $a_i(x), (i = 0,1,\ldots,n-1), f(x)$ 是已知函数.

9.1.3 “解”的概念

满足微分方程的函数，称为该方程的解。即将此函数代入方程，使其成为恒等式。

或更细致一点，如果函数 $y = y(x)$ 在区间 I 上具有 n 阶导数，且将其代入某 n

阶微分方程之后，使之成为恒等式，则称函数 $y = y(x)$ 是方程在区 I 上的一个解

- 通解（一般解）与定解条件

微分方程的解中都包含了若干任意常数．一般情况下，在 n 阶微分方程的解中含有 n 任常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，也就是说，n 阶微分方程的解的表达式为

$$y = f(x, c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

这种包含了 n 个任常数 称为微分方程的通解（一般解）．

一个微分方程虽然可以有无穷多个解，若从中确一个所需要的解.则需要对微分方程附加某些条件,即所谓定解条件．适合定解条件的解称为微分方程的特解.

对于 n 阶微分方程,为了从通解中找到所需要的解,需要附加 n 个初始值条件，即

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \ , y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

这样的定解条件称为初值条件,上述问题就称为初值问题.

例 9.1 设 $p(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且不恒等于零， $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同特解,则下列结论中错误的是(C)。

(A) $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv$ 常数（其中 $y_1(x) \neq 0$）。

(B) $C(y_1 - y_2)$ 构成方程的通解。

(C) $y_1 - y_2 =$ 常数。

(D) $2y_1(x) - 5y_2(x)$ 是该微分方程的一个特解。

解：首先,在 $p(x)$ 不恒等于零的条件下，微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 没有非零常数解,如果 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是两个不同的解,那么 $y_1 - y_2$ 也是这个方程的解,从而 $y_1 - y_2$ 不能等于非零常数.

导数运算是线性运算，从解的概念可知,，(A), (B) 是成立的。同理，（D）也是成立。

例 9.2　试研究 $\begin{cases} y' = x^3 + xy^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 之解所确定函数 $y = y(x)$ 的增减区间，极值点及凸凹区间。

解：$\begin{cases} y' = x\left(x^2 + y^2\right) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' \geq 0, if \;\; x \geq 0 \\ y' < 0, if \;\; x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \uparrow, if \;\; x \geq 0 \\ y \downarrow, if \;\; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x \in R} y(x) = y(0) = 0 \\ y(x) \geq 0, \forall x \in R \end{cases};$$

$$\Rightarrow y'' = x^2 + y^2 + x(2x + yy'),$$

$$= 3x^2 + y^2 + x^4 y + x^2 y^3 \geq 0$$

$y = y(x)$ 是下凸的函数。

9. 2 一阶可积类型

9.2.1 分离变量法

- 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$，或者

$f(x)dx = g(y)dy$ 的方程称为变量分离方程.

- 解法：分离变量后，两边积分：

$$f(x)dx = g(y)dy \Rightarrow \int u(x)dx = \int v(y)dy + C;$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{g(y)}.$$

例 9.3 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}, & (x_0y_0\neq 0)\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}ydy=-xdx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

解 1: $\begin{cases}ydy=-xdx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$,

$$\Rightarrow\begin{cases}\int ydy=\int -xdx+C\\ y(x_0)=y_0\end{cases},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+C\\ y(x_0)=y_0\end{cases},$$

$\Rightarrow x^2+y^2=\left(x_0^2+y_0^2\right)$ 或

$$\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{\left(x_0^2+y_0^2\right)-x^2}, & if\ \ y_0>0,\\ y=-\sqrt{\left(x_0^2+y_0^2\right)-x^2}, & if\ \ y_0<0,\end{cases}$$

解 2:

$$\begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{y_0}^{y} ydy = \int_{x_0}^{x} -xdx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

9.2.2 可化为可分离变量型的方程

- 方程：齐次方程: $\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$；
- 解法：变量置换。令 $u(x) = \dfrac{y(x)}{x} \Rightarrow y' = xu' + u$,

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}) \Rightarrow xu' + u = g(u) \Rightarrow u' = \frac{g(u) - u}{x}。$$

分离变量得到 $\dfrac{du}{g(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$

例 9.4，$xy' = y(\ln y - \ln x)$.

解：方程化为

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} \xrightarrow{y = xu(x)} u + xu = u \ln u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln Cx$$

$$\Rightarrow y = xe^{1+Cx}。$$

9.2.3 一阶线性方程

- 方程：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$
- 解法：(1) 变易常数法：先解齐次方程，变易常数。

(1) $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$

先解齐次：$\dfrac{dy}{y}=-p(x)dx$

$$\frac{dy}{y}=\ln C-\int p(x)dx,$$

齐次解为 $y_1(x)=Ce^{-\int p(x)dx}$。

若 $y=y(x)$ 为 (1) 的解，将 (1) 化为

$$\frac{dy}{y}=-p(x)+\frac{q(x)}{y(x)},$$

$$\ln y=+\ln C_1-\int p(x)dx+\int\frac{q(x)}{y(x)}dx,$$

$$y(x)=C_1e^{-\int p(x)dx}\cdot e^{\int\frac{q(x)}{y(x)}dx}$$，或记为

$$y(x)=C_1\cdot e^{\int\frac{q(x)}{y(x)}dx}e^{-\int p(x)dx},$$

记$C(x)=C_1\cdot e^{\int\frac{q(x)}{y(x)}dx}$，$y=y(x)$可记为

$$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

只需求$C(x)$（变易常数法）

$$y'(x)=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$代入（1）

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$+C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

得到$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$，

于是$C(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$。

因此$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)$

（2）积分因子法：方程两边乘函数 $e^{\int p(x)dx}$，

$$e^{\int p(x)dx}(y'+p(x)y)=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y(x)e^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$y(x)e^{\int p(x)dx}=C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$，或记为

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)。$$

例 9.5 解方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$

解 1: $y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(C+\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx)$

$$=\frac{1}{x}(C+\int\sin x\cdot dx)=\frac{1}{x}(C-\cos x)。$$

解 2: 积分因子为 $e^{\int p(x)dx}=x$，两边同乘 x，得 $x\frac{dy}{dx}+y=\sin x$.

即有 $(x\,y)'=\sin x$，　两边积分：$x\,y=\int\sin x dx+C$

一般解为 $y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$。

例9.6 微分方程 $\begin{cases} y'-\frac{1}{x}y=x\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$ 的解为___。

解：$y(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}(C+\int x\sin xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx)$

$$y(x)=x(C+\int\sin x\cdot dx)=x(C-\cos x)$$

由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，得到

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(C-0)=0,\ C=0，$$

特解为 $y=-x\cos x$。

9.2.4 贝努利方程

- 方程：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$（$n\neq 0,1$）

例 9.7 求解 $y'+\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x^2}{2y}$，$n=-1$。

$$2yy'+\frac{1}{x}y^2=x^2，2(y^2)'+\frac{1}{x}y^2=x^2，$$

令$u=y^2=y^{1-n}$，得到一阶线性方程

$$2u'+\frac{1}{x}u=x^2，\text{或：}u'+\frac{1}{2x}u=\frac{x^2}{2}。$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int\sqrt{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}}+C\right)。$$

一般解法：用 y^n 除以方程两端将其化为，

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{n-1}=q(x)，$$

当$n=0$：一阶线性方程

当$n=1$：可分离变量类型。

当$n\neq 0, or\ 1$时：方程化为：

或 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y^{n-1}=q(x)$，

这显然是关于y^{1-n}的一个一阶线性方程．显然可令$u(x)=y^{1-n}$

$u'(x)=(1-n)y^{-n}\cdot y'$，或记为

$$y' = \frac{1}{1-n} y^n \cdot u'(x)$$

$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$，得到一阶线性方程

$\dfrac{1}{1-n}u'(x) + p(x)u = q(x)$，或记成标准形

$$u'(x) + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

例 9.8 解方程 $x^2y' + xy = y^2$.

解：化为贝努利方程:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2 \text{ , } n = 2,$$

令 $u = y^{-1}$，方程化为 $u' - \dfrac{1}{x}u = -\dfrac{1}{x^2}$，

$u = x(C - \int \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{x}dx)$，得到 $u = \dfrac{1}{2x} + Cx$。

原方程的解为 $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2x} + Cx$。

9.2.5 可凑成复合函数微分形式的方程，积分因子

能凑全微分的部分先凑好；主要公式是

$$udv + vdu = d(uv),\ \frac{udv - vdu}{u^2} = d\left(\frac{v}{u}\right)$$

例 9.9 解方程 $y\,dx + (x - 3x^3y^2)dy = 0$.

解: $ydx + (x - 3x^3y^2) = 0$

$$d(xy)-3x^3y^2dy=0$$

两边同乘 $\dfrac{1}{(xy)^3}$ ， $\dfrac{d(xy)}{(xy)^3}-\dfrac{3dy}{y}=0$，

$$\frac{-1}{2}d\left(\frac{1}{(xy)^2}\right)-3d(\ln y)=0$$，得

$$d\left(\frac{-1}{2(xy)^2}-\ln y^3\right)=0$$，

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2(xy)^2}+3\ln y=c$。

剩下部分利用已知的积分因子来试， 例如：对 $udv-vdu=0$ 可利用的有如下积分因子：

$\dfrac{1}{u^2}$： $\dfrac{udv-vdu}{u^2}=d(\dfrac{v}{u})=0$

$\dfrac{1}{uv}$： $\dfrac{udv-vdu}{uv}=d\left(\ln\dfrac{v}{u}\right)$；

$\dfrac{1}{u^2+v^2}$：

$$\frac{udv-vdu}{u^2+v^2}=\frac{\frac{udv-vdu}{u^2}}{1+\frac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=d\left(\arctan\frac{v}{u}\right)$$

$\frac{1}{u^2-v^2}$：

$$\frac{udv-vdu}{u^2-v^2}=\frac{\frac{udv-vdu}{u^2}}{1-\frac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2}=d\left(\ln\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\right)$$

例 9.10 解方程 $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

解 1：齐次方程

原式 $\xrightarrow{u=y/x} xu'+u=\frac{1+u}{1-u}$

解 2：凑微分形式：原方程化为

$$\Rightarrow xdy-ydy=xdy+ydx$$

$$\Rightarrow xdy-ydx=ydy+xdx$$

$$\Rightarrow xdy-ydx=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Rightarrow d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}d\ln\left(x^2+y^2\right)$$ ，

$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$ 为一般解。

9.3 高阶可降阶类型方程的求解

一般情况下,求解高阶方程有困难.处理高阶方程的思路之一是设法降低方程的阶.在这里,重点对二阶方程 $y''=f(x,y,y')$ 的几种右端函数缺变量的情形进行讨论.

9.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 类型

可通过 n 次积分可以得到通解. 逐次积分得到一般解。

9.3.2 $F(x,y^{(k)},\cdots y^{(n)})=0$ 类型

（$1\le k<n$，不显含 y）

令 $p(x)=y^{(k)}$，

$p(x)=y^{(n)}=p^{(n-k)}y''=p'(x)$，方程变成：

$F(x,p',\cdots p^{(n-k)})=0$ ，可降 k 阶。

重点为 $y''=f(x,y')$，降阶得到 $p'=f(x,p)$，这是一阶方程，有可能求解。

例 9.11 解方程 $xy''=y'\ln y'$.

解:令 $p(x) = y'$，代入方程,则原方程化为 $x\dfrac{dp}{dx} = p\ln p$，

由此解出 $p = e^{c_1 x}$，于是原方程的通解为

$y = \int p dx = \dfrac{1}{c_1} e^{c_1 x} + c_2$.

例 9.12 方程 $xy'' + y' = 3$ 满足条件 $y(1) = 0, y'(1) = 1$ 的解。

解：设 $u = y'$，则原方程化为 $u' + \dfrac{1}{x}u = \dfrac{3}{x}$，

解得 $u = \dfrac{1}{x}(C_1 + 3x)$，

由 $y'(1) = u(1) = 1$ 解出 $C_1 = -2$，由

$y' = u = \dfrac{1}{x}(-2 + 3x)$

得出 $y = 3x - 2\ln x + C_2$，由 $y(1) = 0$ 得出 $C_2 = -3$.

9.3.3 $F(y, y^{(k)}, \cdots y^{(n)}) = 0$（不显含 x）

令 $p = p(y) = \dfrac{dy}{dx}$，

$\dfrac{d^2 y}{d x^2} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$，或 $y'' = pp'$

重点为 $y'' = f(y, y')$ 类型

令 $p = p(y) = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = pp'$，

代入方程得 $p\dfrac{dp}{dy}=f(p,y)$.

于是得到一个关于未知函数 $p(y)$ 和自变量 y 的一阶方程.

例 9.13 解方程 $y''=\dfrac{1+(y')^2}{2y}$.

解：令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程

得到

即 $\dfrac{2pdp}{1+p^2}=\dfrac{dy}{y}$，两端积分得到

$$\ln(1+p^2)=\ln y+\ln c_1 .$$

即 $1+(\dfrac{dy}{dx})^2=c_1y$. 分离变量,将上式改写成

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1y-1}}=dx.$$

解此方程得 $\pm\dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2$,

化简得 $\dfrac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$.

例 9.14 求解 $yy''-(y')^2=0$。

解：令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=pp'$, 得到

$ypp' - p^2 = 0$， $p = 0$（非平凡解），$y = C$。

$p \neq 0$时，$yp' - p = 0$，得到 $p = C_1 y = y'_x$，

$y = C_2 e^{C_1 x}$ 为一般解。

9.4 应用问题举例

(一) 微分方程应用的基本方法：

规律翻译法和微量分析法。

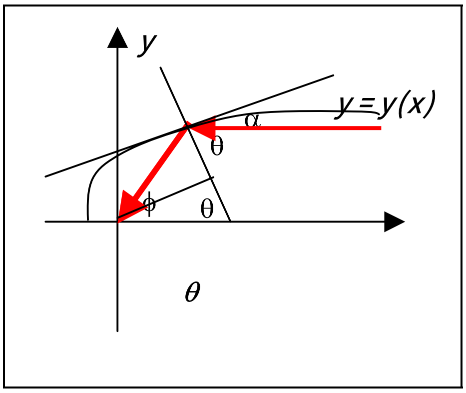
(二) 微分方程应用的基本步骤：

列方程；解方程；解的分析。

(三) 微分方程应用题的基本范围.

例 9.15 求曲线 $y = y(x)$，使其上每点 $M(x, y)$ 的法线平分过这点的水平线与矢径所交之角。

解:(1) 列方程：作示意图如右. 从几何分析可知：$\alpha = \dfrac{1}{2}\varphi$ ，由于：



$$\tan\alpha = y'(x),\ \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\tan\alpha = \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

将 $\tan\alpha = y'(x), \tan\varphi = \dfrac{y}{x}$，

代入上式关系 $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$.

(2) 解方程:(法一) 这是齐次方程⋯.

(法二) 原方程变形为

$$ydy + xdx = \sqrt{x^2 + y^2}dx \qquad \frac{ydy + xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx$$，凑

微分得到

$$\frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = dx$$

$\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$，$y^2 = 2cx + c^2$,抛物线。

例 9.16 将质量为 m 的物体，徐徐沉入静止的海面，受到的阻力与下沉速度成正比，比例系数 $k > 0$。求运动规律 $x = x(t)$ 及其渐近线。并问时间足够大时，该物体的运动规律如何？

解：取向下为高度正方向的坐标系,海水平面为原点，建立坐标系。

下沉方程及条件为 $\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - k\dfrac{dx}{dt} \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$；

令 $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$，$\begin{cases} my' + ky = mg \\ y(0) = 0 \end{cases}$，

$$y(t) = e^{-\frac{k}{m}t}(C_1 + \int ge^{\frac{k}{m}t}dt)$$

$$= e^{-\frac{k}{m}t}(C_1 + \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}) = C_1e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$ 由

$y(0) = 0$，得到 $C_1 = -\dfrac{mg}{k}$，

$$y(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})=\frac{dx}{dt},$$

$$x(t)=\frac{mg}{k}(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})+C_2,$$

由 $x(0)=0$ 得到 $0=\frac{m^2g}{k^2}+C_2$，$C_2=-\frac{m^2g}{k^2}$，

$$x(t)=\frac{mg}{k}(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})-\frac{m^2g}{k^2}$$

$$=\frac{m^2g}{k^2}(\frac{k}{m}t+e^{-\frac{k}{m}t}-1)$$

$x(t)\sim\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}$（$t\to+\infty$）。

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{m^2g}{k^2t}(\frac{k}{m}t+e^{-\frac{k}{m}t}-1)=\frac{mg}{k}=a$$

$$b=\lim_{t\to+\infty}[\frac{m^2g}{k^2}(\frac{k}{m}t+e^{-\frac{k}{m}t}-1)-\frac{mg}{k}t]=-\frac{m^2g}{k^2}$$

渐近线为 $X(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}$。

例 9.17　设有单位质量的质点Q，受到沿x方向的力$P = A\sin\omega t$的作用沿x轴运动．及空气阻力与速度成正比，比例系数$k>0$，其中A,ω为常数．如果$x(0)=0, x'(0)=0$，试求质点运动规律．

解:根据 Newton 第二定理,质点运动方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt} + A\sin\omega t \\ x(0)=0,\ x'(0)=0 \end{cases}$$

解：这是$y'' = f(x, y')$型方程，令$p(t)=x'(t)$，则方程变成：

$$\begin{cases} p' + k\,p = A\sin\omega t \\ p(0)=0 \end{cases},$$

这是一阶线性方程，两边同乘$e^{\int k\,dt} = e^{kt}$，

$$\left(p\,e^{kt}\right)' = Ae^{kt}\sin\omega t,$$

$$\left(p\,e^{kt}\right)\Big|_0^t = \int_0^t Ae^{kt}\sin\omega t\,dt,$$

$$x'(t) = e^{-kt}\int_0^t Ae^{kt}\sin\omega t dt = \int_0^t Ae^{-k(t-u)}\sin\omega u du$$

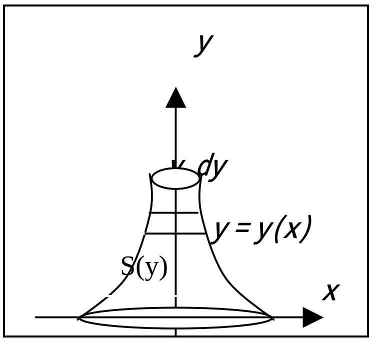
$$x(t) = \int_0^t\left(\int_0^t Ae^{-k(t-u)}\sin\omega u du\right)dt$$

$$= \int_0^t d\tau\int_0^\tau Ae^{-k(\tau-u)}\sin\omega u du。$$

例 9.18 作一个柱台座，其上受力为P，使每个断面上的压强都一样(等强度柱台座)。

解：列方程：设高方向坐标为 y，柱台座断面面积函数为 $S=S(y)$，$S(h)=S_0$，高为 h.

两种考虑：



（方法 1）微元平衡分析：重量增加所引起的压力变化=面积增加所引起的压力变化

$$-\rho S(y)dy = pdS(y),$$
$$-\rho S(y)dy = pS'(y)dy \quad ,$$

$\dfrac{S'(y)}{S(y)}=-\dfrac{\rho}{p}$。进一步确定参数 p。

（方法 2）整体平衡分析：

$$\frac{P+\rho\int_y^h S(y)dy}{S(y)}=p,$$

$$P+\rho\int_y^h S(y)dy = pS(y),$$

$$-\rho S(y)= pS'(y) \Rightarrow \frac{S'(y)}{S(y)}=-\frac{\rho}{p},$$

进一步确定参数 p。

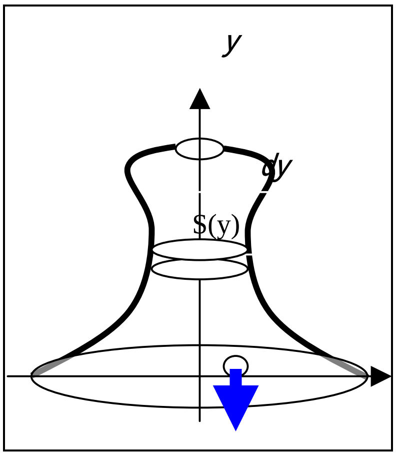
解方程：$\begin{cases} S'(y)+\dfrac{\rho}{p}S(y)=0 \\ S(h)=S_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow S(y)=S_0 e^{-\frac{\rho}{p}(y-h)}，\ p=\frac{P}{S_0}$$

注：若对于由函数 $y=y(x)$ 绕 y 轴的旋转体，则有 $S(y)=\pi x^2, S_0=\pi x_0^2$；

$$\pi x^2=S_0 e^{-\frac{\rho}{p}(y-h)} \Rightarrow y=h-\frac{2p}{\rho}\ln\frac{x}{x_0}。$$

例 9.19 一容器总高为 H，在高度为 h 处的断面面积为 $S=S(h)$，在底部有一面积为 S_0 的小孔，已知水流出速度 v 是水深 h 的函数，$v=\mu\sqrt{2gh}$，若在容器装满水后，将底部小孔打开，问多久水将流尽？



解：设 y 轴方向为水深

- 列方程：微元平衡分析，t 到 $t+dt$ 的时段内：

水深变化 dy 引起的水量变化

等于 dt 时间内流出的水量

即：$\begin{cases}-S(y)dy=\mu\sqrt{2gy}\,dt\\ y(0)=h\end{cases}$

- 解方程：这里未知函数是 $y=y(t)$，

$S(y)$ 是已知函数，

$$\frac{-S(y)dy}{\sqrt{y}}=\mu\sqrt{2g}\,dt,$$

$$\int_h^y\frac{-S(y)}{\sqrt{y}}dy=\int_0^t\mu\sqrt{2g}\,dt,$$

$$t=\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\int_y^h\frac{S(y)}{\sqrt{y}}dy。$$

9.5 综合例题

例9.20 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续非负,如果微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$,则 $p(x)$ 必然满足(D)。

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$ 。 (B) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$ 。

(C) $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 收敛。(D) $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 发散。

例 9.21 设已知一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

的两个不同解 $y_1(x)$, $y_2(x)$,则该方程的通解为（ C ）.

(A) $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

(B) $c_1y_1(x)+c_2[y_2(x)-y_1(x)]$.

(C) $y_1(x)+c[y_2(x)-y_1(x)]$.

(D) $y_2(x)+c[y_2(x)+y_1(x)]$.

例 9.22 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\alpha(\Delta x)$ 是比 Δx 较高阶的无穷小量,函数 $y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}+\alpha(\Delta x)$ 且 $y(0)=1$. 则 $y(\frac{1}{2})=$(D)。

(A) $\frac{\pi}{6}$. **(B)** $\frac{\pi}{3}$. **(C)** $e^{\frac{\pi}{3}}$. **(D)** $e^{\frac{\pi}{6}}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\ln y+\ln C=\arcsin x,$$

$$y=\frac{1}{C}e^{\arcsin x},\ y(0)=\frac{1}{C}，\text{则 } C=1。$$

$$y=e^{\arcsin x},\ y(\frac{1}{2})=e^{\frac{\pi}{6}}$$

例 9.23 求解一阶初值问题：

$$\begin{cases}(y-\frac{1}{x})dx+\frac{1}{y}dy=0\\ y\big|_{x=1}=2\end{cases}$$

解 1: 原方程变形为 $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$，为贝努利方程。

令 $y^{-1}=u$，代入得 $u'+\frac{1}{x}=1$，解得 $u=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$

于是得 $\frac{1}{y}=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$，代入 $y(1)=2$，

得 $C=0$，所以 $y=\frac{2}{x}$.

解 2: 原方程变形为 $xdy-ydx=-xy^2dx$

$$\Rightarrow \frac{xdy - ydx}{y^2} = -xdx \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{x=1}^{x=x} d\left(\frac{x}{y}\right) = \int_{x=1}^{x} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad \Rightarrow \left.\frac{x}{y}\right|_{x=1}^{x} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1}^{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

例 9.24 若方程 $y' + p(x)y = 0$ 的一个特解为 $y = \cos 2x$，则该方程满足初值条件 $y(0) = 2$ 的特解为（ D ）.

(A) $\cos 2x + 2$.　　　(B) $\cos 2x + 1$.

(C) $2\cos x$.　　　(D) $2\cos 2x$.

解：将 $y = \cos 2x$ 代入方程求出函数 $p(x)$，再求解方程得到正确答案为 D.

也可如下分析:一阶线性齐次方程

$y' + p(x)y = 0$ 任意两个解只差一个常数因子，所以 A, B, C 三个选项都不是该方程的解。

例 9.25 解方程 $2xdy - ydx = 2y^2 dy$.

解 1：对 x 的线性方程 ：

原方程化为

$$-y\frac{dx}{dy} + 2x = 2y^2 \qquad \text{或} \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2}{y},$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-\frac{x}{2y^2}}.$$

解 2：伯努利方程 ： 原方程

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{x}y^2.$$

解 3：凑微分形式 ：方程

$$\Rightarrow xdy^2 - y^2dx = 2y^2dy$$

$$\Rightarrow \frac{xdy^2 - y^2dx}{y^4} = \frac{2y^2dy}{y^4}.$$

例 9.26 求曲线方程，在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长，如果曲线：(1) 向下凸；(2) 向上凸.

解： 设曲线方程为 $y = y(x)$ 则其任意一点 (x, y) 之 法线为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)。$$

令$Y = 0$，得到与x轴交点为 $X = yy' + x$

法线之长即为(x, y)与$(yy' + x, 0)$之间的距离

$$\sqrt{(yy')^2 + y^2} = |y|\sqrt{1 + (y')^2}$$

- 列方程

(1) 向下凸:

$$\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{|y|\sqrt{1 + (y')^2}}$$

(2) （2）向上凸:

$$\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} = \frac{-1}{|y|\sqrt{1 + (y')^2}}$$

- 解方程

(1) 向下凸： $\dfrac{y''}{1 + (y')^2} = \dfrac{1}{y}$， 令 $p(y) = y'$，得到

$$\frac{pdp}{1+(p)^2}=\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln(cy),$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(cy)^2-1}}=\pm dx$$

$$\begin{cases}\ln\left(cy+\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\pm(x-c_1)\\ \ln\left(cy-\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\mp(x-c_1)\end{cases},$$

$$\begin{cases}cy+\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\pm(x-c_1)}\\ cy-\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\mp(x-c_1)}\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2c}\left(e^{(x-c_1)}+e^{-(x-c_1)}\right)$$

(2) 向上凸： $\dfrac{y''}{1+(y')^2}=\dfrac{-1}{y}$,

曲线为 $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$

例 9.27 求方程 $y''+2x(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解。

[解] 属于不显含 y 的可降阶类型。令 $y'=u$, 原方程变为

$$u'+2xu^2=0, \frac{1}{u}=x^2+C_1,$$

由$u(0)=y'(0)=-\dfrac{1}{2}$,解出$C_1=-2$；

再解方程$y'=\dfrac{1}{x^2-2}$，　得到

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2。$$

由$y(0)=1,C_2=1$，于是得到解

$$y=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right)。$$

例 9.28 设$a(x),\ f(x)$为连续函数，初值问题$\begin{cases}y'+a(x)y=f(x)\\ y(0)=y_0\end{cases}$之

解为$y=y(x)$,

若$\int_0^{+\infty}a(x)dx=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{a(x)}=0$,

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

解：$y=y_0e^{-\int_0^x a(x)dx}+e^{-\int_0^x a(x)dx}\int_0^x f(t)e^{\int_0^t a(u)du}dt$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$

$$=\lim_{x\to+\infty} y_0 e^{-\int_0^x a(x)dx}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)e^{\int_0^t a(u)du}dt}{e^{\int_0^x a(x)dx}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a(x)}=0.$$

例 9.29 求解二阶微分方程的定解问题

$$\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}。$$

[解] 令$u=\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u$， $u=0$，$y=C$不复合初值条件，舍去。

$u\neq 0$时，得到 $u'+u\tan y=\dfrac{1}{\cos y}$，

解为 $u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，由

$y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}$，得$C_1=0$。

再解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sin y$得到

$\ln\left|\csc y-\cot y\right|=x+C_2$，

由 $y(-1)=\dfrac{\pi}{6}$ 得出

$C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，定解问题之解

$$\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$$

例 9.30 设 L 为连接 $A(0,1)$ 与 $B(1,0)$ 的一段上凸曲线，P 为 L 上异于 A 的任意一点，已知 L 上的 AB 弧与 AB 弦所围成的面积为 P 点横坐标的立方，求曲线 L 的方程。

解：对任意 $P(x,y)$，以 AP 弦为顶边的梯形面积为 $\dfrac{1}{2}x(y+1)$，

以 AB 弧为为顶边的曲边梯形面积为 $\int_0^x y(t)dt$，由已知条件列出方程

$\int_0^x y(t)dt-\dfrac{1}{2}x(y+1)=x^3$，求导数得到

$$y-\frac{1}{2}xy'-\frac{1}{2}(y+1)=3x^2$$

$$y'-\frac{1}{x}y-\frac{1}{2}(y+1)=-\frac{1}{x}-\frac{6x^2}{x}$$

解得 $y=Cx-6x^2+1$，

由 $y(1)=0$，$0=C-6+1$，$C=5$，

得到 $y=5x-6x^2+1$。