# 基础部分

# 第三课 线性代数

## 第 1 章 行列式

### 1.1 行列式的概念

$n$ 阶行列式是一个数，是由 $n^2$ 个数排成 $n$ 行 $n$ 列的方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所决定的.

**例如**：二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$

二阶行列式一般的计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}.$$

这个数是由两项的和构成的，每一项又是由取自不同行不同列的两个数的乘积组成的，且其中一项为正，一项为负.

三阶行列式的计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

在这个式子中如果把二阶行列式展开，就得到 6 项，每一项由取自不同行不同列的 3 个数的乘积组成，其中 3 项为正，3 项为负.

在 $n$ 阶行列式中，去掉元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列，剩下的是一个 $n-1$ 阶行列式，

叫做 $a_{ij}$ 的**余子式**，记作 $M_{ij}$. 那么 3 阶行列式就可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

再进一步，记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式，则 3 阶行列式就可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\,.$$

同样，$n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

将其中的代数余子式全部展开，得到的是一个数，它是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由取自不同行不同列的 $n$ 个数的乘积组成，其中一半是正项，一半是负项．显然，如果在一个行列式中，有的元素是字母 $x$，那么，行列式就是关于 $x$ 的一个多项式．

**例 1** $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-1) = x^2 - x\,.$

**例 2** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \cdots = n!$

**例 3** $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\,.$

$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

## 1.2 行列式的性质

行列式的最基本的性质是以下 4 个：

**性质 1** 行列式中行列互换，其值不变．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\,.$$

**性质 2** 行列式中两行（列）对换，其值变号．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\,.$$

**性质 3** 行列式中如果某行（列）元素有公因子，可以将公因子提到行列式外．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\,.$$

**性质 4** 行列式中如果有一行（列）每个元素都由两个数之和组成，行列式可以拆成两个行

列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由以上四条基本性质，还能推出下面几条性质：

**性质 5** 行列式中如果有两行（列）元素对应相等，则行列式的值为 0．

**性质 6** 行列式中如果有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值为 0．

**性质 7** 行列式中如果有一行（列）元素全为 0，则行列式的值为 0．

**性质 8** 行列式中某行（列）元素的 $k$ 倍加到另一行（列），其值不变.

**例 4** 计算 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$.

**例 5** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\text{，}\ B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|$=_____ .

行列式中常用的公式还有：

1．范德蒙德（Vandermonde）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\ .$$

2．$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=|A||B|$，其中 $A,B$ 都是方阵.

3．$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$B$ 是 $m$ 阶方阵.

上面两个公式还可以推广为：

4．$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$B$ 是 $m$ 阶方阵，$C$ 是 $m\times n$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=|A||B|$，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$B$ 是 $m$ 阶方阵，$C$ 是 $n\times m$ 的矩阵.

5．$\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$B$ 是 $m$ 阶方阵，$C$ 是 $n\times m$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$，其中 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$B$ 是 $m$ 阶方阵，$C$ 是 $m\times n$ 的矩阵.

例 6 计算$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

例 7 计算$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$.

例 8 计算$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

## 1.3 行列式的计算

例 9 计算$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

例 10 计算$n$阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

例 11 计算$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$.

例 12 计算$n$阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

例 13 计算：$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

**例 14** 计算 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

**例 15** 证明： $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1$

**例 16** 计算 $n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

### 1.4　按行展开定理

行列式按行展开定理包含两部分：

（1） $n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的各元素与其对应代数余子式的乘积的和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

（2） $n$ 阶行列式 $D$ 的某一行的各元素与另一行对应元素的代数余子式的乘积的和等于零．即　$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$，　$i \neq j$

**例 17** 已知 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求第 3 列各元素代数余子式之和 $A_{13} + A_{23} + A_{33}$.

**例 18** 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 第 4 行各元素的余子式的和.

例 19　求 $\begin{vmatrix} 2x & -x & 1 & 3 \\ 2 & 3x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ 中 $x^3$ 的系数.

例 20　记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，求方程 $f(x)=0$ 有几个复根.

例 21　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & 6+x \end{vmatrix}$，证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.