基础部分

第三课　线性代数

第 3 章　矩阵的初等变换与矩阵的秩

3.1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换分矩阵的初等行变换和矩

阵的初等列变换两类，它们又各有３种变换．

矩阵的初等行（列）变换：

（1）　交换第 i 行（列）和第 j 行（列）；

（2）　用一个非零常数乘矩阵某一行（列）的每个元素；

（3）　把矩阵某一行（列）的元素的 k 倍加到另一行（列）．

对矩阵施行初等变换时，由于矩阵中的元素已经改变，变换后的矩阵和变换前的矩阵已经不相等，所以在表达上不能用等号，而要用箭号 $\rightarrow$.

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

3.2 初等矩阵

单位矩阵作一次初等变换得到的矩阵叫初等矩阵．概括起来，初等矩阵有３类．

（1）交换第 i 行和第 j 行（交换第 i 列和第 j 列）

$$E(i.j)=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1\end{pmatrix}$$

（2）用常数 λ 乘第 i 行（λ 乘第 i 列）

$$E(i(\lambda))=\begin{pmatrix}1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1\end{pmatrix}$$

（3）第 i 行的 k 倍加到第 j 行

（第 j 列的 k 倍加到第 i 列）

$$E(ij(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

显然，初等矩阵都可逆，其逆矩阵仍是初等矩阵，且有

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$ ；

$E(i(\lambda))^{-1}=E\left(i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)$ ；

$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

初等矩阵与初等变换有着密切的关系：

左乘一个初等矩阵相当于对矩阵作了一次与初等矩阵相应类型一样的初等行变换.

例如要将矩阵 A 的第１行和第３行交换，则左乘一个初等矩阵 $E(1,3)$ ：

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}.$$

右乘一个初等矩阵相当于对矩阵作了一次与初等矩阵相应类型一样的初等列变换.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23}\end{pmatrix}$，

$E_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$E_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

则以下选项中正确的是

(A) $E_1E_2E_3A=B$ ；　　　　(B) $AE_1E_2E_3=B$ ；

(C) $E_3E_2E_1A=B$ ；　　　　(D) $AE_3E_2E_1=B$.

例 3 设 A 是３阶可逆矩阵，将 A 的第１行和第３行对换后得到的矩阵记作 B .

（1）证明 B 可逆；

（2）求 AB^{-1}.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\-1&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，是否存在可逆矩阵 P，使得 $PA=B$？若存在，求 P；若不存在，说明理由.

例 6 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3.3 矩阵的等价与等价标准形

若矩阵 B 可以由矩阵 A 经过一系列初等变换得到，则称矩阵 A 和 B **等价**.

矩阵的等价是同型矩阵之间的一种关系，它具有如下性质：

（1） **反身性**：任何矩阵和自己等价；

（2） **对称性**：若矩阵 A 和矩阵 B 等价，则矩阵 B 和矩阵 A 也等价；

（3） **传递性**：若矩阵 A 和矩阵 B 等价，矩阵 B 和矩阵 C 等价，则矩阵 A 和矩阵 C 等价.

形如 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的矩阵称为矩阵的等价标准形.

任意矩阵 A 都与一个等价标准形 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 等价. 其中 I_r 是 r 阶单位矩阵. 这个 r 是一个不变量，它就是矩阵的秩.

或者说，任何矩阵都可以通过一系列的初等变换化作等价标准形. 由于每做一次初等变换就相当于在矩阵的左端或右端乘一个初等矩阵，因此又可以说，任何矩阵总存在一系列的初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$，和初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使得

$$P_sP_{s-1}\cdots P_1\ A\ Q_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $P=P_sP_{s-1}\cdots P_1$，$Q=Q_1Q_2\cdots Q_t$，由于初等矩阵都是可逆矩阵，其乘积自然也是可逆的，于是又可以说，对任意 $m\times n$ 的矩阵 A，总存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

每一个矩阵都有一个唯一的等价标准形，因此等价的矩阵有相同的等价标准形，反过来，有相同等价标准形的矩阵是等价的.

例 7 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则必有

(A) 当 $|A|=a\ \ (a\neq 0)$ 时，$|B|=a$.

(B) 当 $|A|=a\ \ (a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$.

(D) 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$.

3.4 矩阵的秩

在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列，位于这 k 行 k 列交叉处的 k^2 个元素按其原来的次序组成一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

若矩阵 A 中有一个 r 阶子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式全为零，则称矩阵 A 的秩为 r. 矩阵 A 的秩记作 $r(A)$.

零矩阵的秩规定为零.

显然有

$r(A)\geq r \Leftrightarrow A$ 中有一个 r 阶子式不为零；

$r(A)\leq r \Leftrightarrow A$ 中所有 $r+1$ 阶子式全为零.

若 n 阶方阵 A，有 $r(A)=n$，则称 A 是满秩方阵.

对于 n 阶方阵 A，

$$r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0.$$

若矩阵 A 是满秩的，则它的行列式不等于零，它就可逆，反之也成立. 因此我们说一个方阵是"满秩的"，或说是"可逆的"，或说是"非奇异的"都是等价的，只是从不同的角度，不同的性质来描述一个矩阵.

对矩阵施行矩阵的初等变换，得到的矩阵和原来的矩阵是等价的，由于等价的矩阵有相同的等价标准形，所以它们就有相同的秩. 就是说，矩阵的初等变换不改变矩阵的秩. 可以利用这个性质，对要求秩的矩阵施行矩阵的初等变换，变成阶梯形，这时，矩阵的非零行的

行数就是矩阵的秩.

例 8 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\2&2&3&1&4\\1&0&1&1&5\\2&3&5&5&4\end{pmatrix}$ 的秩.

例 9 求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$ 的秩，$n\geq 2$.

例 10 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$，已知 $r(A)=3$，求 a,b .

矩阵的秩有许多性质，常用的以下几个：

（1）$r(A)=r(A^T)$；

（2）$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$；

（3）$r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq \min(r(A),r(B))$，其中 n 为矩阵 A 的列数；

（4）$r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$；

（5）$r\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$；

（6）若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\leq n$，其中 n 为矩阵 A 的列数.

（7）若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)$

（8）若 A 列满秩，则 $r(AB)=r(B)$

（9）若 B 行满秩，则 $r(AB)=r(A)$

例 11 设 A,B 都是 n 阶方阵，满足 $A^2-2AB=I$，求 $r(AB-BA+A)=$？

例 12 设 A 是 4×3 矩阵，$r(A)=2, B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 求 $r(AB)$.

例 13 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&t&6\end{pmatrix}$，$B$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $AB=0$，则

(A) $t=4$ 时，B 的秩必为 1；

(B) $t=4$ 时，B 的秩必为 2；

(C) $t\neq 4$ 时，B 的秩必为 1；

(D) $t\neq 4$ 时，B 的秩必为 2 .

例 14 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且满足 $AB=0$，则 A 和 B 的秩

(A) 必有一个等于零；
(B) 都小于 n；
(C) 一个小于 n，一个等于 n；
(D) 都等于 n .

例 15 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $n<m$，证明：$|AB|=0$

例 16 A 是 2 阶方阵，已知 $A^5=0$，证明 $A^2=0$.

3.5 伴随矩阵

伴随矩阵的概念是在讨论矩阵可逆的充分必要条件时引入的．设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，令

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

为矩阵 A 的伴随矩阵.

因此，若 $A=\left(a_{ij}\right)$，则 $A^*=\left(A_{ij}\right)^T$.

设 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$，由行列式的按行展开定理，直接计算就可得到伴随矩阵的基本关系式：

$$AA^*=A^*A=|A|I .$$

这个公式是基于行列式的展开定理，和矩阵的具体性态无关，所以对于任意矩阵这个公式总是成立．这是我们讨论有关伴随矩阵的一切问题的基本出发点．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*，或\quad A^* = |A|A^{-1}.$$

伴随矩阵的行列式的公式是　$|A^*| = |A|^{n-1}$.

伴随矩阵的秩与矩阵的秩的关系是

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

例 17 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的伴随矩阵 A^*.

例 18 设 $A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$则 $|B^*| = ?$

例 19 A 是 3 阶矩阵，$|A| = \frac{1}{2}$，求$|(3A)^{-1} - 2A^*|$.

例 20 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，　且 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3I$，求 X.

例 21 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^* = A^T$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，若 a_{11}，a_{12}，a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3.　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$　　　(A)