基础部分

第三课　线性代数

第 4 章　向量组的线性相关性

复习本章内容要达到理解 n 维向量，向量的线性组合与线性表示等概念．要正确理解向量组线性相关和线性无关的定义，了解并会用向量组线性相关性的有关性质及判别法．了解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩．还要了解向量组等价的概念，以及向量组的秩与矩阵的秩的关系．

4.1 向量的线性组合与线性表示

由 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组称为 n 维向量，记作

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 称为向量 α 的第 i 个分量．这个向量是一个列向量．行向量记作

$$\alpha^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

分量全为 0 的向量称为零向量，记作 $0 = (0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0)^T$．

两个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，若它们的对应分量全相等，即 $a_i = b_i$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 则称向量 α 和 β 相等，记作 $\alpha = \beta$．

设两个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，定义

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1,\quad a_2 + b_2,\quad \cdots,\quad a_n + b_n)^T,$$

称为向量 α 与 β 的和．

设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，称 $-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)^T$ 为向量 α 的负向量．于是定义向量的减法：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$k$ 是实数，定义

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)^T,$$

称为数 k 与向量 α 的数量乘法，简称数乘．

在 n 维向量中只讨论这两种运算．

对任意 n 维向量 α, β, γ 及任意实数 k, l，向量的加法及数量乘法满足以下 8 个性质：

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

（3）$\alpha+0=\alpha$；

（4）$\alpha+(-\alpha)=0$；

（5）$1\cdot\alpha=\alpha$；

（6）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

（7）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

（8）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$．

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$是数，则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

称为向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个**线性组合**.

若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，称$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性表示**或线性表出.

β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，即向量方程$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$有解．所以判断一个向量能否由一个向量组线性表示，可以根据方程组有解的充分必要条件来进行判断．β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，还可以看成是向量组$\beta$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，所以也可以用向量组线性相关的性质来判断.

求向量线性表示的问题归根结底是解方程组的问题，通常有两种方法来处理，一种方法是写出待定的表示式，然后解线性方程组．另一种方法是将向量按列写成矩阵，对矩阵施行行初等变换化作行简化阶梯形，这时，非主元所在列的向量可以由主元所在列的向量线性表示，表示式中的系数恰是非主元所在列对应的分量.

例 1 设$\alpha_1=(1,\ \ 2,\ \ 3)^T$，$\alpha_2=(0,\ \ 1,\ \ 4)^T$，$\alpha_3=(2,\ \ 3,\ \ 6)^T$，$\beta=(-1,\ \ 1,\ \ 5)^T$，试用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示$\beta$．

例 2 设$\alpha_1=(1,\ \ 4,\ \ 0,\ \ 2)^T$，$\alpha_2=(2,\ \ 7,\ \ 1,\ \ 3)^T$，$\alpha_3=(0,\ \ 1,\ \ -1,\ \ 2)^T$，$\beta=(3,\ \ 10,\ \ a,\ \ 4)^T$．$a$取何值时，$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？写出表示式.

4.2　向量组的线性相关与线性无关

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维向量，若存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

成立，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性相关**．否则称为**线性无关**．

只有一个向量的向量组$\{\alpha\}$，如果$\alpha=0$，则向量组是线性相关的；如果$\alpha\neq0$，则向量组是线性无关的.

一个不少于 2 个向量的向量组若线性相关，则必定有一个向量可以由这个向量组中的其余向量线性表示．反之，若一个向量组中，有一个向量可以由其余向量线性表示，那么这个向量组是线性相关的.

这个命题的等价命题就是：向量组线性无关的充分必要条件是向量组中任意向量都不能由其余向量线性表示.

这个命题中要特别注意的是＂有一个＂和＂其余＂这两个词．一个向量组线性相关，则至少有一个向量可以由其余向量线性表示，而不是每个向量都可以由其余向量线性表示.

例如 $\alpha_1=(1,\quad 0,\quad 0)^T$，$\alpha_2=(2,\quad 0,\quad 0)^T$，$\alpha_3=(1,\quad 1,\quad 0)^T$，显然这个向量组是线性相关的，其中$\alpha_1$和$\alpha_2$可以互相线性表示，但是$\alpha_3$不能由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表示．其余是指除它本身以外的向量，因为每个向量是自然能由自己线性表出的.

按定义，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关当且仅当向量方程

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

只有零解.

将向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$按列排成一个矩阵，记作$A$，即$A=$（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$），则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$Ax=0$$

有非零解.

如果向量的个数比向量的维数多，也就是方程组中方程的个数少于未知数个数，方程组一定有非零解，因此有结论：

向量个数大于向量维数时向量组线性相关，或更直接地说，任何$n+1$个n维向量线性相关.

当向量个数和向量维数一样多时，矩阵A是方阵，方程组的解可以用行列式来判断，于是有结论：

n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关的充分必要条件是由向量排成的行列式等于 0．即

$$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0.$$

例 设行向量组（2,1,1,1），（2,1,a，a），（3,2,1,a），（4,3,2,1）线性相关，且$a\neq1$，则$a=$______ .

向量组的线性相关性的定理很多，其中最重要的是这几个：

（1）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，且表示法惟一.

（2）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

（3）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关且可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，则$s\leq t$.

以下这些性质也是很有用的：

（1） 包含零向量的向量组必线性相关．

（2） 一个向量组中如果有部分向量线性相关，则整个向量组线性相关．

（3） 一个线性无关的向量组其中任何部分向量组都线性无关．

（4） 一个线性相关的向量组，如果每一个向量都删去同一序号的分量，得到一个维数较低的向量组，则新的向量组也线性相关．

（5） 一个线性无关的向量组，如果每一个向量在同一位置增加分量，得到维数更高的向量组，则新向量组也线性无关．

例 3 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$都不是零向量；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$除去向量组本身的任意部分向量组都线性无关；

(C) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩等于$s$；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都线性无关．

例 4 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}t & -1 & -1\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1 & t & -1\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1 & -1 & t\end{pmatrix}^T$．问$t$为何值时

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关．

例 5 设α_1,α_2是n维向量，令$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+2\alpha_2$，则

(A) β_1,β_2,β_3必线性无关；

(B) β_1,β_2,β_3必线性相关；

(C) 仅当α_1,α_2线性无关时，β_1,β_2,β_3线性无关；

(D) 仅当 s 线性相关时，β_1,β_2,β_3线性相关．

例 6 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，试判断$3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$是否线性无关．

例 7 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，问

（1） α_1能否由α_2,α_3线性表示？证明你的结论；

（2） α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？证明你的结论．

例 8 设线α,β,γ性无关，又设$\delta\neq 0$，α,γ,δ线性相关，β,γ,δ也线性相关，证明$\delta=k\gamma$，其中$k\neq 0$常数．

例 9 确定常数a，使向量组$\alpha_1=(1,\ 1,\ a)$，$\alpha_2=(1,\ a,\ \ 1)^T$，$\alpha_3=(a,\ 1,\ 1)^T$可由向量组

$\beta_1=(1,\ 1,\ a)^T$，$\beta_2=(-2,\ a,\ 4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$线性表示，但向量组β_1,β_2,β_3不能由

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

例 10 设A是$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，满足$AB=I$，试证明B的列向量线性无关.

例 11 设A,B为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有

(A) A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关
(B) A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关
(C) A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关
(D) A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关

例 12 设A是n阶方阵，α是n维列向量，若$A^{n-1}\alpha\neq 0$，而$A^n\alpha=0$，试证明α，$A\alpha$，$\cdots$，$A^{n-1}\alpha$线性无关.

4.3 极大线性无关组

设有两个向量组（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，（2）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，如果向量组（1）中每个向量都能由向量组（2）线性表出，则称向量组（1）能由向量组（2）线性表出.

如果向量组（1）能由向量组（2）线性表出，且向量组（2）也能由向量组（1）线性表出，则称这两个向量组等价，记作（1）≅（2）.

向量组的等价是向量组之间的一种等价关系，具有以下性质：

1） **反身性**：（1）≅（1）；
2） **对称性**：若（1）≅（2），则（2）≅（1）；
3） **传递性**：若（1）≅（2），（2）≅（3），则（1）≅（3）.

设向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个部分组. 满足

1）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关；

2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的每一个向量都可以由向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出，则称部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组.

显然，向量组的一个极大线性无关组与向量组本身是等价的.

一般地，向量组的极大线性无关组不是惟一的. 按照定义，一个向量组的任意两个极大线性无关组可以互相线性表出，因此，它们是等价的.

满足以下条件的矩阵称为简化行阶梯形 Reduced Row Echelon Form (RREF)：

（1）所有零行都在矩阵的底部；
（2）非零行的主元在前一行主元的右方；
（3）主元为 1；
（4）主元所在列除主元外的其它元素全为零.

例如：
$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&-1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

任何矩阵都可以通过矩阵的行初等变换化作简化的行阶梯形.

利用简化行阶梯形可以解决的问题有：

（1）求极大线性无关组
（2）求向量间的线性关系
（3）求齐次线性方程组基础解系
（4）求非齐次线性方程组特解

求极大线性无关组的步骤：

（1） 将向量依次按列写成矩阵；
（2） 对矩阵施行行初等变换，化作简化行阶梯形；
（3） 主元所在列向量构成一个极大线性无关组；
（4） 非主元所在列向量和主元所在列向量的关系由非主元列各分量表示．

例如简化行阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中主元所在列是第１列，第２列，第４列，因此一个极大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$．第３列无主元，

$$\alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=-1\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=-\alpha_1+2\alpha_2 .$$

同理，

$$\alpha_5=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 .$$

例 13 求向量组 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 1,\ -1)^T$，$\alpha_3=(-1,\ 2,\ 1,\ -1)^T$，$\alpha_4=(-1,\ 3,\ 2,\ 1)^T$，$\alpha_5=(-2,\ 6,\ 4,\ 1)$的一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表出．

例 14 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可被$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且秩相等，证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$也可被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出．

4.4 向量组的秩

向量组的极大线性无关组中所含向量的个数称为这个向量组的秩．

只含零向量的向量组的秩规定为０．

向量组的秩有两个重要性质：

（1） 设向量组（I）的秩为r_1，向量组（II）的秩为r_2．若向量组（I）可以由向量组（II）线性表示，则$r_1\le r_2$．

（2）　等价的向量组有相同的秩．

矩阵的等价是指一个矩阵可以由另一个矩阵经过矩阵的初等变换转化成的．由于初等变换不改变矩阵的秩，因此，等价的矩阵有相同的秩．反过来，两个秩相等的同型矩阵，它们有相同的等价标准形，再由矩阵等价的传递性和对称性，这两个矩阵就等价．

向量组的等价是指两个向量组可以互相线性表示，由线性表示和秩之间的联系，也有等价的向量组有相同的秩．但是，反过来，两个向量组的秩相等，只说明这两个向量组的极大线性无关组中有一样多个向量，并没有涉及向量之间是否可线性表出，因此，秩相等的向量组不一定等价．

例如　向量组 $\alpha_1=(1,\quad 0,\quad 0,\quad 0)^T$，$\alpha_2=(0,\quad 1,\quad 0,\quad 0)^T$ 和向量组 $\beta_1=(0,\quad 0,\quad 1,\quad 0)^T$，$\beta_2=(0,\quad 0,\quad 0,\quad 1)^T$ 的秩都是 2，但它们互相不能线性表出，自然就不等价．

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，将矩阵的每个行看作行向量，矩阵的 m 个行向量构成一个向量组，该向量组的秩称为矩阵的行秩．

将矩阵的每个列看作列向量，矩阵的 n 个列向量构成一个向量组，该向量组的秩称为矩阵的列秩．

矩阵的行秩＝矩阵的列秩＝矩阵的秩．

求向量组的秩的一般步骤是：

（1）　将向量按列（或按行）写成矩阵；

（2）　对矩阵作初等变换，化成阶梯形；

（3）　非零行的个数就是向量组的秩．

例 15　已知向量组 $\alpha_1=(1,\quad -2,\quad 3)^T$，$\alpha_2=(3,\quad 0,\quad 1)^T$，$\alpha_3=(1,\quad 4,\quad -5)^T$ 与向量组 $\beta_1=(a,\quad 2,\quad 0)^T$，$\beta_2=(1,\quad b,\quad 1)^T$，$\beta_3=(2,\quad -3,\quad -2)^T$ 具有相同的秩，且 β_1 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，求 a,b 的值．

例 16　已知向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，（II）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4$，和（III）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_5$，它们的秩为 r（I）= r（II）=3，r（III）=4，证明 $\alpha_5-\alpha_4$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

例 17　设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s<n)$ 线性无关，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关的充分必要条件是

(A)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出；

(B)　$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出；

(C)　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价；

(D)　矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 等价．