基础部分
第四课　概率统计
第 1 章　概率论的基本概念

<u>本讲内容</u>

§1.1　事件与概率

§1.2　有等可能性的两个概型

§1.3　条件概率及事件的独立性

<u>本讲提要</u>（略，见大纲）

§1.1　事件与概率

1.1.1 概率论的研究对象和任务

1.1.2 事件的概念和性质

例 1.1.1 在有两排钉子的 Galton 钉板实验中结果与事件.

必然事件$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ / 基本事件： $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\}$.

事件体$\mathscr{F}:=\{\Omega,\phi,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\{\omega_2,\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}\}$

注意：1). 在$\mathscr{F}$中对至多可列次的集合的并、交及求余运算都是封闭的.

2). 事件是样本空间的子集而是事件体的元素（点），因此对任一事件 A，有 $A\subset\Omega$，而 $A\in\mathscr{F}$.

基于集合论建立‘事件’这一概念，借用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算.

对应表 1.1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件 A 发生
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生
$A\cup B$ 或 $A+B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$\cup_i A_i$	事件A_i中至少有一个发生
$A\cap B$ 或 AB	事件 A 与事件 B 同时发生
$\cap_i A_i$	所有事件A_i都同时发生
$A\setminus B$ 或 $A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生

事件间的运算有结合律、交换律、分配律，以及对偶原理：$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$，

1.1.3 概率的概念和性质

定义 1.1.2 设定义在事件体$\mathscr{F}$上的实值集函数 P，满足

P_1）非负性 $P(A)\ge 0$，$A\in\mathscr{F}$

P_2）规范性 $P(\Omega)=1$

P_3）可列可加性 设$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，且两两不交即$A_iA_j=\phi$，$i\ne j$. 有 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

则称 P 为定义在事件体$\mathscr{F}$上的概率测度，简称概率. 称 $P(A)$是事件 A 的概率. □

定理 1.1.2（概率的性质） 设 P 是事件体$\mathscr{F}$上概率，则

1）$P(\phi)=0$；

2）有限可加性：当诸A_i不交，则$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

3）设 $A\in\mathscr{F}$ 则 $P(\overline{A})=1\ \ P(A)$.

4）单调性：如果 $A\subset B$ 则 $P(A)\le P(B)$.

5）连续性：设$A_i(\in\mathscr{F})$单调，即$A_i\subset A_{i+1}$或$[A_i\supset A_{i+1}]$，$i=1,2,\cdots$，

此时分别定义 $\lim_{n\to\infty}A_n=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$　[或 $\cap_{n=1}^{\infty}A_n$]，

则　$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$.

定理 1.1.3（一般加法公式）

$n=2$ 时的一般加法公式：

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

两个事件的和，常用处理方法有：

$$\boxed{\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) && \text{(一般加法公式)} \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_2) + P(A_1 \bar{A}_2) && \text{(有限可加性)} \\ &= P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) && \text{(有限可加性)} \end{aligned}}$$

[**典型例题**]

例 1.1.2 设 A、$B \in \mathscr{F}$，$P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.7$，求 $P(A \cup B)$ 最大值与最小值.

例 1.1.3 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} =$ _______

分析：快速判断法。

§1.2　有等可能性的两个概型

古典概型是离散的，主要研究工具是排列和组合；几何概型是连续型的，它是均匀分布的实际背景，其主要研究工具是几何计算及微积分．几何概型对 rv(包括随机向量)函数分布和矩的部分计算很有帮助．

1.2.1 古典概型

定义 1.2.1 基本事件个数有限且等可能的概率模型，称为古典概型．

如事件 A 中由 n_A 个样本点，则 $P(A) = n_A / n_\Omega$

1.2.2 几何概型

引例与定义

定义 1.2.2 设Ω为 R_n 中一个 L-可测区域（即有 n 维体积的区域），且 0< L（Ω）<∞，$\mathscr{F}$ 为Ω中所有 L-可测子集．令 $P(A)=L(A)/L(\Omega)$，$\forall A \subset \Omega$ 且 $A \in \mathscr{F}$．则此种概型称为几何概型．□

几何概型与古典概型的关系．

[**典型例题**]

例 1.2.1 设有 a 件正品 b 件次品，从中按有放回和无放回两种方式逐一随机抽 n 次，求恰抽出 k 件正品（记此事件为 A）的概率 p_k．

解 有放回--- $n_\Omega = (a+b)^n$，$n_A = C_n^k a^k b^{n-k}$．于是

$$P_k = n_A / n_\Omega = C_n^k a^k b^{n-k} / (a+b)^n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

改写如下　$$p_k = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k},$$

并令 $p = a/(a+b)$，$q = 1 - p = b/(a+b)$，则

$$\boxed{p_k = C_n^k p^k q^{n-k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.2.3)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1,$$

这一类有放回抽取的概率模型，叫做二项概型．由(1.2.3)决定的数列 $\{p_k\}$ 叫二项分布．

不放回--- $p_k = C_a^k C_b^{n-k} / C_{a+b}^n$，$k = 1, 2, \ldots, n$．　(1.2.4)

此时还应有 $k \le a$，$n-k \le b$．由(1.2.4)决定的这类概率模型，叫超几何概型．□

例 1.2.2 一袋装有 r 个红球、b 个黑球，除去颜色外不可辨别．今随机不放回逐一取球，求第 k 次取出红球的概率 p_k．

(解略。用组合算或是用排列来算?)

例 1.2.3（会面问题） 两人相约于晚 7 点到 8 点间在某处会面，到达者等足 20 分钟便立即离去．设两人的到达时刻在 7 点到 8 点之间都是随机且等可能的．求两人能会面的概率

p.

解 以 *X* 和 *Y* 分别表两人到达时刻在 7 点后的分钟数，*A* 记事件“两人能会面”．则

$\Omega=\{(x,y):\ 0<x<60,\ 0<y<60\}$，

$A=\{(x,y):\ |x\quad y|\le 20,\ (x,y)\in\Omega\}$．

故 $p=P(A)=1\quad 40^2/60^2=5/9$．

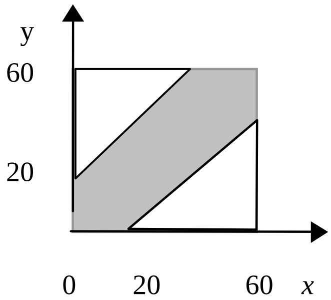

图 1.2.3 会面问题

§1.3 条件概率及事件的独立性

条件概率，及基于条件概率而引入的三个重要公式(乘法公式，全概率公式和 Bayes 公式)是重要的计算事件概率的依据，要熟练掌握．

在数学中，‘独立性’是概率论特有且重要的概念．理解事件独立性的本源及与随机试验的独立性的关系，既有助于对事件独立性的判断，也有助于理解第二章中 *rv* 的独立性的本质，从而使概念间融会贯通，要记的公式既好记了也大大压缩．

1.3.1 条件概率的定义

引例 考察一个有两子女的家庭．假如已看见这家的一个男孩，求另一个也是男孩的概率 *p*.

解 Ω＝{（男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女）}，

令 *A*：已见一男孩（至少有一男孩）；

B：另一也为男孩．

所求的概率 *p*＝1/3．□

现在改写引例算得的概率为

$$p=\frac{1}{3}\left(=\frac{n_{AB}}{n_A}\right)=\frac{1/4}{3/4}\left(=\frac{n_{AB}/n_\Omega}{n_A/n_\Omega}\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

定义 1.3.1 设 *A*、$B\in\mathscr{F}$，且 $P(A)>0$，记

$P(B|A)=P(AB)\ /\ P(A)$，　$P(A)>0$；

并称为在已知事件 *A* 发生条件下，事件 *B* 发生的条件概率．

如 $P(B)>0$，仿上可定义 $P(A|B)=P(AB)\ /\ P(B)$

1.3.2 条件概率的三个定理

乘法公式:　$P(AB)=P(A)\ P(B|A)$，　$P(A)>0$；

　　　　　$P(AB)=P(B)\ P(A|B)$，　$P(B)>0$．

设 $B\subset\sum_{i=1}A_i$，　诸 A_i 不交且 $P(A_i)>0$．

全概率公式:　$P(B)=\sum_{i=1}P(\ A_i)\ P(B|\ A_i)$．

Bayes公式：　$P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)}$．

应用特点

全概率公式　$P(B)=\sum_i P(A_i)\ P(B|\ A_i)$．

事件 *B* 的概率，表示成在各 A_i 发生条件下事件 *B* 的条件概率的加权和．选取适当的 $\{A_i\}$，可使复杂事件 *B* 的概率 $P(B)$ 计算得到简化和成为可能．

Bayes（贝叶斯）公式实现条件 *B* 与条件 A_i 的转换——要求 $P(A_i|B)$ 而已知 $P(B|A_i)$．

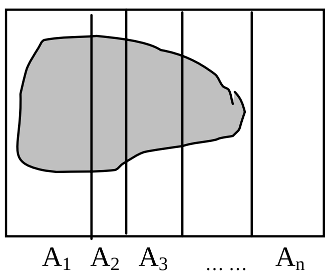

图 1.3.1

固定事件 *A*，只要 $P(A)>0$，令 $P_A(B)=P(B|A)$，则 P_A，

从而象P一样，对P_A也成立相应的概率性质定理，并且对P_A也有乘法公式、全概率公式及Bayes公式．例如

$$P_A(\bar{B}) = 1-P_A(B) \ ,$$
$$P_A(B) = \sum_i P_A(A_i) P_A(B|A_i) \ ,$$

当$P(A)P(B)>0$, $P_A(BC)=P_A(B)P_A(C|B)=P(B|A)P(C|AB)$

1.3.3 事件的独立性

两个事件独立性的定义

定义 2.1.1 称事件 A 与 B 相互独立，如

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

事件的独立性源于试验的独立性．例如甲乙俩人独立射击，A 和 B 分别表示在一次射击中甲和乙击中目标事件，则事件 A 和 B 是独立的．

独立性的注释

1) Ω、ϕ 与任一事件 A 独立．

2) 如 $P(A)$、$P(B) \in (0, 1)$，则 A，B 独立不互斥，互斥不独立．

3) 独立的随机试验产生独立的事件．

事件独立性的性质

性质 1 设 $P(A)>0$，则 A、B 独立 $\Leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$.

而当 $P(B)>0$，则 A、B 独立 $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$.

此性质解释了“独立性”．

性质 2 A、B 独立 $\Leftrightarrow$ $\tilde{A}$，$\tilde{B}$ 独立，其中 $\tilde{A}=A$ 或 $\bar{A}$，$\tilde{B}$ 类似．

多个事件的独立性

定义 2.1.2 称三个事件 A_i，$i=1, 2, 3$，相互独立，如下列 4 个等式成立：

“两两独立”，即 $P(A_1A_2)= P(A_1)P(A_2)$，

$P(A_1A_3)= P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$；

以及 $P(A_1A_2A_3)= P(A_1)P(A_2)P(A_3)$．

注意，“两两独立”不能推出最后一个等式，反之仅由$P(A_1A_2A_3)= P(A_1)P(A_2)P(A_3)$也不能推出两两独立.

[典型例题]

- **概率计算与独立性判断**

例 1.3.1 设$P(A|B) = P(B|A) =1/2$，$P(A) = 1/3$. 求$P(A\cup B)$.

解 $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$

$\Rightarrow P(A) =P(B)$ ； $\Rightarrow P(AB) =(1/3)(1/2)$

$$P(A\cup B)=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{2}$$

总结 1. 这类问题的求解，要求对概率定义及性质所提供的概率关系公式、概率的加法公式、乘法公式、条件概率及其三定理，都要熟练掌握．正确掌握它们的应用特点及和事件的几种处理。

2. 由本例发现：条件$P(A|B)=P(B|A)$保证$P(A)=P(B)$．这是一条经验，应不断总结和积累经验．

例 1.3.2 设 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.5$，求 $P(B|A)$ 的最小值和最大值.

【分别为 2/7 和 5/7，发现 $P(B|A)$ 可大于 $P(B)$ 也可小于 $P(B)$】.

例 1.3.3 已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, \ P(A\bar{B})=0.5$，试求 $P(B|(A\cup\bar{B}))$ 并问此时 A 与 B 是否独立.

解 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, \ P(A\bar{B})=0.5.$

$$P(B\mid (A\cup\bar{B}))=\frac{P(B\cap\ (A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}$$
$$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$$
$$=\frac{P(A)-P(A\bar{B})}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$$
$$=\frac{1-0.3-0.5}{1-0.3+1-0.4-0.5}=\frac{0.2}{0.8}=0.25$$

因为 $P(A\bar{B})=0.5\neq 0.7\times 0.6=P(A)P(\bar{B})$，故 A 与 B 不独立． □

总结 独立性的证明方法较多，这里选择利用独立性等价命题来证，较为简洁．利用 $P(A\bar{B})$ 已知，因此可从判断 A 与 $\bar{B}$ 独立与否而知 A 与 B 的独立与否．

例 1.3.4 设 A、B 是两个事件，且 0<$P(A)$<1，$P(B\mid A)=P(B\mid \bar{A})$，问 A、B 是否独立？

分析 一个猜想．

解 由全概率公式及题设条件，知

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$
$$=P(B\mid A)\left[P(A)+P(\bar{A})\right]=P(B\mid A).$$

如 $P(B)$ =0，由独立性的注释，知 B 与 A 独立．如 $P(B)$ >0，则由性质 1 知 A、B 独立． □

【(02-4-11) 设 A、B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：$P\left(B\middle|A\right)=P\left(B\middle|\bar{A}\right)$ 是 A 与 B 独立的充要条件．】

例 1.3.5 设 $P(A)$ =0.5，$P(B)$ =0.6， $P(B|A)$ =0.8， 求 $P(A\cup B)$ 和 $P(B\mid\bar{A})$ ，并问事件 A 与 $\bar{B}$ 是否独立，为什么？

- **全概率公式与 Bayes 公式**

例 1.3.6(Pólya 模型) 于有 r 个红球、b 个黑球的袋中随机取一球，记下颜色后放回，并加进 c 个同色球．如此共取 n 次，问第 n 次取出红球的概率 p_n．

解 令 R_n：事件“第 n 次取出红球”，
B_n：事件“第 n 次取出黑球”．

则 $P(R_1)=r/(r+b)$， $P(B_1)=b/(r+b)$．

由全概率公式

$$P(R_2)=P(R_1)\ P(R_2|R_1)+P(B_1)\ P(R_2|B_1)$$
$$=\frac{r}{r+b}\ \frac{r+c}{r+b+c}+\frac{b}{r+b}\ \frac{r}{r+b+c}$$
$$=r/(r+b).$$

即 $P(R_2)=P(R_1)$（！！）；仿上可得 $P(B_2)=P(B_1)$．

发现：第二次抽取时与在有 r 个红球、b 个黑球的袋中随机取一球的结果及可能性是一样的．虽然第二次袋中实际上多了 c 个球，但仍可看成只有 $r+b$ 个球．

并且归纳可证 $P(R_n)=P(R_1)$ 及 $P(B_n)=P(B_1)$．

故所求的概率 $p_n=r/(r+b)$． □

重视 Pólya 模型。

【再看例 1.2.3，每次取球就可看为 $c=1$ 的 Pólya 模型；

【(97-1-1(5)) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄球，30 个白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，问第二人取得黄球的概率是_________．】

例 1.3.7 有一批同型号产品，已知其中由一厂生产的占 30%，二厂生产的占 50%，三厂生产的占 20%，又知这三个厂产品的次品率分别为 2%、1%和 1%．求从这批产品中任取一件是次品的概率．

解 A_i：产品取自第 i 厂； B：取出次品．由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=0.30\times0.02+0.50\times0.01+0.20\times0.01=0.013.$$

例 1.3.8 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

1）求先抽到的一份是女生表的概率 p ；

2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解 设H_i ={报名表是第 i区考生的}，i=1,2,3，

则 $$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\tfrac{1}{3};$$

1） $$p=P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_1|H_i)=\tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{10}+\tfrac{7}{15}+\tfrac{5}{25})=\tfrac{29}{90}.$$

2）由 Pólya 模型知 $P(\bar{A}_2|H_1)=P(\bar{A}_1|H_1)=\frac{7}{10}$，

类似地有 $$P(\bar{A}_2|H_2)=\tfrac{8}{15},\quad P(\bar{A}_2|H_3)=\tfrac{20}{25};$$

$$P(A_1\bar{A}_2|H_1)=\tfrac{7}{30},\quad P(A_1\bar{A}_2|H_2)=\tfrac{8}{30},\quad P(A_1\bar{A}_2|H_3)=\tfrac{5}{30}.$$

于是再由全概率公式 $$P(\bar{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\bar{A}_2|H_i)=\tfrac{1}{3}(\tfrac{7}{10}+\tfrac{8}{15}+\tfrac{20}{25})=\tfrac{61}{90},$$

$$P(A_1\bar{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_1\bar{A}_2|H_i)=\tfrac{1}{3}(\tfrac{7}{30}+\tfrac{8}{30}+\tfrac{5}{30})=\tfrac{2}{9}.$$

因此，$q=P(A_1|\bar{A}_2)=P(A_1\bar{A}_2)/P(\bar{A}_2)=\frac{2}{9}/\frac{61}{90}=\frac{20}{61}$. □

例 1.3.9 假设根据对某地区自然人群以往的普查，统计得到该地区癌症的发病率为 0.0004. 若用 C表示事件“被检查者诊断为癌症”，则 $P(C)$=0.0004. 又如用 A表示事件“某项指标的化验结果为阳性”，根据该地区人群以往的临床记录，还得到 $P(A|C)$ = 0.95 及 $P(\bar{A}|\bar{C})$ = 0.90. 现在该地区某人作此项化验，结果为阳性，求在这个条件下此人经诊断确为癌症的概率 $P(C|A)$.

解 由设可知 $P(\bar{C})=1-P(C)=0.9996$， $P(A|\bar{C})=1-P(\bar{A}|\bar{C})=0.10$. 由 Bayes 公式

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)P(A\mid C)}{P(C)P(A\mid C)+P(\bar{C})P(A\mid\bar{C})}$$
$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times010}=0.0038.$$

例 1.3.10 已知男人中有 5%的色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机挑选一人恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 记号 A：色盲患者， M：男， W：女.

$$P(M\mid A)=\frac{P(M)P(A|M)}{P(M)P(A|M)+P(W)P(A|W)}$$
$$=\frac{P(A|M)}{P(A|M)+P(A|W)}=\frac{0.05}{0.05+0.0025}=\frac{20}{21}\approx0.95.$$

总结

- 应用

例 1.3.11 设某类元件的可靠度均为 $r\in(0,1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的. 现在将 $2n$个元件组成下面图示的两种系统，试求两系统的可靠性.

【 $R_a=2r^n-r^{2n}=r^n(2-r^n)$，

$R_b=(2r-r^2)^n=r^n(2-r)^n$】

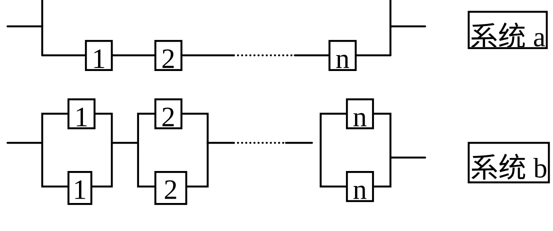

图 1.3.3　两种系统图

- **独立性概念**

例 1.3.12 (00-4-2(4)) 设 A，B, C 是三个事件两两独立，则 A，B, C 相互独立的充分必要条件是（ ）

A) A 与 BC 独立； B) AB 与 $A \cup C$ 独立 ；

C) AB 与 AC 独立； D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立； 【A】

【例 (2003-4-2(5)[4]) 对于任意二事件 A 和 B，( )

(A) 若 $AB \neq \emptyset$，则 A，B 一定独立.

(B) 若 $AB \neq \emptyset$，则 A，B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \emptyset$，则 A，B 一定独立.

(D) 若 $AB = \emptyset$，则 A，B 一定不独立. 【B】 】