

强化部分

第六课 微积分

第 1 章 一阶与高阶可降阶常微分方程

(一) 常微分方程的知识结构与要点

- 一个概念：微分方程的“解”
 - (1) 方程及其分类解：方程的阶、线性非线性
 - (2) 解：一般解、特解、定解条件、初值问题
- 三类方程：按类求解；观察待定函数或常数方法。
 - (1) 一阶方程：
 - (2) 高阶可降阶方程：
 - (3) 高阶线性方程：
 - 线性方程解的结构理论
 - 常系数线性方程的规律待定法
 - 欧拉方程： $x^2 y'' + a x y' + b y = f(x)$
 - 差分方程简介
- 几类应用问题
 - (1) 几何问题：切线、法线，曲率，弧长和面积
 - (2) 物理力学问题：根据力学和物理定律，
 - (3) 其他方面简单问题。

(二) 微分方程及解的概念

1. (03_2) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 之解，则 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的表达式为 (A)

(A) $-\left(\frac{y}{x}\right)^2$; (B) $\left(\frac{y}{x}\right)^2$; (C) $-\left(\frac{x}{y}\right)^2$; (D) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$.

2. 判断函数 $y_1(x) = c_1 e^{-x^2} + 1$, $y_2(x) = c_2$, $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$, $c_i, i = 1, 2, 3$ 为任意常数，是否是方程：(a) $y' = 2x(1 - y)$; (b) $xy'' - (1 - 2x^2)y' = 0$ 之解？是否通解？

3. 方程 $y' + p(x)y = 0$, $p(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 讨论：

- 1) 此解是否一定是周期函数？若是请证明；
- 2) 若不一定是请举反例，并找出一定为周期解的条件；

4 (04_1) 已知 $f'(e^x) = x e^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) = \underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2}$.

(三) 一阶微分方程及其解法

- 可分离变量型 : $y' = f(x) \cdot g(y)$
- 可化为分离变量型 : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right), y' = f(ax + by)$
- 一阶线性方程 : $y' + p(x)y = q(x)$
- 伯努利方程 : $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$
- 全微分、简单积分因子 : $X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$

1. 判断下列一阶方程的类型:

1) $e^{x^2+y^2}y' = \frac{x}{y}$, (可分离型)

2) $y(1+x^2)dx - x(1+y^2)dy = 0$, (可分离型, 明显积分因子)

3) $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$, (零齐方程)

4) $y'tgx - y = 5$ (可分离型, 一阶线性, 明显积分因子)

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$ (零齐方程, 一阶线性, 明显积分因子)

明显积分因子: $x dy - y dx + x dx = 0 \Rightarrow \frac{x dy - y dx}{x^2} + dx = 0$

6) $y' = \frac{y}{x + \sin y}$ (对 x 是一阶线性, 明显积分因子)

对 x 是一阶线性: $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \sin y$;

明显积分因子: $x dy - y dx + \sin y dy = 0 \Rightarrow \frac{x dy - y dx}{y^2} + \frac{\sin y}{y^2} dy = 0$

7) $(y+2x)\frac{dy}{dx} = y$ (零齐方程, 明显积分因子)

零齐方程: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+2x}$;

明显积分因子:

$y dy + 2x dy - y dx = 0 \Rightarrow y^2 dy + x 2y dy - y^2 dx \Rightarrow \frac{x dy^2 - y^2 dx}{y^2} + dy = 0$

8) $xy' + y = 2\sqrt{xy}$ (零齐方程, 伯努利方程, 全微分方程)

全微分方程: $xy' + y = 2\sqrt{xy} \Rightarrow (xy)' = 2\sqrt{xy}$

9) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x-y} + x$, ($y' = f(ax+by)$ 型)

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x-y} + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + (x-y) \Rightarrow 1 - \frac{d(x-y)}{dx} = \frac{1}{x-y} + (x-y).$$

10) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y+1}$, (变换成零齐方程型 : $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{Y}{X}\right)$)

3 (05_1, 2) 满足 $\begin{cases} xy' + 2y = x \ln x \\ y(1) = -1/9 \end{cases}$ 的解为 $y = \frac{x}{3}(\ln x - \frac{1}{3})$

4 (05_3, 4) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 $xy = 2$ 。

5 (04_2) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 $y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}$ 。

6. 解方程 : $\begin{cases} 2xdy - ydx = 2y^2dy \\ y(0) = 1 \end{cases}$. ($\frac{x}{y^2} = -2\ln y$)

7. (91) 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \ln 2$ 则 $f(x)$ 是 (B)

(A) $e^x \ln 2$; (B) $e^{2x} \ln 2$; (C) $e^x + \ln 2$; (D) $e^{2x} + \ln 2$ 。

8. (92) $y' + y \tan x = \cos x$ 的通解是 ($y = (x+c)\cos x$)。

9. (93) 求 $(x^2-1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 之特解. ($y = \frac{\sin x - 1}{x^2 - 1}$)

10. (88) 求 $xy' + y = 2\sqrt{xy}$ 的通解. (零齐; 伯努利; 全微分)

11. 若 $y' = \sqrt{4x+2y-1}$, 求一般解. ($\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+1) = x+c$)

12. 若 $\frac{1}{\sqrt{y}}y' + \frac{4x}{x^2-1}\sqrt{y} = x$, 求一般解. (伯努利 $y = \left(\frac{x^2(x^2-2)+c}{8(x^2-1)}\right)^2$)

13. 若 $(x+2xy-y^2)y' + y^2 = 0$ 求一般解. (对 x 线性, $x = -y^2 + c y^2 e^{\frac{1}{y}}$)

(四)一阶方程综合题:

1 (03_3) 设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x), \quad \text{且 } f(0) = 0, \quad f(x) + g(x) = 2e^x.$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程; (2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

2. (99) 今有 $\begin{cases} y' - 2y = \varphi(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \text{当 } x < 1 \\ 0, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$, 试求 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数

$$\text{解。} (y(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1, & x < 1 \\ (1 - e^{-2})e^{2x}, & x \geq 1 \end{cases})$$

3. (96) 设 $f(x)$ 为连续函数

- (1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解. 其中, $a > 0$;

- (2) 若 $|f(x)| < k$ (常数), 证明当 $x \geq 0$, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

4. (01) 函数列 $f_n(x), n = 1, 2, \dots$, 满足初值问题: $\begin{cases} f'_n(x) - f_n(x) = x^{n-1}e^x \\ f_n(1) = \frac{e}{n} \end{cases}$

$$\text{求: } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (-e^x \ln(1-x))$$

5. 初值问题 $\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ 且 $\int_0^{+\infty} a(x)dx = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{a(x)} = 0$, 其中 $a(x), f(x)$ 为连

续函数, 证明: 上述初值问题之解 $y(x)$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 。

(五) 二阶可降阶方程 $y'' = f(x, y, y')$ 及其解法

- 缺 y 及 y' 的方程: $y'' = f(x)$, 直接积分;
- 缺 y 的方程: $y'' = f(x, y')$, 令 $p(x) = y'(x)$;
- 缺 x 的方程: $y'' = f(y, y')$, 令 $p(y) = y', y'' = p \frac{dp}{dy}$

1. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$; (令 $y' = p(x)$, 其解为: $((x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = 1)$)

2. (02_{1,2}) $\begin{cases} y y'' + y'^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$, 求 $y = y(x)$. ($y = \sqrt{x+1}$ 或 $y^2 = x+1$)

3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$. (令 $y' = p(x)$ $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + c_1 \arctg x + c_2$)

4. $y y'' - 3y'^2 = 0$, ($y = \text{常数}$; 或 $y^2 = \frac{1}{c_1 x + c_2}$)

(六) 微分方程应用问题

- 两类问题：几何方面的应用，物理、力学方面的应用；
- 两种方法：一是规律“翻译”；二是微量平衡分析；
- 做题的三步曲：列方程 \Rightarrow 解方程 \Rightarrow 解的分析。

在几何方面的应

几何量的分析表示：

- 切线 MT ：方程 $Y - y = f'(x)(X - x)$ ；

$$\text{次切距 } PR = |y \cdot \cot \alpha| = |y/y'|,$$

$$\text{切线长 } MP = \sqrt{PR^2 + MR^2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2},$$

- 法线 MN ：方程 $Y - y = \frac{-1}{f'(x)}(X - x)$ ；

$$\text{次法距 } QR = |y \cdot \tan \alpha| = |y \cdot y'|, \quad \text{法线长 } MQ = \sqrt{MR^2 + QR^2} = \sqrt{y^2 + (y \cdot y')^2};$$

- 弧微分与弧长： $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ ； $l = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$

- 曲率： $\rho = \frac{d\alpha}{dl} = \frac{d \arctan y'}{\sqrt{1 + (y')^2} dx} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$

1. (03_2) 设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ ，其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q ，且线段 PQ 被 x 轴平分。

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程；

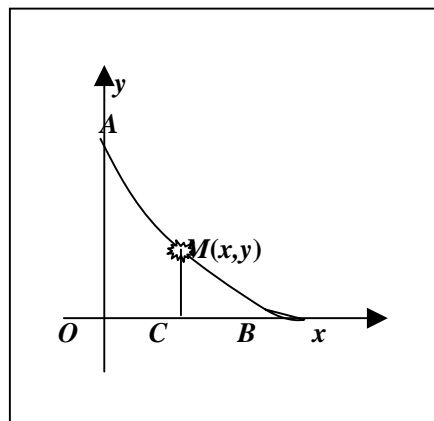
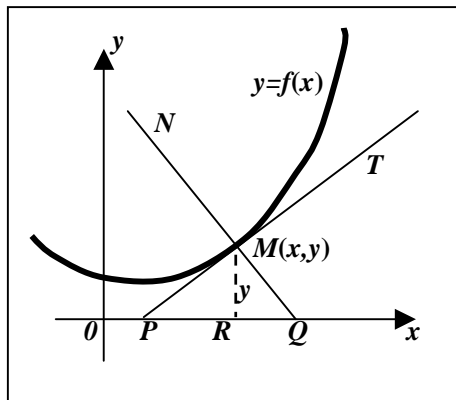
(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l ，

试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s 。

2. (03_4) 设 $y = f(x)$ 是第一象限内连接点

$A(0, 1), B(1, 0)$ 的一段连续曲线， $M(x, y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影， O 为坐标原点。若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为

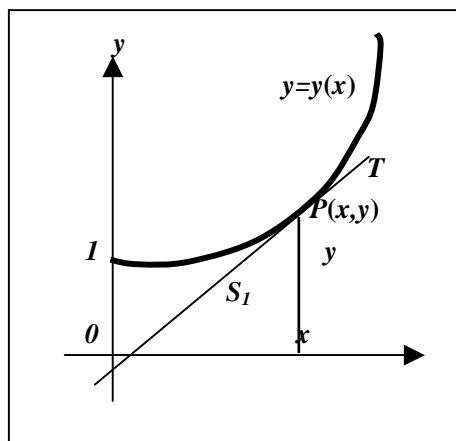
$$\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}, \quad \text{求 } y = f(x) \text{ 的表达式.}$$



第 2 题

3. (99) 函数 $y(x), (x \geq 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0$, $y(0) = 1$ 过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形

面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程. ($y = e^x$)



第 3 题

4. (98) $y = y(x)$ 为上凸连续曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且在点 $(0,1)$ 点

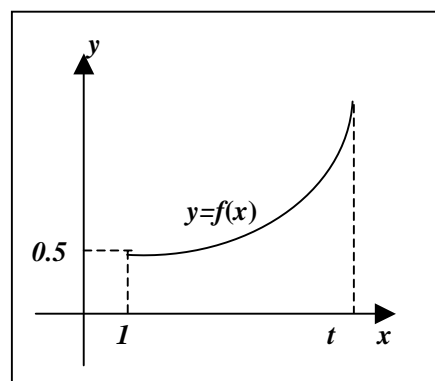
处的切线方程为 $y = x + 1$, 求此曲线的方程及其

极值. ($y = 1 + \ln 2 + \ln(\cos(\frac{\pi}{4} - x))$, 极大点 $x = \frac{\pi}{4}$)

5. (98) $y = f(x)$ 在连续, 若曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = 1, x = t (t > 1)$ 、与 x 轴所围的平面图形, 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体积为

$$V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)], \text{ 且 } y(2) = \frac{2}{9},$$

求 $y = f(x)$ 所满足微分方程及条件, 并求其解。



第 5 题

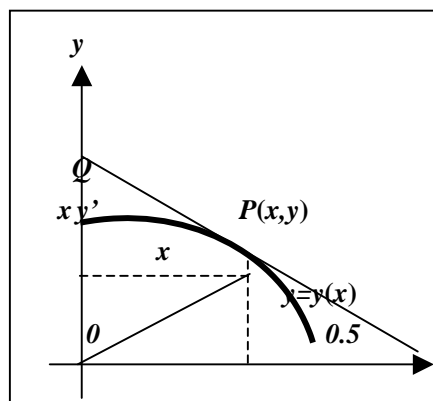
$$(y = x - x^3 y)$$

6. (01) 平面曲线 L 上任一点 $P(x, y), (x > 0)$, 到原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且过点 $(\frac{1}{2}, 0)$.

(1) 求曲线 L 的方程 $y = y(x)$; ($y = \frac{1}{4} - x^2$)

(2) 求在第一象限部分的一条切线使其与 L 及

两坐标轴所围面积最小. ($y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$)



7. (02_2) 求微分方程的 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小。

$$(y = x + Cx^2, V'(C) = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right), C = \frac{75}{124})$$

8. 将质量为 m 的物体, 以初速 v_0 垂直向上射出, 设空气阻力与运动速度的平方成正比, 比例系数 $k^2 > 0$. 求物体到达的高度, 到这最高处的时间, 落到原地时的速度及下落时间?

$$(\text{上升的最高高度 } H = \frac{m}{2k^2} \ln \frac{mg + k^2 v_0^2}{mg} = \frac{m}{2k^2} \ln \left(1 + \frac{k^2 v_0^2}{mg} \right);$$

$$\text{上升到顶点的时间: } \hat{t} + \frac{2m}{k\sqrt{mg}} \ln \frac{\sqrt{mg} + kv}{\sqrt{mg} - kv}$$

$$\text{落地时间: } T = \hat{t} + \frac{2m}{k\sqrt{mg}} \ln \frac{\sqrt{mg} + k\bar{v}}{\sqrt{mg} - k\bar{v}}; \quad \text{其中 } \bar{v} = v_0 \sqrt{\frac{mg}{mg + k^2 v_0^2}}.$$

9. (04_1) 某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少? (1.05km).

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

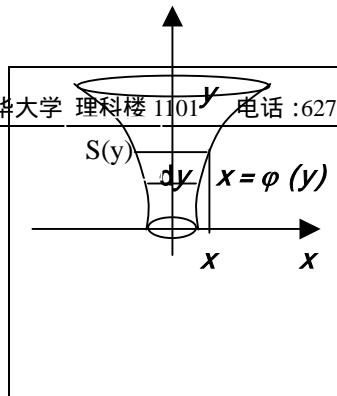
10. (00) 从船上向海中下沉某种仪器, 需确定下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 由静止从海平面垂直下沉, 在下沉中阻力与速度成正比, 比例系数 $k > 0$, 同时受到浮力, 设仪器质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 试建立方程并求解 $y = y(v)$.

$$(y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln \frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho})$$

11. (03_2) 有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y) (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图), 容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求, 当以 $3m^3 / \text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2 / \text{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程. (注: m 表示长度单位米, \min 表示时间单位分.)



12. 光线穿过薄水层时, 被吸收之数量与入射量以及水层厚度成正比. 若穿过 2 米厚的水层时, 最初的光线被吸收掉 $\frac{1}{3}$, 试问到达水深 12 米处时, 光线还剩多少?

$$(Q(12) = 0.0878Q_0)$$

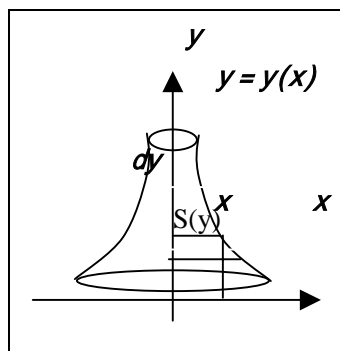
13. (00) 某湖泊水量为 V , 每年入湖含污物 A 的污水, 入湖污水量 $\frac{V}{6}$, 入湖不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出量 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中有污物 $5m_0$, 超过国家标准. 为治污从 2000 年初开始, 限定入湖污水含 A 浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$, 问多少年后湖中含污物的量降至 m_0 .

14. 作一个柱台座, 柱台座断面面积函数为 $S = S(y)$,

$S(h) = S_0$, 台柱高为 h , 其上受力为 P , 使每个断面上的压强

都一样 (等强度柱台座), 求 $S = S(y)$. ($S(y) = S_0 e^{-\frac{\rho(y-h)}{p}}$,

$$p = \frac{P}{S_0})$$



15. 一容器总高为 H , 在高度为 h 处的断面面积为 $S = S(h)$, 在底部有一面积为 s_0 的

小孔, 若水流出速度 v 是水深 h 的函数,

$v = \mu \sqrt{2gh}$, 若在容器装满水后, 将底部小孔打

开, 问多久水将流尽? ($t = \frac{\sqrt{2}}{\mu \sqrt{g}} \int_{h^2}^{H^2} S(u^2) du$)

