基础部分
第四课 概率统计
第6章 抽样分布与参数点估计

<u>本讲内容</u>

§6.1 总体与抽样分布 §6.2 参数点估计 §6.3 点估计的优良标准

<u>本讲提要</u>（略．见大纲）

§6.1 样本与抽样分布

6.1.1 总体和样本的概念与关系

1．概念

总体X、样本X_1，X_2，…，X_n和样本观测值x_1，x_2，…，x_n ；

样本的矩： $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ， $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,k}$ 和 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

总体的矩 $\mu_k=EX^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF_X(x)$ 和

$\sigma_k=E(X-EX)^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k dF_X(x)$，

2．矩间关系 $EM_k=\mu_k$， $M_k\xrightarrow[n\to\infty]{a.e.}\mu_k$

3．分布间关系及经验 *df*

$F_{X_j}(x)=F(x)$ 且 $F_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}F_X(x_j)$

定义（经验 *df*） $F_n^*(x;\ x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}0 & if \quad x<x_{(1)}\\ k/n & if \quad x_{(k)}\le x<x_{(k+1)}\\ 1 & if \quad x_{(n)}\le x\end{cases}$，$k=1,2,\ldots,n$-1

此时 $X^*\sim\begin{pmatrix}x_{(1)} & x_{(2)} & \cdots & x_{(n)}\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n},\end{pmatrix}$.

定理（Гливенко） 由 x_1，x_2，…，x_n 决定的经验*df* $F_n^*(x)$，对*x*一致地收敛到总体*df* $F(x)$，$\lim_{n\to\infty}F_n^*(x)=F(x)$.

6.1.2 常用抽样分布与统计量

1．正态总体$N(\mu,\sigma^2)$常用的样本函数

1） 样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\sigma^2/n)$，从而 $Z:=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

2） $K_n^2:=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ 的分布．

3） $K^2:=(n-1)S^2/\sigma^2$的分布，及 $\overline{X}$和样本方差S^2独立．

4） $T:=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 的分布．

5） $F_{n_1,n_2}=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}$ 的分布．

2．正态总体常用的样本函数间的关系

3．χ^2-分布、*t*-分布和*F*-分布性质与百分位点

定义(典型模式) $\chi^2(n)$分布：n个独立的标准正态变量的平方和的分布.

$t(n)$分布：设rv U与V^2独立，且分别～$N(0,1)$和$\chi^2(n)$分布，则$T_n=\dfrac{U}{\sqrt{V^2/n}}\sim t(n)$。

2. 正态总体常用的样本函数间的关系

3. χ^2-分布、t-分布和 F-分布性质与百分位点

[典型例题]

例 6.1.1 设X_1，X_2，⋯，X_n是总体X的简单样本，$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ q & r & p\end{pmatrix}$，其中 $0<p,q,r<1$，$p+q+r=1$，

(1) 求X_1，X_2，⋯，X_n最大值M的分布.

(2) 如果 $r=0$，求样本均值的分布.　(解略)

例 6.1.2 设 X_1，X_2，⋯，X_{20} 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单样本，则统计量 $\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i\Big/\sqrt{\sum_{i=11}^{20}X_i^2}$ 服从的分布是____________

例 6.1.3 (01-3-1(5)) 设总体X~ $N(0, 2^2)$，而X_1，X_2，⋯，X_{15}是来自总体X的简单随机样本，则rv$Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$服从_____分布，参数为________.

例 6.1.4 设$X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$，是正态总体的简单样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$和$S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

1) 试求$(n-1)(X_1-\mu)^2\Big/[\sum_{i=2}^{n}(X_i-\mu)^2]$的分布.

2) 试求 $\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

例 6.1.5 (99-3-12[7]) 设X_1，X_2，⋯，X_9，是正态总体的简单样本，令 $Y_1=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i$，$Y_2=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_{6+i}$，$S^2=\dfrac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}\left(X_i-Y_2\right)^2$ 和 $Z=\sqrt{2}\ (Y_1-Y_2)/S$. 试证 $Z\sim t(2)$.

【注意$U=\dfrac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$. 而 $K^2=\dfrac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$ 】

例 6.1.5(05-1-14[4]) 设X_1，X_2，⋯，X_n $(n\geq 2)$为来自$N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则 (　　)

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$。

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

【答案为 D。(A)与(C)左方的常系数都应为$\sqrt{n}$，而(B)中两个 n都是 $n-1$ 】

水木艾迪考研冲刺班 (04 年 12 月) 最后所预测的一个考点; 冲刺班所讲的例 2.1.2 之 (1) 是求$\boxed{\dfrac{(n-1)(X_1-\mu)^2}{\sum_{i=2}^{n}(X_i-\mu)^2}}$的分布，差别在于那里总体是更一般的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，结论是一样的。《进阶——概率统计》中的问题 10.4 和问题 11.2 就特别讲如何记住常用抽样分布与典型模式，以及它们的应用。

§6.2 参数点估计

6.2.1 点估计问题一 引例 1

参数估计的依据；
参数点估计的方法：
6.2.2 矩估计与极大似然估计

矩估计：　$\boxed{\hat{\mu}_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=M_k}$，　k =1，2，...，m

极大似然估计：　$\boxed{L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta).}$

§6.3 估计量的优良标准
6.3.1 无偏性，有效性与一致性(或相合性)
6.3.2 重要结论与方法

1）设总体X的k阶矩$\mu_k=EX^k$，　$k\geq1$ 存在．又设X_1，X_2，…，X_n是X的一个样本．则不论总体服从什么分布，k阶样本矩 $M_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$ 一定是k阶总体矩μ_k的无偏估计．

2）设总体 X 为正态，则 $\hat{\mu}_M=\hat{\mu}_L=\bar{X}$，$\hat{\sigma}_M^2=\hat{\sigma}_L^2=S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$．且

（1）μ 的矩估计量和似然估计量 $\bar{X}$是无偏的；

（2）σ^2的矩估计量和最大似然估计量$\hat{\sigma}^2=S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 是有偏的；

（3）$S^2=\dfrac{n}{n-1}S_n^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 是σ^2的无偏估计量．

[**典型例题**]

引例 2 设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5（kg）。如果由以往经验知标准差为 1.15kg．试估计生产线上包装机装箱糖果的期望重量（取α =0.05）．(用矩估计及似然估计)

例 6.2.1 设X~ B(1，p)．X_1，X_2，…，X_n 是其一个样本，试求参数p的矩估计量 $\hat{p}_M$．

【答 $\hat{p}_M=p_L=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$.】

例 6.2.2 设X_1，X_2，…，X_n是总体X的一个样本．

（1）设总体X~ $U[0,\theta]$，$\theta(>0)$未知，试求θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$．

（2）设总体X~ $U[-\theta,\theta]$，试求θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$．

【（1）$\hat{\theta}_M=2\bar{X}$

$$L(\mathbf{x},\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\leq x_1,x_2,\ldots,x_n\leq\theta,\ \theta>0,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

（2）$(3M_2)^{1/2}$ 或 $[3S^2(n-1)/n]^{1/2}$.　　】

例 6.2.3（99 模拟 1）设总体 X 的 pdf 为

$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq\mu,\\ \lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, & \mu<x.\end{cases}$ 这里μ和λ(>0)都是参数．又设X_1，X_2，…，X_n为该总体的简单样本，而x_1，x_2，…，x_n为其样本观察值．

（1）设λ 已知，求μ 的极大似然估计 $\hat{\mu}_L$．

（2）设μ 已知，求λ的矩估计 $\hat{\lambda}_M$．

【(1) $L(x;\lambda,\mu)=\begin{cases} n\ln\lambda-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu), & \mu\le x_i,\ i=1,\ldots,n \\ -\infty, & otherwise \end{cases}$

$\hat{\mu}_L=X_{(1)}:=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.　(2) $\hat{\lambda}_M=1/(\bar{X}-\mu)$　】

【(00-1-13[6]) 设某种元件的使用寿命 X 的 *pdf* 为 $f(x;\theta)=2e^{-2(x-\theta)}\ I(x>\theta)$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数．又设是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.】

【(02-3-1(5)) 设总体X的 *pdf* 为 $f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}\ I(x\ge\theta)$ 而 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体X的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量为_____【 $\bar{X}-1$】】

【(03-1-12[8]) 设总体X的 *pdf* 为 $f(x)=2e^{-2(x-\theta)}I(x>\theta)$，其中 $\theta>0$ 是未知参数．从总体X中抽取简单样本 X_1，X_2，…，X_n，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$.

(1) 求总体 X 的 *df* $F(x)$；　(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的 *df* $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否无偏.

【 (1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases} 1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$

(2) $F_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases} 1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$

(3) $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.] 】

【(99 年模拟 2) 设总体 *df* 为 $F(x;\lambda,\theta)=(1-(\theta/x)^{\lambda})\ I(\theta<x)$，其中 $\theta>0$，$\lambda>0$，都是未知参数。 设 X_1，X_2，…，X_n 为简单样本，

1) 求 θ 和 λ 的极大似然估计：$\hat{\lambda}_L$ 和 $\hat{\theta}_L$。

2) 设 λ 已知，上述 $\hat{\theta}_L$ 是否 θ 的无偏估计？

比较(2004-1-23[13])及(2004-1-23[9])设 *rvX* 的 *df* 为 $F(x;\alpha,\beta)=[1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}]\ I(x>\alpha)$ 】

例 6.2.4 设X～$U_{[0,\ \theta]}$，参数 θ 未知，X_1，X_2，…，X_n 是其大小为 n 的样本．则

(1) 矩估计量 $\hat{\theta}_M=2\bar{X}$ 是无偏的；

(2)* 似然估计 $\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，不是参数 θ 的无偏估计．但 $\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是比 $\hat{\theta}_M=2\bar{X}$ 有效的估计量.

【(2)* 当 $0<x<\theta$，$f_{X_{(n)}}(x)=n\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$，

$\mathrm{E}\hat{\theta}_L=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X_{(n)}}(x)\mathrm{d}x=\frac{n\theta}{n+1}\ne\theta$ ．作无偏化.

$\mathrm{D}\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mathrm{D}\theta_L=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

$\mathrm{D}(\hat{\theta}_M)=\frac{\theta^2}{3n}$．当 $n>1$ 时，$\mathrm{D}\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L\right)<\mathrm{D}\theta_M$．】

【**例** 设总体X~Ex (λ)，未知参数 $\lambda=1/\theta>0$，*pdf* 为 $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\ I(x>0)$．又设 X_1，X_2，…，X_n 是来自X的样本，试证

(1) $\bar{X}$ 和 $nX_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量，其中 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

（2）当 $n>1$ 时，对于 θ 的估计，$\bar{X}$ 较 $nX_{(1)}$ 有效.

【注意 $f_{X_{(1)}}(x;\theta)=\dfrac{n}{\theta}e^{-nx/\theta}\ \ I(x>0)$，$X_{(1)}\sim \mathrm{Ex}\,(n/\theta)$，从而 $EX_{(1)}=\theta/n$，故 $nX_{(1)}$ 也是 θ 的无偏估计.】

【例 设 X_1，X_2，…，X_{2n} 是来自方差有限的总体 X 的大小为 $2n$ 的简单随机样本，令 $T_1=\bar{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，$T_2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_{2i}$．则

（1）对总体期望作估计时 T_1 和 T_2 是否无偏？T_1 是否比 T_2 有效？请说明上述结论理由.

（2）证明 T_2 是总体期望一致估计（即相合估计）

【（1）T_1 和 T_2 都是 μ 的无偏估计。

$DT_1=\frac{1}{(2n)^2}\sum_1^n DX_i=\frac{1}{(2n)^2}\cdot 2n\sigma^2=\frac{1}{2n}\cdot\sigma^2<\frac{1}{n}\cdot\sigma^2=DT_2$ 故 T_1 比 T_2 有效

(2) 由大数定理，$\frac{1}{n}\sum_1^n(X_{2i}-EX_{2i})=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_{2i}-\mu)\to 0$ （P），因此 $T_2=\frac{1}{n}\sum_1^n X_{2i}\to\mu$ （P），即 T_2 是 μ 的一致估计。]】

例 6.2.5（2005-3-23[13]） 设 X_1，X_2，…，X_n（$n>2$）为来自总体 N（0，σ^2）的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\bar{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

求：(I) Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$

(III) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求参数 c.

解 (I) $DY_i=D(X_i-\bar{X})=D\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{n=1}X_i\right]=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$，$i=1,2,\cdots,n$

(II)
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_n)&=E\left(Y_1-EY_i\right)\left(Y_n-EY_n\right)=E\left(X_1-\bar{X}\right)\left(X_n-\bar{X}\right)\\&=E\left(X_1X_n\right)+E\left(\bar{X}^2\right)-E\left(X_1\bar{X}\right)-E\left(X_n\bar{X}\right)\\&=EX_1EX_n+D\bar{X}-\frac{1}{a}E\left(X_1^2\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{2}E\left(X_1X_i\right)\\&\quad-\frac{1}{n}E\left(X_n^2\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_iX_n\right)\\&=-\frac{1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

(III) $E[c(Y_1+Y_n)^2]=cD(Y_1+Y_n)$
$$\begin{aligned}&=c[DY_1+DY_n+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)]\\&=c\left[\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}\right]\sigma^2=\frac{2(n-1)}{n}c\sigma^2=\sigma^2\end{aligned}$$

故 $c=\dfrac{n}{2(n-2)}$.

注 本题(1)是水木艾迪考研冲刺班摸底模拟的原题第 23 题，也是在多个高校 12 月冲刺讲座的 6 个重点题之一。23 题原题如下：

例 6.2.6 设 X_1，X_2，…，X_n 是独立同分布的随机变量，方差为 $\sigma^2>0$．令 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(X_1-\bar{X})$ = ___________ 。

在《进阶——概率统计》的例 1.4，设 X_1, X_2, …,X_n iid, ~ N(μ, σ^2), 它们的算术平均值记为 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$．令 $Y_k=X_k-\bar{X}$，求 DY_k 及其分布，k=1,2,⋯；在 2004 年 12 月冲刺班例 1.6.7 也是这类题，进一步还给出 $Y_k=X_k-\bar{X}$ 分布和协方差。