

## 强化部分

### 第六课 微积分

#### 第 4 章 多元微分学及其应用

##### (零) 知识结构与要点

##### (1) 多元函数、极限、连续性

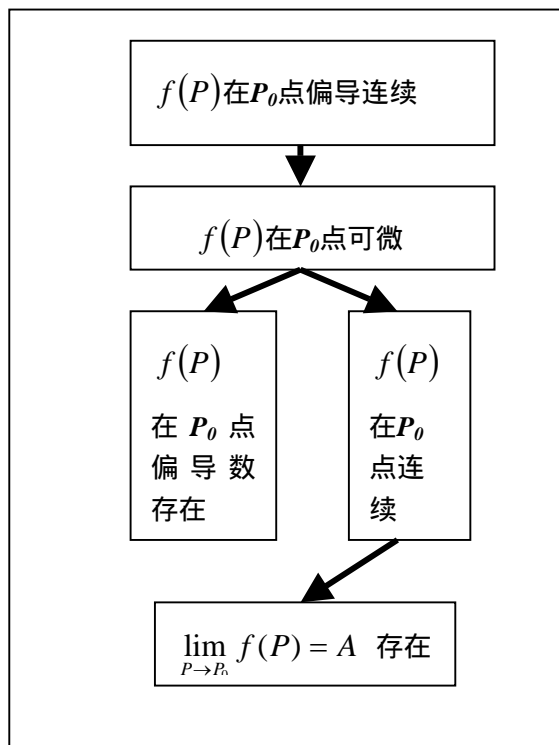
- 定义与符号：函数符号的三式：

$$\text{显式 } z = f(x, y); \text{ 隐式: } F(x, y, z) = 0 \text{ 和 参数式: } \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

- 多元极限：多路迳
- 连续：初等函数连续性，闭域上  
连续函数的三性质：有界性，  
取最大最小性，中值性

##### (2) 多元函数的偏导数与微分

- 导数：偏导数，方向导数与梯度，  
一元化方法
- 微分：定义为线性主部，可微，可导，  
连续的关系；微分的几何意义：切平  
面存在可微的充分条件：一阶偏导连续；  
梯度及方向导数。



##### (3) 复合函数求导法则

- 函数对中间变量的导数乘上中间变量对自变量的导数；几多中间变量有几多项；几层复合有几层积。关键在函数关系分析。
- 隐函数存在定理与隐函数微分法

##### (4) 多元微分学的应用

- 求空间曲面的法线、切平面；求空间曲线的切线与法平面；多元台劳公式研究函数性态
- 多元极值问题：无条件、条件极值问题；闭域上最值问题

##### (一) 多元函数概念典型题

1. (94)  $z = f(x, y)$  在  $p_0(x_0, y_0)$  的两个偏导存在是函数  $z = f(x, y)$  在  $p_0(x_0, y_0)$  连续的 (D)

(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充要条件; (D) 既非充分又非必要。

2. (02\_1) 考虑二元函数的下列性质:

(1)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续; (2)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  两偏导数连续;

(3)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可微; (4)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  两偏导数存在。则有: (A)

(A)  $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ ; (B)  $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ ;

(C)  $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ ; (D)  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$ 。

3. 下列哪一条件成立时能推出  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  点可微, 且  $df(x_0, y_0) = 0$ ? ( D )

(A) 在点  $(x_0, y_0)$  两个偏导数  $f'_x = 0, f'_y = 0$

(B)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全增量  $\Delta f = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ ,

(C)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全增量  $\Delta f = \frac{\sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

(D)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的全增量  $\Delta f = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

4. (03\_1) 已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ , 则

(A) 点  $(0, 0)$  不是  $f(x, y)$  的极值点. (B) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极大值点.

(C) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点  $(0, 0)$  是否为  $f(x, y)$  的极值点. [ A ]

5. (03\_4) 设可微函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  取得极小值, 则下列结论正确的是

(A)  $f(x_0, y)$  在  $y = y_0$  处的导数等于零. (B)  $f(x_0, y)$  在  $y = y_0$  处的导数大于零.

(C)  $f(x_0, y)$  在  $y = y_0$  处的导数小于零. (D)  $f(x_0, y)$  在  $y = y_0$  处的导数不存在.

6. 设  $D$  是一有界闭域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 在  $D$  内偏导数存在, 且满足等式

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -f(x, y), \text{ 若 } f(x, y) \text{ 在 } D \text{ 的边界上恒为零, 则 } f(x, y) \text{ 在 } D \text{ 上} [D].$$

(A) 存在非零的最大值.

(B) 存在非零的最小值.

(C) 只在边界上取到最大值和最小值。 (D) 能在边界上取到最大值和最小值。

7. 设在  $R^2$  上的连续函数  $f(x, y)$  满足条件:  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{|f(x, y)|}{\rho} = +\infty$ , 其中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(1) 证明:  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$  或  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$ ;

(2) 当  $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$  时, 证明存在点  $P_0(x_0, y_0) \in R^2$ , 使得  $f(P_0) = \max_{(x, y) \in R^2} f(x, y)$ .

(3) 若在  $R^2$  上的  $f(x, y)$  可微, 证明存在点  $P_0(x_0, y_0) \in R^2$ , 使得  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0$ .

(4) 若在  $R^2$  上的  $f(x, y)$  可微, 证明对任何常数  $a, b$ , 存在点  $P_0(x_0, y_0) \in R^2$ , 使得

$$\text{grad } f(P_0) = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

## (二) 多元函数微分法典型题

1. (05\_2) 设函数  $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$  其中函数  $\varphi$  具有二阶导数,  $\psi$  具有一阶导数, 则必有 [B]

$$(A) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (B) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (C) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (D) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. (05\_1) 设函数  $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$ , 单位向量  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , 则  $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1, 2, 3)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. (92) 设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f \in C^2$ , 求:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$

$$(e^{2x} \sin y \cos y f''_{11} + 2e^x (y \sin y + x \cos y) f''_{12} + 4xy f''_{22} + e^x \cos y f'_1)$$

4. (93)  $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ . ( $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^4 y f''_{11} - y f''_{22} + 4x^3 f'_1 + 2x f'_2$ )

5. (88) 设  $u = y f\left(\frac{x}{y}\right) + x g\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $f, g \in C^2$  求:  $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = ?$  (0)

6. (98) 设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y \varphi(x+y)$ ,  $f, \varphi \in C^2$ , 求:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,

$$(y f''(xy) + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y))$$

7. (00) 设函数  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$  ,  $f, g \in C^2$  , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  .

$$\left( f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + xy f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \right)$$

8. (05\_3,4) 设  $f(u)$  具有二阶连续导数, 且  $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$  ,

$$\text{求 } x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

9. (03\_3,4) 设  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$  , 又

$$g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right], \text{求 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

10. (99) 已知  $z = u^v$  ,  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  ,  $v = \arctan \frac{y}{x}$  , 求  $dz$  .

$$\left( dz = \frac{u^v}{x^2 + y^2} \left( \left( \frac{xv}{u} - y \ln u \right) dx + \left( \frac{yv}{u} + x \ln u \right) dy \right) \right)$$

11. 设  $u(x, y) \in C^2$  , 又  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ,  $u(x, 2x) = x$  ,  $u'_x(x, 2x) = x^2$  , 求  $u''_{xx}(x, 2x)$  ,  $u''_{xy}(x, 2x)$

$$u''_{yy}(x, 2x) \text{ (注意符号的运用) } (u''_{xx}(x, 2x) = u''_{xy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x; \quad u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x)$$

12. 设  $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$  , 求表示式:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ?$  (注意循环对称性)

$$(3f''_{11} + 4(x + y + z)f''_{12} + 4(x^2 + y^2 + z^2)f''_{22} + 6f'_2)$$

13. 若  $z = f(x, y)$  满足关系:  $\forall x, y \in R, t \in R_+$  ,  $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$  (\*), 则称  $f$  为

$k$  次齐次函数。证明:  $f$  为  $k$  次齐次函数  $\Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = k f$

### 含有隐函数的导数问题

14. (05\_1) 设有三元方程  $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$  , 根据隐函数存在定理, 存在点  $(0, 1, 1)$  的一个邻域, 在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$  .

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$  和  $z = z(x, y)$  .

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $z = z(x, y)$  .

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $y = y(x, z)$  . [D]

15. (87) 设  $z$  是方程  $x + y - z = e^z$  所确定的函数  $z(x, y)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  .

$$\left( -\frac{x+y-z}{(x+y-z+1)^3} = -\frac{e^z}{(1+e^z)^3} \right)$$

16. (91) 方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  所确定的函数  $z = z(x, y)$  在点  $M(1, 0, -1)$  处的全微分.  $(dz(M) = dx - \sqrt{2}dy)$

17. (98) 设  $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctg \frac{y}{x}}$  求  $dz$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$(dz = ((2x+y)dx + (2y-x)dy)e^{-\arctg \frac{y}{x}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - xy - x^2}{x^2 + y^2} e^{-\arctg \frac{y}{x}})$$

18. 设函数  $u = f(x, y, z)$  有连续偏导数, 且  $z = z(x, y)$  由方程  $xe^x - ye^y = ze^z$  所确定, 求  $du$

$$(du = \left( f'_x + f'_z \frac{x+1}{z+1} e^{x-z} \right) dx + \left( f'_y - f'_z \frac{y+1}{z+1} e^{y-z} \right) dy)$$

19. (99) 设函数  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  由方程  $\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}$  确定,  $f, F \in C^1$ , 求  $\frac{dz}{dx}$  .

$$\left( \frac{(f + xf')F'_y - xf'F'_x}{F'_y + xf'F'_z} \right)$$

20. (92) 函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  在点  $M(1, 2, -2)$  处的梯度值.  $(\text{grad } u(r))|_M = \frac{2}{9}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$

21. (93) 数量场  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  则  $\text{div}(\text{grad } u) = (\text{div}(\text{grad } u)) = \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}$

22. (01)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 则  $\text{div}(\text{grad } r)|_{(1,-2,2)} = \left(\frac{2}{3}\right)$

21. (04\_3) 设函数  $f(u, v)$  由关系式  $f[xg(y), y] = x + g(y)$  确定, 其中函数  $g(y)$  可微, 且  $g(y) \neq 0$ ,

$$\text{则 } \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = - \frac{g'(v)}{g^2(v)} .$$

22. (04\_2) (本题满分 10 分) 设  $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ , 其中  $f$  具有连续二阶偏导数,

$$\text{求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} .$$

23. (04\_2) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $z = e^{2x-3z} + 2y$  确定, 则  $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{2}$  .

24. (04\_4) 设  $f(u, v)$  具有连续偏导数, 且满足  $f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv$  .

求  $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$  所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

$$(y' + 2y = x^2 e^{-2x} ., \quad y = (\frac{1}{3} x^3 + C) e^{-2x} ) .$$

(三) 多元微分学的应用:

#### ● 几何应用

1. (04\_1) 曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $2x + 4y - z = 0$  平行的切平面的方程是  $2x + 4y - z = 5$  .

2. (88) 求椭球面  $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  在某点  $M$  之切平面  $\pi$ , 使之过直线

$$L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2} . \quad (x+4y+6z=21, \text{ 和 } x+2z=7)$$

3. (93) 由曲线  $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ , 绕  $y$  轴转一周而成的曲面在点  $M(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  处的指向外侧的单

$$\text{位法向是什么? } (\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, \sqrt{2}, \sqrt{3}))$$

4. 若给定方程  $F(nx-lz, ny-mz)=0$ , 且  $F \in C^1$ , 证明由此确定的曲面  $S$  上任一点的切平面都

$$\text{平行于直线: } L: \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

5. 证明曲面  $S: ax+by+cz = F(x^2+y^2+z^2)$  ( $a, b, c$  为常数), 上任一点处的法线必与直线  $L:$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ 相交.}$$

6. 由坐标面  $yoz$  上, 由曲线  $z = y^2$ ,  $z$  轴和直线  $y = 1$  所围图形, 绕  $z$  轴旋转而成一旋转体, 求该体之重心到其表面上的最短距离.

或: 求该体侧表面上切平面的法线通过重心时, 其法线向量与  $z$  轴夹角的余弦.

7. 给定方程  $F(nx-lz, ny-mz)=0$ , 且  $F(x,y)$  偏导连续, 证明由该方程所确定曲面  $S$  上任一点的切平面都平行于直线:  $L: \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ .

### ● 多元极值问题

明确“三个什么”: 什么函数, (目标函数)?

在什么条件下, (约束条件)?

求什么极值? (极大, 极小)?

$$\text{写成: } \begin{cases} \text{Max } f(x, y, z) \\ \text{s.t. } g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Min } f(x, y, z) \\ \text{s.t. } g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

1. (99) 设生产某种产品须投入两种要素  $x_1$  和  $x_2$  为其投入量,  $Q$  为产出量, 若生产函数为

$Q = 2x_1^\alpha x_2^\beta$ , 其中  $\alpha, \beta$  为正常数, 且  $\alpha + \beta = 1$ , 设两种要素价格分别是  $p_1$  和  $p_2$ , 试问产出量为 12

时, 两要素投入多少, 可使费用最小? ( $x_1 = 6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^\beta$   $x_2 = 6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^\alpha$ )

2. (00) 设企业在两个分割的市场上出售同一产品, 其需求函数分别是  $\begin{cases} p_1 = 18 - 2Q_1 \\ p_2 = 12 - Q_2 \end{cases}$ , 其中  $Q$  是市

场售价万元吨, 为销售量吨, 该企业生产该产品的总成本函数是  $C = 2Q + 5, Q = Q_1 + Q_2$

(1) 若企业按价格差别策略, 试确定两个市场上该产品的售量与价格, 使利润最大;

(2) 若实行无差别策略, 试确定其两个市场上该产品的售量与统一价格, 使利润最大。

( $\text{Max } p_1Q_1 + p_2Q_2 - (2Q + 5)$ , (1)  $Q: (4, 5), p: (10, 7), 52$ ; (2)  $Q: (5, 4), p: 8, 49$ )

3. (05\_2) 求  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$  椭圆域  $D = \left\{ (x, y) \left| x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right. \right\}$  上的最大值和最小值。(3, -2)

4. (02\_1) 设有一小山, 取其底面为坐标面  $xOy$ , 底部区域为  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ , 小山高度函数为  $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ 。

(1) 设  $M_0(x_0, y_0)$  为区域  $D$  上的一点, 问  $h(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最

大? 若此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式。

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡最大的点作攀登起点, 即, 要在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上找出使 (1) 中的  $g(x, y)$  达到最大的点, 试确定攀登点的位置。

$$( (1) g(x_0, y_0) = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}; (2) \begin{cases} \text{Max} \sqrt{5x^2 + 5y^2 - 8xy} \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 - xy = 75 \end{cases}, M_1(5, -5), M_2(-5, 5) )$$

5. (04\_1) 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值.

( (9, 3) 是的极小值点, 极小值为  $z(9, 3) = 3$ ; (-9, -3) 是的极大值点, 极大值为  $z(-9, -3) = -3$ 。 )

6. 已知  $f(x, y) = (x - 6)(y + 8)$ , 求  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的最大方向导数  $g(x, y)$ , 并求  $g(x, y)$  在  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$  上的最大、最小值。(  $g(x, y)$  在区域  $D$  上的最大、最小值分别为 15, 5。 )

$$7. \text{ 园内接 } n \text{ 边多边形中, 什么面积最大? } ( \begin{cases} \text{Max} \sum_{i=1}^n \frac{r^2}{2} \sin x_i \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n x_i = 2\pi \end{cases} \text{ 等 } n \text{ 边形} )$$

8. 求函数  $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$  在第一卦象内球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$  上的极大值; 并

利其结果证明不等式:  $abc^3 < 108 \left( \frac{a+b+c}{6} \right)^6$

9. 在三角形  $ABC$  内找一点, 使到三边距离的平方和最小。

( 设  $a, b, c$  为三边之边长,  $x, y, z$  为所设点到三边之垂线长,  $A$  为三角形之面积.

$$\begin{cases} \text{Min}(x^2 + y^2 + z^2) \\ ax + by + cz = 2A \end{cases}, x = \frac{2Aa}{a^2 + b^2 + c^2}, y = \frac{2Ab}{a^2 + b^2 + c^2}, z = \frac{2Ac}{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4A^2}{a^2 + b^2 + c^2})$$

10. 底面三角形一定, 体积一定的三棱锥, 何时表面积最小。

( 设  $a, b, c$  为底面三角形三边之边长,  $x, y, z$  为顶点在底面之投影点到三边之垂线长,  $A$  为底面三角形之面积, 三棱锥体积为  $V$ ,  $h = \frac{3V}{A}$  为三棱锥之高.

$$\begin{cases} \text{Min}(a\sqrt{x^2 + h^2} + b\sqrt{y^2 + h^2} + c\sqrt{z^2 + h^2}) \\ \text{s.t. } ax + by + cz = 2A \end{cases}, )$$

11. 证明光线投射在光滑曲面的反射定理。