强化部分

第六课　微积分

第 2 章　高阶线性微分方程及其解法

- n 阶线性齐次方程方程：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

n 阶线性非齐次方程方程：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

- n 阶线性常系数齐次方程方程：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

n 阶线性常系数非齐次方程方程：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

- **线性微分方程解的结构理论**
- **常系数线性齐次、非齐次方程求解**
- **欧拉方程求解***
- **线性差分方程**

（一）高阶线性方程解的结构及常系数方程

1．(89) $p(x),q(x)$ 和 $f(x)$ 是连续函数，且线性无关的三个函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶线性非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 之解，c_1 和 c_2 是任意常数，则其通解是：（D）

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$；　(B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$；

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$；　(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

2．(01) 设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$，（$c_i,i=1,2$ 为任意常数），为某二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为（　$y''-2y'+2y=0$　）

3．(00) 具有特解 $e^{-x},2xe^{-x},3e^x$ 的三阶线性常系数齐次方程是：（ B ）

(A)　$y'''-y''-y'+y=0$；　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C)　$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$；　(D)　$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

4．(93) $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 有一特解 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$，求 α, β, γ 及通解。

（$\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -3$，$\beta = \lambda_1\lambda_2 = 2$，$\gamma = -1$）

5．(89)方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式（ a, b 为常数）是 (B)

(A) $a e^x + b$；　(B) $a x e^x + b$；　(C) $a e^x + b x$；　(D) $a x e^x + b x$.

6．(00)求 $\begin{cases} y'' - 2y' = e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ 的特解。　（$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x}{2}e^{2x}$）

7．(96)求 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 之通解.　（$y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + e^x$）

8．(90) 求 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 之通解.　（ $y = (c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2})e^{-2x}$）

9．　(92) 求 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 之通解，（ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x - (\frac{x^2}{2} + x)e^x$）

10．(91) 求 $y'' + y = x + \cos x$ 之通解　（$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x + x$）

11．(90) 求 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 之通解　（$y = \begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \dfrac{e^{ax}}{(a+2)^2}, & a \neq -2 \\ (c_1 + c_2 x + \dfrac{x^2}{2})e^{-2x}, & a = -2 \end{cases}$）

12．(99) 求 $y'' - 4y = e^{2x}$ 之通解　（$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{x}{4}e^{2x}$）

13．(04_2) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为 [A]

(A) $y* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$　(B) $y* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.

(C) $y* = ax^2 + bx + c + A\sin x$　　(D) $y* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

(二) 高阶线性方程综合题

1．(03_3) 设 $F(x) = f(x)g(x)$，其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件：

$f'(x) = g(x)$，$g'(x) = f(x)$，且 $f(0) = 0$，$f(x) + g(x) = 2e^x$.

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

（ $\begin{cases} F'(x)+2F(x)=4e^{2x} \\ F(0)=f(0)g(0)=0 \end{cases}$ ； $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$. ）

2．(94) $f\in C^2, f(0)=0, f'(0)=1$,且知 $(xy(x+y)-f(x)\cdot y)dx+(f'(x)+x^2y)dy=0$

是全微分方程，求 $f(x)$，并求方程通解。 （ $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$ ）

3． (89) 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。 （ $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$ ）

4．(84) 设级数 $y=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 求收敛域；证明满足方程 $y''-y=-1$；求和函数.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=0$，$(-\infty,\infty)$； (2) $y''=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；

(3) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1=shx+1$.

5．(02_1) (1) 验证级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},(-\infty<x<+\infty)$满足方程 $y''+y'+y=e^x$；

(2) 利用上述结果求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$,的和函数.（ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}e^x$ ）

5． (00) $f(x)$在$[0,+\infty)$可导， $f(0)=1$满足： $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$，

求函数 $f'(x)=$？ (2) 证明：$\forall x>0, e^{-x}\le f(x)\le 1$.

6 (00)在半空间 $x>0$，对任何光滑有向曲面 S，有 $\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy\equiv 0$.

其中 $f(x)$在$[0,+\infty)$一阶连续可导，且 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$求 $f(x)$。 （ $f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$ ）

6． (97)设 $f(u)$二阶连续可导，且 $z=f(e^x\sin y)$满足方程：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$ 求

$f(u)$. （ $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ ）

7． (01) 若 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$， $f(0)=0$ $g(0)=2$；求

$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx$. $\quad$ ($\int_0^{\pi}d\left(\frac{f(x)}{1+x}\right)=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$)

8.（02_2）设 $y=y(x)$ 满足：$\begin{cases}y''+py'+qy=e^{3x}\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$，则当 $x\to 0$ 时，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=$

(C).

(A)不存在； (B)等于 1； (C)等于 2； (D)等于 3

11.（03_1,2）设函数 $y(x)$ 在 R 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

12.（05_2） 用变量代换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简微分方程

$(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解。

13．设 $y=y(x)$ 是满足(*) $\begin{cases}y''-2by'+c\,y=0\\ y(0)=y(2)=0\end{cases}$ 的解， 具中 b,c 为实常数。试研究：

(1) b,c 满足什么条件时， $y=y(x)$ 为非零解？

(2) b,c 满足什么条件时， $y=y(x)$ 能符合补充条件： $y(1)=e^b$，同对求 $\sum\limits_{n=0}^{N}y(n)=?$

14．设有七阶常系数线性齐次方程： $y^{(7)}+y^{(6)}+y^{(5)}+y^{(4)}+y'''+y''+y'+y=0$。

(1) 求通解； (2) 求所有的有界解；(3) 求所有满足条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$ 的解。

(特征方程：$\lambda^7+\lambda^6+\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=\frac{\lambda^8-1}{\lambda-1}=0$)

（三）欧拉方程：$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

1．Eurler 方程：求解 $\begin{cases}x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x\\ y(-2)=2\ln 2, y'(-2)=-\ln 2,\end{cases}$ $\quad$ ($y(x)=-x-\frac{1}{2}x^2-x\ln(-x)$)

2.（04_1）欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为 $\underline{y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}}$.

(四)．线性齐次差分方程求解问题。

- 问题，求数列$\{x_n \mid n=0,1,2,\cdots\}$ 满足

一阶线性差分方程：$\begin{cases} ax_{n+1}+b\,x_n=f_n \\ x_0=\alpha \end{cases}, a\neq 0,\ or \begin{cases} x_{n+1}=px_n+f_n \\ x_0=\alpha \end{cases}$。

二阶线性差分方程：$\begin{cases} ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=f_n \\ x_0=\alpha,\ x_1=\beta \end{cases}, a\neq 0,,\ or \begin{cases} x_{n+2}=p\,x_{n+1}+q\,x_n+f_n \\ x_0=\alpha,\ x_1=\beta \end{cases}$。

- **解法 1：一阶线性差分方程的递推求解：**

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+f_n \\ x_0=\alpha \end{cases} \Rightarrow x_{n+1}=x_0p^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}p^k f_{n-k}\ .$$

$$x_{n+1}=px_n+f_n=p\left(px_{n-1}+f_{n-1}\right)+f_n=p^2x_{n-1}+\left(pf_{n-1}+f_n\right)$$

$$=p^3x_{n-2}+\left(p^2f_{n-2}+pf_{n-1}+f_n\right)=\cdots=x_0p^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}p^k f_{n-k}\ .$$

- **解法 2：二阶线性齐次差分方程 $ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0$ 的特征根法求解：**

令形式解 $x_n=\lambda^n$,代入方程得特征方程：$a\lambda^2+b\lambda+c=0$，根:

(1) α,β为实根，对应有解：$x_n^{(1)}=\alpha^n$ 和 $x_n^{(2)}=\beta^n$；

(2) α,α为重根，对应有解：$x_n^{(1)}=\alpha^n$ 和 $x_n^{(2)}=\lim\limits_{\beta\to\alpha}\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=n\alpha^{n-1}$ ，或者 $x_n^{(2)}=n\alpha^n$

(3) $\lambda=\alpha\pm i\beta=r\cdot e^{\pm i\varphi}$， $x_n=\lambda^n=e^{n\ln\lambda}=e^{n\cdot(\ln r\pm i\varphi)}=e^{n\ln r}\left(\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi\right)$,

对应有解：$x_n^{(1)}=e^{n\ln r}\cos n\varphi$ 和 $x_n^{(2)}=e^{n\ln r}\sin n\varphi$.

(4) 关于解的结构理论与线性微分方程类似，由此得一般解：$x_n=c_1x_n^{(1)}+c_2x_n^{(2)}$

1．(98) 求差分方程$2y_{n+1}+10y_n=5n$的一般解。 ($y_n=C(-5)^n+\dfrac{5}{12}n-\dfrac{5}{72}$)

2．斐波拉契数$\begin{cases} x_{n+2}=x_{n+1}+x_n \\ x_0=x_1=1 \end{cases}$ ($x_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right]$)

3．银行实行贷款购房业务，A贷元，月利r，n个月本利还清，在这n个月内按复利计息，每月连本带息还x元。

(1) 求$x=f(A,n,r)$的关系； (2) 记n个月的平均利息$v=\dfrac{nx-A}{n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v}{r}$.

（ $\begin{cases} A_i = A_{i-1}(1+r) - x \\ A_0 = A \end{cases}$, $A_n = A(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$;

4．已知差分方程 $\begin{cases} x_{n+1} + \alpha x_n = n+1 \\ x_0 = \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \end{cases}$ 的解满是条件： $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^n = 2$，求常数 $\alpha = ?$。

（ $x_n = \dfrac{n}{1+\alpha} + \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$ ）