

强化部分

第六课 微积分

第3章 向量代数与空间解析几何

(零) 知识与要点

● 向量代数是研究多元函数的工具

(1) 二种表示：向量及其表示

(2) 五类运算：定义、性质、几何意义

(3) 几个关系：用运算判断向量间的关系

● 空间解析几何是讨论多元函数的基础：

三类基本的空间图形的方程

(1) 空间平面与直线(一次方程的图形)：定义、方程与关系

(2) 二次曲面(二次方程的图形)：由方程认图

(3) 特殊空间曲面：旋转面、柱面、锥面方程

(4) 平面和空间区域的表示：不等式的几何意义

(一) 向量代数

(1) 向量表示：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义：有方向与大小的量；背景：力、位移、速度...} \\ \text{几何表示：}\vec{a}, \text{模}|\vec{a}|; \text{方向：}\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0, \vec{a}_0 - \text{单位向量}, |\vec{a}_0| = 1 \\ \text{投影表示：}\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}; a_i, i = 1, 2, 3 \text{ 分别为在 } x, y, z \text{ 轴上的投影} \\ \text{特殊向量} \left\{ \begin{array}{l} \text{单位向量：}\vec{a}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}, \text{方向余弦} \\ \text{矢径(位置向量)与点 } P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \text{有向线段：}\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a)\vec{i} + (y_b - y_a)\vec{j} + (z_b - z_a)\vec{k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(2) 向量运算：

- 加减: 向量; $\vec{a} \pm \vec{b}$; 计算 $\begin{cases} \text{平行四边形或三角形定义} \\ \text{对应分量相加减} \end{cases}$
- 数乘: 向量; $\lambda \vec{a}$; 计算 $\begin{cases} \text{同向}(\kappa > 0), \text{ 反向}(\kappa < 0) \text{ 放大} |\lambda| \text{ 倍,} \\ \lambda = 0 \text{ 零向量} \\ \text{对应分量乘} \lambda \text{ 倍} \end{cases}$
- 点积: 数量; $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 计算 $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) \\ \text{对应分量之积的和: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{l=1}^3 a_l b_l \end{cases}$
- 叉积: 向量; $\vec{a} \times \vec{b}$: $\begin{cases} \text{方向: 垂直} \vec{a} \text{ 又垂直 } \vec{b}, \text{ 右手法则 } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) \\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, ; \text{ 几何意义, 有分配律无交换律} \end{cases}$
- 混合积: 数量; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $\begin{cases} \text{几何意义: } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 三向量为棱的平行六面体代数体积} \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \end{cases}$

(3) 向量间的关系:

- 二向量平行(共线): $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda: \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$
- 二向量垂直: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$
- 三向量共面: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

(4) 典型例题:

(88) 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都是单位向量, 且有 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = ? \left(-\frac{3}{2}\right)$

已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是不共面的三个向量,

(1) 若有 $\vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, 求常数 α, β, γ 是什么?

(2) 求向量 \vec{c} 在 \vec{a}, \vec{b} 所共同平行的某平面 π 上的投影及投影向量;

3. (87) 设 $\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, 则三直线 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$ 交于一点

的充要条件是：(D)

- (A) 三向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性相关； (B) 三向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关；
(C) $\text{rank}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3) = \text{rank}(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$ ； (D) $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 相关，而 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 无关。

4. 求两条空间直线 $(\vec{l}_1, M_1), (\vec{l}_2, M_2)$ 间的距离。

(当 \vec{l}_1, \vec{l}_2 不平行时, $d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|}$; 当 \vec{l}_1, \vec{l}_2 平行时, $d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{l}_1|}{|\vec{l}_1|}$)

5. 求点 P 到平面 (\vec{n}, M_0) 的距离. ($d(P) = \frac{|\overrightarrow{M_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$)

6. 若三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足条件: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}, \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$, 试求它们之间的夹角及各自的模. ($\frac{\pi}{2}, \sqrt{|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|}$)

7. 若 $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$, $\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$. ($\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{c}$,
 $\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{b}$)

8. 若 \vec{a}, \vec{b} 是非零向量, 则 $\forall \lambda, |\vec{a} + \lambda \vec{b}| \geq |\vec{a}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

(二) 空间解析几何

(1) 平面与直线的方程:

● 平面: 法向量 $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, 方程: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, 即

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

● 直线: 方向 $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, 方向数 (l, m, n) ;

方程: $\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, 或 $(\vec{r} - \vec{r}_0) = t\vec{s}$,

$$\text{即 } \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \text{ 或 } \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

- 平面, 直线间的关系: 以 \vec{n}, \vec{s} 来判断其垂直、平行、相交的情况。

(2) 二次曲面:

- 椭球面 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- 单叶、双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$
- 椭圆、双曲抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$ ($z = xy$)

(3) 特殊曲面: 柱面, 锥面, 旋转面

- 柱面: 方程中缺变量: 如 $f(x, y) = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$;
- 锥面: 方程中变量次数相同, 如 $z^2 = a(x^2 + y^2)$, $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$
- 旋转面, 如, $yo\bar{z}$ 上曲线 $L: f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转而成之曲面方程 为:

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

(4) 空间区域的不等式表示

$$\text{椭球体: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1; \quad \text{半平面: } ax + by + cz + d \leq 0$$

(5) 典型例题

1. (90) 过点 $M(1, 2, -1)$, 与直线 $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -4 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ 垂直的平面方程是

$$(-x + 3y + 2z = 4).$$

2. (91) 已知 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$ 和 $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, 求过 L_1 平行 L_2 的平面方程. ($x - 3y + z = -2$)

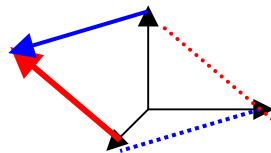
3. (87) 与 $L_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$, 两直线平行且过原点的平面

$$\text{方程 } (x - y + z = 0)$$

4. 平分由两平面: $\pi_1: x-2y+2z+21=0$ 和 $\pi_2: 7x+24z-50=0$, 所成两面角的平面方程是什么? ($4x-50y-22z+625=0$, $46x-50y+122z+375=0$)

5. (93) $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+6}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 之间夹角是

$$(\theta = \frac{\pi}{3})$$



6 (98) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 则两直线:

$$L_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2} \text{ 和 } L_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}. \quad (A)$$

(A) 交于一点; (B) 重合; (C) 平行不重合; (D) 异面。

7. 今有空间不同的点 $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1,2,3,4$, 试讨论该四点共面的充要条件是什么?

8. 过点 $A(1,0,-2)$ 作直线 L , 与平面 $\pi: 3x-y+2z+3=0$ 平行;

$$\text{与直线: } L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1} \text{ 相交, 求直线 } L \text{ 的方程. } (L: \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{50} = \frac{z+2}{31})$$