强化部分

第六课　微积分

第 5 章　重积分及其应用

（一）二重积分

(1) 概念：

- 定义与符号：积分和式的极限，

设 $f: D \subset R^2 \to R$

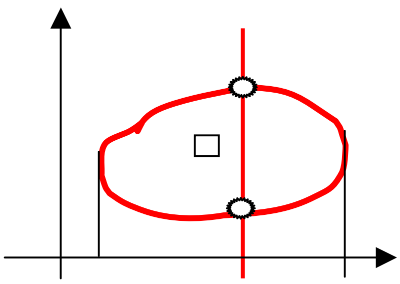
$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y)d\sigma$$

- 性质：被积函数有界性；可积性；对区域的可加性；

运算的单调性；估值与中值定理等。

(2) 计 算：

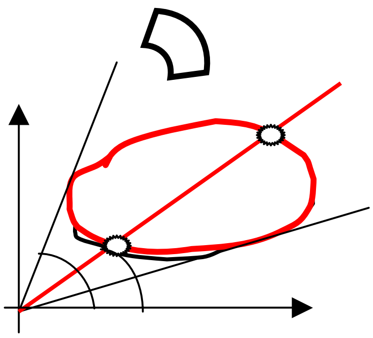
- 在直角坐标系下的计算



$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

- 在极坐标系下的计算

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$$



(3) 方法、技巧：

(a) 坐标系的选择；

(b) 积分次序的确定；

(c) 域和函数的对称性的利用；

(d) 对区域可加性的利用；

(e) 几何、物理意义的利用.

(4) 二重积分典型例题

1.将二重积分 $\iint_D f(x,y)dx$， $D: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax \le 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$，

化成累次积分。

2.（05_3,4）设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则（　A　）

(A) $I_3>I_2>I_1$　　(B) $I_1>I_2>I_3$　　(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

3（05_2）设 $D=\{x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（ D ）

(A) $ab\pi$　　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$　　(C) $(a+b)\pi$　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$

4.（01）交换累次积分 $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx$ 的积分次序。

（ $-\int_1^2 dx\int_{1-x}^{0}f(x,y)dy=\int_1^2 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy$ ）

5.交换累次积分 $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$ 的积分次序。

6.（04_2）设 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于［ D ］

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$，　　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$．

(C) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　．(D) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\,dr$

7.（99）计算 $I=\iint\limits_D ydxdy$，D 由 $x=-2, y=0, y=2, x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成．（$4-\dfrac{\pi}{2}$）

6.(92)计算 $I=\int_{\frac14}^{\frac12}dy\int_{\frac12}^{\sqrt y}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac12}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt y}e^{\frac{y}{x}}dx$　　（$\dfrac38 e-\dfrac{\sqrt e}{2}$）

7.(90)计算 $I=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$，　　（$\dfrac12(1-e^{-4})$）

8.（03_3,4）设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$ 而 D 表示全平面，则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=$ $\underline{\ a^2\ }$ ．

9.（03_3,4）计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$. 其中积分区域

D=$\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\pi\}$.

10（05_1）设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$。（ 3/8 ）

10.计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy$，$D:\begin{cases}|x|\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$.（$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{3}$）

11（05_2）计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1，0\le y\le 1\}$

（ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$ ）

13. $I=\iint\limits_D\sqrt{\left|1-x^2-y^2\right|}d\sigma$，$D:Max\{|x|,|y|\}\le 1$.（ $\dfrac{2}{3}(\pi+2-2\ln 2)$ ）

14．计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left|y-x^3\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\big|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$。（ $=\dfrac{16}{7}$.）

14.(88)计算 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，$D:x^2+y^2\le 16$.（$80\pi$）

15.(02_1) $I=\iint\limits_D e^{Max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中：$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。$(e-1)$

16.(02_4) 已知：$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$，$f\in C(D)$，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)dudv\quad，\text{求 } f(x,y)=?$$

（ $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{4}{3\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$。）

17，(00)计算 $I=\iint\limits_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$，

D由$y=-a+\sqrt{a^2-x^2},y=-x$ 围成.（ $a^2\left(\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\right)$）

18．(95)设 $f\in C[0,1]$，且$\int_0^1 f(x)dx=A$，求$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=?$（$\dfrac{1}{2}A^2$）

19．(01)计算二重积分：$I=\iint\limits_D y\left(1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right)dxdy$，其中是由三直线：$y=x,y=-1$及 $x=1$ 围成的平面 区域。（$-\dfrac{2}{3}$）

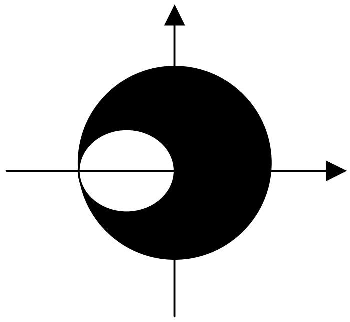
20.计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy$． （$\frac{9\pi}{16}$）

21. 计算 $I=\iint\limits_{D}(6x+8y)dxdy$，$D:(x-3)^2+(y-4)^2\le 25$．（$1250\pi$）

22.(02_3,4) 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$．

（原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)dt}{3x^2}=\frac{\pi}{6}$ ）.

23.（04_3,4）求 $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域（如图）．（ $\frac{16}{9}(3\pi-2)$ ）



24. 若 $f\in C[0,1]$，且是正的单调增函数，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}\ge\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad\frac{\int_0^a xf(x)dx}{\int_0^a f(x)dx}\ge\frac{a}{2},(a>0).$$

25.证明：$\pi\left(1-e^{-a^2}\right)\le\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\right)^2\le\pi\left(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\right)$。

26.（04_1）设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于[　B　]

(A)　$2f(2)$.　　(B)　$f(2)$.　　(C)　$-f(2)$.　　(D)　0.

解：交换积分次序，得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$，故应选(B).