

强化部分

第五课 微积分

第2章 导数概念与应用

2.1 导数与微分 概念与计算

例1 (1) 设 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, 且满足 $f(0) = 1$,

$$\Delta f(x) = \frac{y}{1+x} \Delta x + o(\Delta x), \text{ 则 } f(x) = \underline{1+x}.$$

(2) 设 $y = y(x)$ 在任意点 $x \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $\Delta y = \frac{y}{1+x^2} \Delta x + o(\Delta x)$,

若 $y(0) = \pi$, 则 $y'(1) = \underline{\frac{y(1)}{1+1} = \frac{1}{2} \pi e^{\frac{\pi}{4}}}$.

例2 设 $y = y(x)$ 在任意点 $x \in (0, +\infty)$ 满足 $\Delta y = (\frac{y}{x} + x \sin x) \Delta x + o(\Delta x)$, 若 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $y = -x \cos x$.

例3 设 $f(x)$ 是 $(-1, 1)$ 内的连续奇函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = a$,

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 (A)。

(A) a 。 (B) $-a$ 。 (C) 0 。 (D) 不存在。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = a$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 a 。

例4 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 则 $y = y(x)$ 在 $t=0$ 处的法线方程

为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

[解] 在 $t=0$ 处有 $x=3$, $y=1$, $y'|_{t=0} = \frac{e}{2}$, 在 $t=0$ 处的法线方程为

$$y = 1 - \frac{2}{e}(x-3).$$

例5 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $y''|_{t=1} = \underline{\frac{1}{2}}$,

[特别提示] 警惕错误: $\frac{d^2 y}{dx^2} \neq \frac{y''(t)}{x''(t)}$!

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad y''_x \neq \frac{y''(t)}{x''(t)}, \text{ 应是}$$

$$y_x'' = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)'_t t'_x = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot \frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

例 6 设 $x^2 + 3xy + y^2 = 4$, 则 $y'' =$ _____。

解: $y'' = -\frac{2(x+y)^2}{(x+2y)^3}.$

例 7 (1) 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, 则 $f^{(10)}(-1) =$ _____。

(2) 设 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$, 则 $f^{(101)}(0) =$ _____。

【解】 (1) $f^{(10)}(x) = \frac{4 \cdot (-1)^{11} \cdot 10!}{(x+3)^{11}}, f^{(10)}(-1) = -\frac{4 \cdot 10!}{2^{11}} = -\frac{10!}{2^9}.$

(2) **分析:** 利用泰勒级数展开是求高阶导数的一种有效方法。 $f^{(101)}(0) = -101!$ 。

Leibniz 高阶导数公式(假设 $f(x)$, $g(x)$ 均有 n 阶导数):

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

其中 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, 并规定 $f^{(0)}(x) = f(x)$,

$$g^{(0)}(x) = g(x).$$

例 8 设 $f(x) = (x+1)^2 \ln(1-x)$, 求 $f^{(n)}(-1)$.

【解】 $f^{(n)}(-1) = n(n-1) \frac{-(n-3)!}{2^{n-2}} = -\frac{n!}{2^{n-2}(n-2)}.$

例 9 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$ 确定, 则 ()。

(A) $y = y(x)$ 的存在区间为 $(0, +\infty)$, 且 $dy = -\frac{ydx}{2x \ln x}$ 。

(B) $y = y(x)$ 的存在区间为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, 且 $dy = -\frac{y}{2x \ln x}$ 。

(C) $y = y(x)$ 的存在区间为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, 且 $dy = -\frac{ydx}{2x \ln x}$ 。

(D) $y = y(x)$ 的存在区间为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 。 $dy = \frac{ydx}{2x \ln x}$ 。

【解】 将 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$ 改写为 $e^{y^2 \ln x} + y^2 \ln x + 4 = 0$

答案为 (C)。

例10 设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 若 $f'(x), f''(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 0$,

则 $g''(y) = (\quad)$ 。

(A) $-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$. (B) $-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$. (C) $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$. (D) $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

[解] $g''(y) = \frac{d[g'(y)]}{dy} = \frac{d[\frac{1}{f'(x)}]}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$ 。

例11 设函数 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 且 $f(a) = 3, f'(a) = 1, f''(a) = 2$,

(1) 求 $g''(3)$;

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x(f(x) - f(a))}{\ln x - \ln a}$ 。

[解] (1) $g''(3) = -f''(a)g'(3) = -2$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x(f(x) - f(a))}{\ln x - \ln a} = f'(a) \cdot a^2 = a^2$ 。

[特别提示] 上述(2)是用到了导数定义与等价无穷小量换替;

$$\ln(1 + \frac{x}{a} - 1) \sim \frac{x}{a} - 1。$$

例12 已知函数 $y = f(\frac{x+1}{x-1})$ 满足 $f'(x) = \arctan \sqrt{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[解] $\frac{dy}{dx}|_{x=2} = -2\sqrt{3}$ 。

例13 若 $f'(a) = k$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a+h)}{h} = (\quad)$ 。

(A) $-2k$ 。 (B) $2k$ 。 (C) 0 。 (D) 不存在。

[解]

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 $= -k - k = -2k$ 。

例14 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在

$x=0$ 处有 (D)。

(A) 极限不存在 (B) 极限存在, 但不连续 (C) 连续, 但不可导 (D) 可导

例15 研究下列分段函数在分段点处的可导性, 若可导, 求出导函数。

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x < 0 \\ \ln(1+x), & \text{当 } x \geq 0 \end{cases}$$

[解] $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{当 } x \geq 0 \end{cases}$, 因此 $f(x)$ 处处可导。

2.2 导数性质的简单运用

例 16 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2$,

已知极限等式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x-1)]$, 求常数 c 。

[解] $c = \frac{\ln 4}{2}$ 。

例 17 设 $y = y(x)$ 是二阶常微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的

特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 ()。

(A) 不存在。(B) 等于 1。(C) 等于 2。(D) 等于 3。

[解] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{1} = 2$ 。选(C)。

例 18 设常数 $a > 1$, $x_1 = a$, $x_n = a^{x_{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求使序列 $\{x_n\}$ 收敛的常数 a 的取值范围。

[解] 使 $f(x)$ 有零点的常数 a 的

取值范围应为 $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 。

再证明, 当 $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 时序列 $\{x_n\}$ 收敛, 用归纳法。

例 19 求一段二次曲线, 使之将 $y = e^x$ ($-\infty < x < 0$) 与 $y = \frac{1}{x}$ ($1 < x < +\infty$) 连

成一条曲线, 记之为 $y = f(x)$ 。若使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处一阶可导,

求 $f(x)$ 的表达式。

[解] $f(x) = -x^2 + x + 1$, ($0 \leq x \leq 1$)。

例 20 设任意常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在定义域内的零点个数为 (C)。

(A) 0。(B) 1。(C) 2。(D) 3。

【解】 答案为 (C)。

例 21 研究函数 $y = x^2 \ln x$,

- (1) 求该函数的极值, 并指明是极大值还是极小值;
 (2) 问该函数在定义域内有几个零点, 说明理由。

【解】(1) $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ 是极小值点, 且 $y_{\min} = -\frac{1}{2e}$ 。

(2) 函数 $y = x^2 \ln x$ 在定义域内有唯一零点 $x_1 = 1$ 。

例 22 当 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点。

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. (B)

水木艾迪考研辅导春季基础班例 4.11: 设方程 $x^3 - 3x + A = 0$, 讨论 A 取何值时

- (1) 方程有一个实根; (2) 方程有二个不同实根; (3) 方程有三个不同实根。

对本考题的解: 应选 (B)。

2.3 渐近线 极值点与拐点问题

- 三类渐近线 均需从两个单边极限单独考察。
- 极值点与拐点的广义结论: 若 $y = f(x)$ 在 x_0 某邻域内有 n 阶导数, 且

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则

- (1) 当 $n = 2k$ 时, x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 且 $f^{(2k)}(x_0) > 0$ 时,

x_0 为极小值点, 而 $f^{(2k)}(x_0) < 0$ 时, x_0 为极大值点 ($k = 1, 2, \cdots$)

- (2) 当 $n = 2k - 1$ 时, $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

- $y = f'(x)$ 的极值点曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

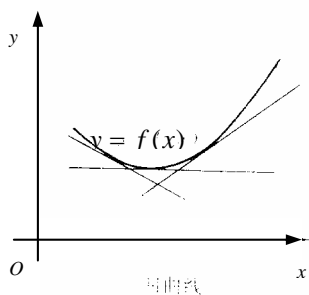


图 2.1 凹曲线

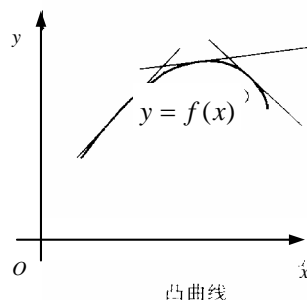


图 2.1 凸曲线

$f(x) = |x(1-x)|$, $x = 0$, $f(x)$, $y = f(x)$

例 23 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

选(C)

【思路】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一、二阶导数不存在, 应利用定义判断极值情况,

考查 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右两侧的二阶导数的符号, 以此判断拐点情况.

例 24 设 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则_____

(A) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值. (B) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【答案】(A)

例 25 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x)}{1-\cos x} = 1$, 则().

(A) $f''(0) \neq 0$, 但 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f''(0) = 0$, 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f''(0) = 0$, 且 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f''(0) \neq 0$ 且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

【解】 答案为 (C)。

例 26 已知 $f(x) = 3x^2 + ax^{-3}$ ($a > 0$), 若当 $x > 0$ 时, 总有 $f(x) \geq 45$ 成

立, 试求 a 的取值范围.

【解】 $a \geq 486$ 。

2.4 微分中值定理及其应用

例 27 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且满足 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 试

证 $\exists \xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

【证】 略

例 28 设 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 则函数 $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上

()。

(A) 有界函数。

(B) 无界函数。

(C) 单调增函数。

(D) 单调减函数。

[解] 应选 (D)。

关于拉格朗日微分中值定理特做如下说明：

设 $f(x)$ 满足在 $[a, b]$ 上连续；在 (a, b) 内可导。则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

拉格朗日微分中值定理是罗尔定理的进一步拓展，证明方法是通过引入辅助函数，构造罗尔定理的条件，从而得到结果。并且式可有如下不同表达式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) = f(a + \theta(b - a))(b - a), \quad (0 < \theta < 1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(\xi)h$$

上述微分中值定理的证明是先引入辅助函数，以创造应用罗尔定理的条件，导出结论。

由微分中值定理可直接得出 4 个推论如下：

推论 1：若 $\forall x \in (a, b)$ 恒有 $f'(x) = 0$ ，则 $f(x) = c$ ，其中 c 为常数。**推论 2：**若 $\forall x \in (a, b)$ 有 $f'(x) = g'(x)$ ，则在 (a, b) 内必有 $f(x) = g(x) + c$ 。当且仅当两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有一个公共点 $(x_0, y_0), x_0 \in (a, b)$ 时，有

$$f(x) = g(x)。$$

推论 3：若 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，则对 $[a, b]$ 上的任意两点 x_1, x_2 存在常数 $L > 0$ ，使得 $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ **推论 4：**若 $\forall x \in (a, b)$ ， $f'(x) \geq 0$ ，则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上单调(非严格)增加，且 $f'(x) > 0$ 时 $y = f(x)$ 严格单调增加。而当 $f'(x) \leq 0$ 时(或 $f'(x) < 0$)， $y = f(x)$ 单调减少(非严格)， $f'(x) < 0$ 时， $y = f(x)$ 严格单调减少。

拉格朗日中值定理的两个常用重要功能是：

1) 由 $y = f(x)$ 在某 x_1 处的取值或性态，可推知 x_1 近旁处 $f(x)$ 的取值或性态，像是一条“链锁”，对满足定理条件的 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上有某种全局控制作用。2) 拉格朗日中值定理在 $y = f(x)$ 的函数取值(或增量)与其导数取值之间搭起了一座桥梁。

了解以上结果，对处理等式与不等式问题有重要帮助。

微分学几个基本定理有着明显的几何意义，了解这些几何意义，将有助于我们建立必要的直观感性认识。

图 2.3 与图 2.4 可作为费尔马定理与罗尔定理的直观示意图。其中图 2.5 中表示 (a, b) 中有两个局部极值点。

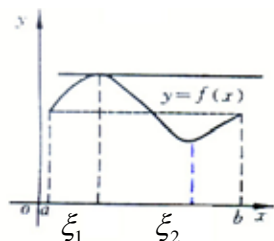


图 2.3

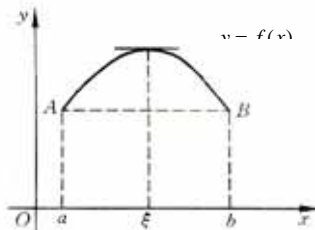


图 2.4

图 2.3 与图 2.4 可作为拉格朗日微分中值定理的直观示意图，其中图 2.6 表示存在两点 ξ_1 与 ξ_2 处切线与 AB 弦平行。

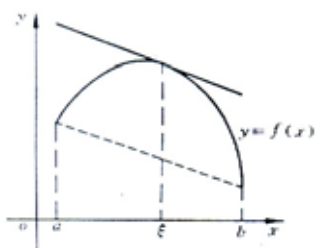


图 2.5

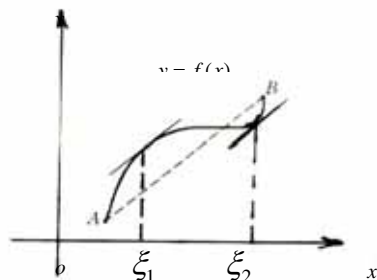


图 2.6

读者可以进一步思考， $f(x)$ 满足什么条件时，罗尔定理与拉格朗日

定理中的 ξ 点具有唯一性？又满足什么条件时有两个不同的 ξ_1 与 ξ_2 ？

例 29 设 $f(x) \in C[0,1]$ ，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$ ，证明

存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

[提示] 构造 $F(x) = x^2 f(x)$ ，容易验证 $F(x) \in C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 内可导，

且 $F(0) = F(1) = 0$ ，对 $F(x)$ 应用罗尔定理

例 30 (2004-1-15) 设 $e < a < b < e^2$ ，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ 。

[证法 1] 提示：设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$ ，

[证法 2] 提示：对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理

作为练习，请读者将拉格朗日中值定理的 4 个推论依次进行证明，这将有助于这一重要定理的理解与应用。

例 31. 证明: 对 $x > 0$ 成立不等式 $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 。

[特别提示] 如果不等式成立, 两边取对数, 则有 $\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

只要证明上述不等式, 对 $t > 0$, 记 $\frac{1}{x} = t$, 则只需证明不等式

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t。$$

例 32 若 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的二阶可导的奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内

$f'(x) > 0$, 且 $f''(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内必有 (B)。

(A) $f'(x) > 0$, 且存在常数 $k > 0$ 使得 $y = f(x)$ 与 $y = kx$ 有两个交点;

(B) $f'(x) > 0$, 且存在常数 $k > 0$ 使得 $y = f(x)$ 与 $y = kx$ 有唯一交点;

(C) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$; (D) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 。

例 33 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$,

使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ 。

[提示] 令 $F(x) = e^x f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Lagrange

定理条件, 于是

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b-a} = e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)], \text{ 其中 } \eta \in (a, b)$$

例 34 设 $0 < a < b < 1$, 证明不等式 $\arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{2ab}$ 。

[提示] (方法 1) 只须证明 $\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{2ab}$,

在 $[a, b]$ 上用 Lagrange 微分中值定理

(方法 2) 令 $f(x) = \arctan x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, 用 Cauchy 微分中值定理

例 35 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$ 。

提示: 只需证 $b \ln a > a \ln b$ 。

设 $f(x) = x \ln a - a \ln x$, 或 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 。

2.5 Taylor 公式应用 不等式与等式的分析证明

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$,

其中 a, b 为非负常数, $\forall c \in (0, 1)$, 证明 $f'(c) \leq 2a + \frac{b}{2}$ 。

注: 可令 $\phi(c) = (1-c)^2 + c^2$, 进一步可证明当 $0 < c < 1$ 时有

$$\frac{1}{2} \leq \phi(c) < 1.$$

例 37 设 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f''(x) > 0, f(0) = f(1) = 0$,

若 $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$, 证明 $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$.

[证]略

2.6 综合例题: 增减性与零点问题, 增减性与不等式问题

例 38 设 $x \in (0, 1)$, 证明 (1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;

$$(2) \quad \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

[提示] (1) 令 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, $f(0) = 0$, 只需证 $f(x) < 0$

$$(2) \quad \text{令 } g(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$$

例 39 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b)$, $f'_+(a) > 0$, 则下列命题错误的为 ().

(A) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$. (B) 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

(C) 存在 $x_1 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) > f(b)$.

(D) 存在唯一的 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

答案: D.

[提示] (单调性, 或微分中值定理)

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一阶可导, 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$,

$f'(a)f'(b) > 0$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $f''(\eta) = f'(\eta)$.

(3) 存在 $\zeta \in (a, b)$, 使得 $f''(\zeta) = f(\zeta)$.

[特别提示] 可进一步思考: 在同样条件下证明存在不同的两点

$x_1, x_2 \in (a, b)$, 使 $f(x_1) + f'(x_1) = 0$ 与 $f(x_2) + f'(x_2) = 0$.

思路: 取辅助函数 $F(x) = f(x)e^x$.

[注] 可进一步思考: 在同样条件下证明存在不同的两点 $x_1, x_2 \in (a, b)$,

使 $f(x_1) + f'(x_1) = 0$ 与 $f(x_2) + f'(x_2) = 0$ 。

提示: 取辅助函数 $F(x) = f(x)e^x$ 。

例 41 (2005-19) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 。

证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$ 。

[解析与点评]

(1) 在函数分析的证明题中, 对这类问题中的等式或不等式证明, 直接有效的方法是将欲证的等式或不等式进行移项, 取一个相应的辅助函数, 对等式问题: 以连续函数零点定理为主线进行分析; 对不等式: 用导数作为工具考察辅助函数的增减性, 同时考虑函数在所论区间上的初值与终值, (开区间则需考虑单测极限)。

令 $g(x) = f(x) + x - 1$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$g(0) = -1 < 0, g(1) = 1 > 0$, 由连续函数零点定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$g(\xi) = f(\xi) + \xi - 1 = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$ 。

(2) 此类问题的有效方法是由函数的零点 (有时是驻点), 将所论的区间分成子区间, 进一步的分析即可得到结果。这是水木艾迪考研辅导班教学中的常规基本方法训练。

例 42 已知以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导数,

且 $f(0) = 0$, 若 $F(x) = (\sin x - 1)^2 f(x)$, 证明 $\exists x_0 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$,

使得 $F''(x_0) = 0$ 。

[证] 略

例 43 设 $0 < a < b$, 证明不等式 $\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 。

[证] 略

例 44 设函数 $f(x)$ 连续, 在 x_0 可导, 且 $f(x_0) = x_0^2, f'(x_0) > 2x_0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 ()。

(A) 函数 $f(x) - x^2$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调增加。

(B) 函数 $f(x) - x^2$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调减少。

(C) 对任意的 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有 $f(x) > x^2$ 。

(D)对任意的 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 有 $f(x) > x^2$ 。

答案：C。

注意：函数在一点导数的正负号不能得出 $(x_0 - \delta, x_0)$ 或 $(x_0, x_0 + \delta)$

内的增减性结论，只能得出函数值的局部比较性质！