基础部分

第四课　概率统计

第 7 章　参数区间估计与假设检验

<u>本讲内容</u>

§7.1　参数的区间估计　§7.2　参数的假设检验

<u>本讲提要</u>(略．见大纲)

§7.1 区间估计

7.1.1　区间估计的概念

7.1.2 理论依据与方法

1．　一个正态总体参数的置信区间

1)　求μ的置信度为 1-α的置信区间．

找 $P(\mu\in(\bar{X}-\Delta,\ \bar{X}+\Delta)) = 1-\alpha$．

$$\boxed{(\underline{\mu},\ \bar{\mu})=(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$ （当σ^2已知）

$$\boxed{(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$ （当σ^2未知）

例 7.1.1 设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，由以往经验知标准差为 1.15kg．某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5（kg)。求生产线上包装机装箱糖果的期望重量的区间估计（取α =0.05）．

【区间估计: $\underline{\mu}=\bar{x}-z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=99.23,\ \bar{\mu}=\bar{x}+z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=100.73$．

μ的 95%的置信区间为 (99.23, 100.73) 】

2)　方差σ^2的置信度 1−α 置信区间

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\chi^2_{\alpha/2}(n),\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)}$$ (μ已知)

$$\boxed{\left((n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}(n),\ (n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)}$$ (当μ未知)

[**典型例题**]

例 7.1.2（续） （1）继续求上例置信度为 0.95 的置信区间．

（2）如果方差未知，总体μ的置信度为 0.95 的置信区间：

（3）如果μ=100（已知），求总体方差σ^2置信区间：

（4）如果μ未知，求总体方差σ^2的置信区间：

【(2) s =1.2122，$t_{0.025}(8)$ = 2.3060

$$(\bar{x}\pm t_{0.025}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})=(99.98\pm\times1.2122/3)\ .$$

μ的 95%的置信区间为（99.0482，100.9118）

(3) $\chi^2_{0.025}$ (9)=19.023，$\chi^2_{0.975}$ (9)=2.700

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\chi^2_{\alpha/2}(n),\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)$$

(0.6182, 4.3556)；

(4) $((n\quad 1)S^2\ /\ \chi^2_{\alpha/2}(n\quad 1),\ \ (n\quad 1)S^2\ /\ \chi^2_{1\quad\alpha/2}(n\quad 1))$.

算得 s^2=1.2122 ^{2} ，查表 $\chi^2_{0.025}(8)$=2.180， $\chi^2_{0.975}(8)$=17.535.

故 所求置信区间为（0.6709, 5.3924).

例 7.1.3*（00-3-11[8]） 假设 0.50，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单样本值. 已知 Y = ln X 服从正态分布 N (μ, 1).

(1) 求 X 的数学期望 EX（记 EX 为 b）;

(2) 求μ的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上面结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

【$e^{\mu+1/2}$；(　0.98, 0.98)；($e^{-0.48}, e^{1.48}$)】

例 7.1.4 设 X_1, X_2, …, X_n 是正态总体 N (μ, 0.9 ^{2})的大小为 n 的简单样本. 为使μ的 0.95 的双侧置信区间长度不超过 1.0，则样本容量 n 至少应该取多少？请说明道理.

附表　$z_{0.05}$=1.64 和 $z_{0.025}$=1.96

解 μ的 0.95 的双侧对称置信区间估计为

$$(\bar{X}-z_{0.025}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{0.025}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) \quad ,$$

其长度为 $2\times z_{0.025}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. 依题意，$n$ 应满足 $2\times z_{0.025}\times\frac{0.8}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\frac{0.8}{\sqrt{n}}=3.136\times\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1$，

故 $3.136^2\approx 9.8$， 因此样本容量 n 至少应取 10.

例 7.1.5（2005-3-13[4]） 设一批零件的长度服从正态分布 N (μ, σ^2)，其中μ 和σ^2均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20$ (cm)，样本标准差 s=1(cm)，则μ 的置信度 0.90 的置信区间是

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.

(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.

(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.　　【C】

2．两个正态总体参数差异性的置信区间

1）两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

(a) 设σ_1^2, σ_2^2均为已知

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}\right) \text{ 或 } Z:=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$\mu_1\quad\mu_2$的置信度为 1-α的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}\right)$$

(b) 设$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但$\sigma^2$为未知.

仿上 $Z := \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$ ，又

$$K_i^{\ 2} := \frac{(n_i-1)S_i^{\ 2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_i-1), \quad i=1,\ 2$$

由两个总体独立，故 K_1^2和K_2^2独立，由Cochran 定理， $K_1^{\ 2}+K_2^{\ 2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{(K_1^{\ 2}+K_2^{\ 2})/(n_1+n_2-2)}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

注意 $(K_1^{\ 2}+K_2^{\ 2})/(n_1+n_2-2) = S_w^{\ 2}/\sigma^2$，此处

$$S_w^{\ 2} = \frac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2},$$

$$= (n_1+n_2-2)^{-1}\left[\sum^{n_1}\left(X_i-\bar{X}\right)^2+\sum^{n_2}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2\right].$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2).$$

从而可得 μ_1,μ_2 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

(c) 设σ_1^2，σ_2^2均为未知，且不知它们是否相等（略）

2）两个总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信区间

$$\frac{S_1^{\ 2}/\sigma_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}/\sigma_2^{\ 2}} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$1-\alpha = P\left(F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right)$$

σ_1^2/σ_2^2的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n_2-1,\ n_1-1)\right)$$

查表时注意 $1/F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{\alpha/2}(n_2-1,\ n_1-1)$

f = 3.89/4.02 ， $F_{\alpha/2}(n_1\ \ 1,\ n_2\ \ 1)= F_{0.025}(7,\ 7) = 4.99$，

(3.89/4.02)/4.99=0.1939， (3.89/4.02)4.99 = 4.8286，

故σ_1^2/σ_2^2的置信度为 0.95 置信区间=（0.1939， 4.8286）】

［ **典型例题** ］

例 7.1.6　为比较Ⅰ,Ⅱ两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取Ⅰ型子弹 10 发，得到枪口速度平均值为 $\bar{x}_1$=500(m/s)，标准差s_1 = 1.10(m/s)，随机取Ⅱ型子弹 20 发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_2$=496(m/s)，标准差s_2 = 1.20(m/s)．设两总体都可认为近似地服从正态分布．且由生产过程可认为它们的方差相等．求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信度为 0.95 的置信区间．

【$t_{0.025}(28)$ = 2.0484．$s_w^2=(9\times1.10^2+19\times1.20^2)/28$，

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm s_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)$$

即（3.07，4.93)．】

例 7.1.7　为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂．为慎重起见，在实验工厂先进行试验．设采用原来的催化剂进行了n_1= 8 次试验，得到得率的平均值 $\bar{x}_1$= 91.73，样本方差s_1^2=3.89．又采用新的催化剂进行了n_2= 8 次试验，得到得率的均值 $\bar{x}_2$=93.75，样本方差s_2^2=4.02．假设两总体都可认为服从正态分布，且方差相等，试求两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信度为 0.95 的单侧置信下限．

解

$$\begin{aligned}&\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{0.05}(14)s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\\&=-2.02-1.7613\times3.96\times0.5=5.5074\end{aligned}$$

例 7.1.8　研究由机器A和机器B生产的钢管的内径．随机抽取机器A生产的管子 16 只，测得样本方差s_1^2=0.34（mm^2)；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差s_2^2=0.29(mm^2)．设两样本相互独立，且设由机器A、机器B生产的管子内径分别~ $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，这里μ_i，σ_i^2（i =1,2)均未知．试求方差比σ_1^2/σ_2^2的置信度为 0.90 的置信区间．

【$\left(\frac{0.34}{0.29}\times\frac{1}{2.59},\ \frac{0.34}{0.29}\times2.38\right)$，即（0.45，2.79)．】

§7.2 参数的假设检验

7.2.1 一个正态总体的参数检验

1．引例与参数假设检验问题

引例 1—问题的引入．

参数的假设检验与参数(点)估计比较．

引例 2 设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，由以往经验知标准差为 1.15kg．某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据如下（单位：kg)

99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5．

如果规定包装机每箱装糖重量为 100kg，问由抽测数据能否有 95%的把握判断生产线上包装机工作是否正常？（取α = 0.05）．

分析H_0：μ＝100（一般化，记为 μ_0）．$P\left(\left|\bar{X}-\mu_o\right|>c\right)=\alpha$；

解：H_0：μ＝100．

因σ^2已知，选取U统计量，其拒绝域为$(-\infty,-z_{\alpha/2})$和$(z_{\alpha/2},\infty)$．

查表得$z_{0.025}$ =1.96 ．由设已知n = 9，σ=1.15，及所给样本值，

$\bar{x}$=(99.3 +98.7 +100.5 +101.2 +98.3 +99.7 +99.5 +102.1 +100.5) /9 = 899.8 / 9 = 99.98 ，

故　$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=0.0522<1.96=z_{0.025}$

不在（统计量的）拒绝域内，故接受H_0.

1．一个正态总体参数的双侧检验

1)　H_0：$\mu=\mu_0$

(a) **设σ^2已知：**用u检验．　U: $=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，则

统计量拒绝域：　$(-\infty, -z_{\alpha/2})$ 和 $(z_{\alpha/2}, \infty)$，

H_0拒绝域：$\left(-\infty,\ \mu_o-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$和$\left(\mu_o+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty\right)$

(b) **设σ^2未知：**用t检验．　H_0下T: $=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ ．

统计量的拒绝域：$(-\infty,-t_{\alpha/2}(n-1))$ 和 $(t_{\alpha/2}(n-1), \infty)$，

H_0拒绝域：

$$\left(-\infty,\ \mu_o-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\text{和}\left(\mu_o+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \infty\right)$$

2)　H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$

(a) **设μ已知：**用 χ^2_n检验．$K_n^2:=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi^2(n)$，

则统计量 K_n^2的拒绝域：　$(0, \chi^2_{1\ \ \alpha/2}(n))$ 和 $(\chi^2_{\alpha/2}(n), \infty)$ ．

(b) **设μ未知：**用 χ^2_n检验．

统计量K^2的拒绝域：　$(0, \chi^2_{1\ \ \alpha/2}(n\ \ \ 1))$ 和 $(\chi^2_{\alpha/2}(n\ \ \ 1), \infty)$.

3．一个正态总体参数的单侧检验

4．假设检验的一般步骤及与区间估计问题的比较

7.2.2 两个正态总体的参数检验

[典型例题]

例 7.2.1 正常生产条件下某产品指标$X\sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$，其中$\sigma_0=0.23$．现在改变了生产工艺，产品指标变为$X'\sim N(\mu, \sigma^2)$．从新工艺产品中任意抽取 10 件，测得均方差为 0.33．　试在显著性水平$\alpha=0.05$下检验

1)　σ^2无明显变化；2)　σ^2明显增大．

解 1)　H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$ （$=0.23^2$）

选取统计量：因 μ 已知，选取K^2统计量；

计算统计量观测值：

$$k^2:=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{(10-1)\times0.33^2}{0.23^2}=18.527\ .$$

确定拒绝域：统计量拒绝域为$(0,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))$和$(\chi^2_{\alpha/2}(n-1),\infty)$ ．

查表计算：　$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$ 和 $\chi^2_{0.975}(9)=2.700$.

统计推断：k^2=18.527，不在拒绝域(0，2.700) 和

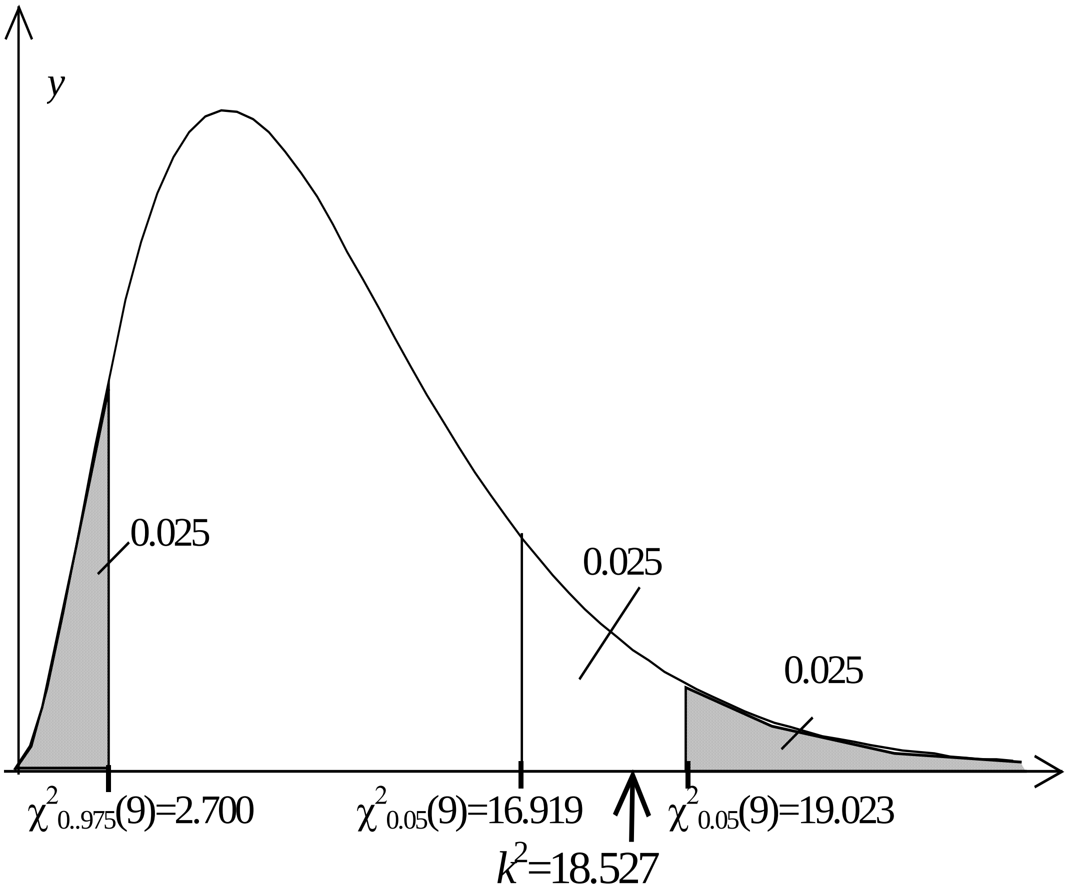

图 双侧与单侧的α值的影响比较

(19.023，∞)内，故不拒绝H_0.

注意：如取 α= 0.10 ，则$\chi^2_{\alpha/2}(n\ \ 1)=\chi^2_{0.05}(9)$ =16.919 < 18.527. 从而拒绝H_0。
可见显著性水平的选取十分重要，它可能带来截然不同的统计推断！

2)　　H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$ （＝ 0.23^2）

H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

选右拒绝域 ($\chi^2_{\alpha}(n-1)$, +∞). 查表 $\chi^2_{0.05}(\quad)$= 16.919，
计算统计量的观测值

$$k^2 := \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\times 0.33^2}{0.23^2} = 18.527 \quad .$$

统计推断：因为k^2 = 18.527 > 16.919 = $\chi^2_{0.05}(\quad)$. 故拒绝H_0即认为σ^2明显增大.

例 7.2.2　在固定的一只平炉上进行一项试验，以确定改进操作方法是否能提高钢的得率（＝100 可用钢材/投入炉中的金属总量×%）. 除操作方法外，每炼一炉钢的其他条件不变. 标准操作方法与改进方法，交替进行，各炼了 10 炉钢，得率记录如下：

炉次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
标 准	78	72	76	74	77	78	76	75	76	77

(1)	.1	.4	.2	.3	.4	.4	.0	.5	.7	.3
改进	79	81	77	79	80	79	79	77	80	82
(2)	.1	.0	.3	.1	.0	.1	.1	.3	.2	.1

设两个样本独立，都是正态分布，且方差相等．问改进的方法是否提高得率？取显著性水平 α = 0.05.

【 H_0：$\mu_1 = \mu_0$；H_1：$\mu_1 < \mu_0$． 但方差未知，先作检验 H^*_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

作F检验 $f= s_1^2/s_2^2$=3.325 / 2.225 ≈1.4944．查表：$F_{0.025}(9,9)$= 4.03， $F_{0.975}(9,9)$ = $1/F_{0.025}(9,9)$= 1/4.03 ≈ 0.2481． 知不在拒绝域内，因此可认为两总体的方差相等．

在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 条件下作检验：H_0：$\mu_1 = \mu_0$；H_1：$\mu_1 < \mu_0$．

选取左拒绝域(∞, $t_\alpha(n_1+n_2\ \ 2)$)．

计算统计量的观测值： $s_w{}^2=\dfrac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2}=\dfrac{3.325+2.225}{2}=2.775$.

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{76.23-79.43}{\sqrt{2.775}\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}}=-4.295\ .$$

查表：$t_\alpha(n_1+n_2-2) = t_\alpha(18)$ =1.7341.

统计推断：因 t = $t_{0.05}(18)$，故拒绝 H_0 而接受 H_1，认为新方法比标准方法好，能提高钢的得率．】

例 7.2.3 需要比较两种汽车用的燃料辛烷值，得数据：

燃料A	
燃料B	

燃料的辛烷值越高，燃料质量越好，因燃料B较燃料A价格便宜，因此，如果两者辛烷值相同时，则使用燃料 B．但若含量的均值差 $|\mu_A-\mu_B|\ge 5$ 则使用燃料 A．设两总体的分布均可认为是正态的，而两个样本相互独立.问应采用哪种燃料(取 α =0.01)?

【接受 H_0 ：$|\mu_A-\mu_B|\ge 5$ 】

例 7.2.4 测得两批电子器件的样品的电阻（欧）为

A：x	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
B：y	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设这两批器材电阻值总体分别~N (μ_1, σ_1^2), N (μ_2, σ_2^2)，且两样本独立．

1）检验假设（α = 0.05） $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ ．

2）在 1)的基础上检验（α = 0.05） $H_0{}':\mu_1=\mu_2$，$H_1{}':\mu_1\ne\mu_2$.

附表 $z_{0.05}=1.64$, $z_{0.025}=1.96$

$\chi^2_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$	$\chi^2_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$	$t_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$
α=0.95	2.733	3.325	α=0.05	15.507	16.919	α=0.05	1.8595	1.8331
α=0.975	2.180	2.70	α=0.025	17.535	19.023	α=0.025	2.3060	2.2622

【 1） f=1.108，接受假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$， 2）｜$t$|=1.3929,接受 $H_0{}'$： $\mu_1=\mu_2$ 】

7.2.3 两类错误

例 7.2.5 设总体X服从均匀分布 $U[0,\theta]$，X_1，X_2，…,X_n是X的一组样本，要检验假设 $H_0:\theta=c,\ H_1:\theta>c$，其中 $c>0$ 为常数。设统计量 $M=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$，原假设的拒绝域为 $\{M>m_\alpha\}$，如果 $\alpha(0<\alpha<1)$ 是犯第一类错误的概率，试证：拒绝域的临界值为 $m_\alpha=c(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$。

【证：犯第一类错误的概率 $\alpha=P(M>m_\alpha)$，而 $M=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$ 的分布函数为

$$F_{(n)}(x)=(F(x;\theta))^n=\begin{cases}1 & x>\theta\\ (\dfrac{x}{\theta})^n & x\in[0,\theta]\\ 0 & x<0\end{cases}$$

由m_α 的定义可知 $0\le m_\alpha\le\theta$，因此

$$\alpha=P(M>m_\alpha)=1-P(M\le m_\alpha)=1-(\frac{m_\alpha}{\theta})^n,$$

故H_0成立时，$\alpha=1-(\dfrac{m_\alpha}{\theta})^n$，即 $m_\alpha=c(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$。】

第一类错误的概率 $P\left(\left|U\right|>z_{\alpha/2}\,|\,H_0\ \text{true}\right)=\alpha$，它就是拒绝$H_0$的概率，也就是我们作为小概率事件的界限的显著性水平α，α=P（拒绝H_0 ｜ H_0为真)。

设总体的真实分布是X ~ N(μ_1, σ^2)，$\mu_1\neq\mu_0$，因此成立 $\overline{X}\sim N(\mu_1,\sigma^2/n)$。

故第二类错误的概率 β,

$$\beta=P\left(|U|<Z_{\alpha/2}\ \ \left|\mu=\mu_1\neq\mu_0\right.\right)$$

$$=P\left(\mu_o-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\overline{X}<\mu_o+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \left|\mu=\mu_1\neq\mu\right.\right)$$

$$=\int_{\mu_0-c}^{\mu_0+c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2/n}\right\}dx$$

$$\beta = P\left(|U| < z_{\alpha/2} \ \middle|\ \mu = \mu_1 \neq \mu_0\right)$$
$$= P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_1 + \mu_1 - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right)$$
$$= P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right)$$
$$= \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

例 7.2.6 设某种元件的电气性能指标为正态分布$N(\mu, 3.6^2)$，从总体抽取容量为 36 的样本对未知参数μ作下列检验　H_0: μ =68，H_0: μ≠68，μ =70. 如果接受域为(67，69)试求假设检验两类错误的概率.

解 方差已知，故取 u-检验，$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

由题设知拒绝域(-∞,67) 和 (69，∞). 故出现第一类错误的概率

$$\alpha = P(|U| > z_{\alpha/2} \mid H_0\text{真})$$
$$= P(\overline{X} < 67 \mid H_0\text{真}) + P(\overline{X} > 69 \mid H_0\text{真})$$
$$= P(U < -1.67) + P(U > 1.67) = \Phi(-1.67) + 1 - \Phi(1.67)$$
$$\approx 2[1 - \Phi(1.67)] \approx 2(1 - 0.9525) = 0.095$$
$$= \left|\frac{99.98 - 100}{1.15/\sqrt{9}}\right| = 0.0522$$

出现第二类错误的概率

$$\beta = P(\text{接受 } H_0 \mid H_1\text{真}) = P(67 < \overline{X} < 69 \mid \mu = 70)$$
$$= P\left(\frac{67 - 70}{3.6/\sqrt{36}} < \frac{\overline{X} - 68}{3.6/\sqrt{36}} < \frac{69 - 70}{3.6/\sqrt{36}}\right)$$
$$= P\left(-5 < \frac{\overline{X} - 68}{3.6/\sqrt{36}} < -1.67\right)$$
$$= \Phi(-1.67) \approx 0.0475$$