

强化部分

第五课 微积分

第 1 章 极限与连续函数 预备知识 函数概念 数列极限

1.1 绝对值与基本不等式

绝对值 $y = |x|$ 是一种函数表达形式, 对任意实数 x 有

$$y = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \text{ 或记为 } y = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

对任意实数 x 与 $a \geq 0$ 有: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, 并且, 若 $a = 0$,

则必有 $x = 0$ 。而 $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 。

基本不等式

(1) 绝对值不等式: $-|x| \leq x \leq |x|$, $0 \leq x + |x| \leq 2|x|$

(2) 三角不等式: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{且} \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

(3) 平均值不等式: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 有 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy$

若 $x \geq 0, y \geq 0$, 则有 $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}$

(4) 对任意实数 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ 有 $\sin x \leq x \leq \tan x$

对以上不等式在应用中都应广义化, 例如

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \text{ 有 } |\sin(x + y) - \cos(x - y)| \leq |\sin(x + y)| + |\cos(x - y)|。$$

因为 $\sin(x + y)$ 与 $\cos(x - y)$ 均为实数, 由不等式 (3) 即有本题不等式。

(5) $\forall m, n, k > 0$, 当 $m < n$ 时有 $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$

邻域与区间 数轴上的点 x_0 的 δ 邻域是指点集

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}。$$

邻域内的点是由不等式 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 界定的, 包括 x_0 点。

去心邻域 数轴上的点 x_0 的 δ 去心邻域是指点集

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}。$$

去心邻域与邻域的区别仅在于不包括 x_0 点。

关于反函数 设函数 $y = f(x)$ 定义域为 X , 值域为 Y , 若 $\forall y \in Y$ 存在一个函数 $g(y)$ 使得有唯一的点 $x \in X$ 满足 $x = g(y)$, 则称 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数。

注：(1) 在某些场合，常把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$ 或 $g(x)$, 此时已重新把 x 视为自变量。在反函数记号的使用中，一定要分清是否需要换变量记号。

(2) 互为反函数的两个函数曲线关于直线 $y = x$ 对称。

(3) $y = f(x)$ 与其反函数 $g(x)$ 的定义域与值域具有对偶性。即 $y = f(x)$ 的定义域必为 $g(x)$ 的值域，而 $y = f(x)$ 的值域必为 $g(x)$ 的定义域。

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，且有 $f(g(x)) = x$ 与 $g(f(x)) = x$ 。

例 1 设函数 $y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, 则 $y = y(x)$ ()。

(A) 为偶函数，值域为 $y \in (-1, 1)$ 。 (B) 为奇函数，值域为 $y \in (-\infty, 0)$ 。

(C) 为奇函数，值域为 $y \in (-1, 1)$ 。 (D) 为奇函数，值域为 $y \in (0, +\infty)$ 。

【解】答案为(C)。

1.2 函数的初等性质

掌握函数的初等性质对微积分的学习至关重要。函数的初等性质包括以下几个方面。

(1) 增减性 (单调性)

设函数 $y = f(x)$ 定义域为 X , 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时有

$f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在 X 上为增函数 (非严格) , 而当 $x_1 < x_2$ 时有

$f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在 X 上为严格单调增函数。

类似可给出单调减函数的定义。

判断增减性的初等常用方法是；减法，除法。解析方法：用导数研究函数的增减性将是一类重要方法。

例 2 设 $I_1 = \int_0^{\pi} \sin(\sin x) dx$, $I_2 = \int_0^{\pi} \cos(\sin x) dx$, 则 (A)。

(A) $I_1 < 1 < I_2$ 。 (B) $I_1 > 1 > I_2$ 。 (C) $I_1 = I_2$ 。 (D) $I_1 > I_2 > 1$ 。

(2) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 在对称的定义域内满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数。而

当函数 $y = f(x)$ 在对称的定义域内满足 $f(-x) = -f(x)$ 时, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数。

广义奇偶性 (偶对称与奇对称)

若 $y = f(x)$ 的图形有对称轴 $x = a$, 则应有 $f(a-x) = f(a+x)$ (将视为参数), 令 $g(x) = f(a-x)$, 则有 $g(-x) = f(a+x) = f(a-x) = g(x)$, 因此 $g(x)$ 为偶函数。

若 $y = f(x)$ 的图形有对称中心 $(a, 0)$, 则应有 $f(a-x) = -f(a+x)$ (将视为参数), 令 $g(x) = f(a-x)$, 则有 $g(-x) = f(a+x) = -f(a-x) = -g(x)$,

因此 $g(x)$ 为奇函数。以上这种性质称为函数 $f(x)$ 的广义奇偶性或对称性。

(3) 周期性

若存在一个正数 T , 使函数 $y = f(x)$ 在定义域内满足 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数。这里的正数 T 对一个周期函数来说不是唯一的 (事实上有无穷多), 一般情况下, 称其中最小正数称为周期。

(4) 有界性

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义, 若存在一个正数 M 使得对任意 $x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 X 上有界。

几类对函数的有界性, 后面还将给出其他情况下的一些描述。这类描述是重要的。

1.3 常见函数

$$(1) \text{ 设符号函数 } f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = e^{2x-1} - e^{-x},$$

则 $f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 由 $g(x) = e^{2x-1} - e^{-x} = 0$ 得到唯一零点 $x = \frac{1}{3}$ 。由初等函数 $y = e^x$ 的性质可以得到

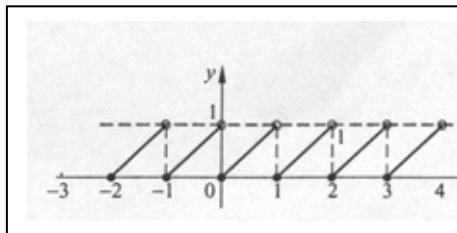
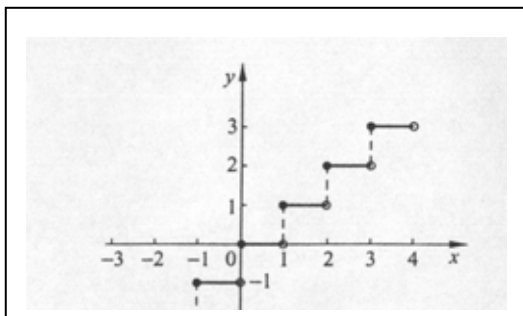
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

【特别提示】 本题考察函数概念, 包括初等函数性质、常见非初等函数及其复合运算。其他常见非初等函数还有:

(2) **阶越函数** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 是一个常用非初等函数。

(3) **取整函数** $f(x) = [x] = \begin{cases} n, & n \leq x < n+1 \\ n+1, & n+1 \leq x < n+2 \end{cases}$, 也是一个常用非初等函数。示意图

如下



(4) $f(x) = x - [x]$ 又是一个常用非初等函数, 是**取整函数的复合函数**, 且为一个周期函数, 周期为 1。例如, 在 $[0, 2)$ 内有

$$f(x) = x - [x] = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}, \text{如上右图所示。}$$

(5) $f(x) = \max_{|x| \leq 2} \{1, x^2, x^3\}$ 或 $f(x) = \min_{|x| \leq 2} \{1, x^2, x^3\}$ 也是一类常见函数,

例 3 积分 $\int_{-2}^2 \max\{1, x^2, x^3\} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{【解】} \int_{-2}^2 \max\{1, x^2, x^3\} dx = \int_{-2}^{-1} x^2 dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{97}{12}$$

【特别提示】 对各类基本初等函数性质及其图形, 应做到熟练掌握, 对函数的初等性质, 以及复合函数与反函数概念应准确理解。函数的初等性质包括有界性、增减性、奇偶性与周期性。此外, 还应了解以上常见非初等函数的类型, 关键是对函数概念的理解要做到十分准确。

1.4 极限概念 性质及运算法则

极限的保序性 (保号性)

若 $\{x_n\}$ 有极限, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$, 则当 n 足够大时必然有 $x_n > 0$,

换言之: 一定 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$ 。

又若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A < 0$, 则当 n 足够大时必然有 $x_n < 0$, 换言之: 一定 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$

时有 $x_n < 0$ 。

【证】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有

$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, 特别取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, 则

$\frac{A}{2} < x_n < \frac{3A}{2}$, 于是有 $x_n > \frac{A}{2} > 0$ 。

推论 若 $\{x_n\}$ 有极限, 且 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \geq 0$ 。

证 : 用反证法, 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A < 0$, 则由保序性可知 :

一定 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $x_n < 0$ 。

与题设条件矛盾, 于是只能是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \geq 0$ 。

可进一步推论下述应用结果 : (这一结论常称之为极限的比较性质。)

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ 都存在, 且 $A > B$, 则 $\exists N > 0$, 使当 $n > N$

时必有 $x_n > y_n$ 。(证明方法: 只要令 $a_n = x_n - y_n$, 即可完成证明。)

唯一性 若 $\{x_n\}$ 有极限, 则极限唯一, 即若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$, 则只能是 $A = B$ 。

有界性 若 $\{x_n\}$ 有极限, 则 $\{x_n\}$ 有界 ($n \rightarrow \infty$)。这种有界性可描述为 : 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

存在, 则一定 $\exists M > 0$ 及 某个 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $|x_n| < M$ 。

证 : 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时有

$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, 特别取 $\varepsilon = 1 > 0$, 则

$A - 1 < x_n < A + 1$, 取 $M = \max\{|A - 1|, |A + 1|\} > 0$,

则当 $n > N$ 时有 $|x_n| < M$ 。

对于函数的极限, 有类似的相应性质, 但应注意: 在函数极限问题里, 自变量的趋向应包括以下 6 种情况 :

$x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ 。

例 4 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使____ (正确)。

(A) 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$; (B) $f(x_0) \neq 0$;

(C) 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$;

(D) $f(x)$ 在 x_0 处没定义。

【解】 正确答案应选 (C)。

例 5 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 的有界区间为 ()。

- (A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.

选(A)

【思路】 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则存在 $\delta > 0$, 使

得函数 $f(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 与 $(b - \delta, b)$ 内有界, 于是在 (a, b) 内有界。

【特别提示】 一般地, 如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界;

如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则函数 $f(x)$ 在

开区间 (a, b) 内有界。考点: 极限的性质, 极限运算, 连续函数概念。

1.5 极限运算法则与复合极限定理

例 6 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = ()$ 。 应选(D)。

- (A) $\frac{1}{2}$ 。 (B) $-\frac{1}{2}$ 。 (C) $+\infty$ 。 (D) 不存在。

例 7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{\sqrt[3]{2x^3 + 1}} = ()$ 。

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ 。 (B) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ 。 (C) $\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ 。 (D) 不存在。

[解] 应选(D)。

例 8 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \pi \sqrt{4n^2 + 1} \right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[解] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{4n^2 + 1}) = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ 。

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + 2 \frac{\sin x}{|x|} \right)$ 。 答案: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{4(1 + e^{\frac{4}{x}})} + \frac{\sin x}{2|x|} \right) = 2$ 。

例 10 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(e^{\frac{1}{x}} + 1)(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{|x|}}) = ()$ 。 应选(D)。

- (A) $\frac{\ln 2}{2}$; (B) $-\frac{\ln 2}{2}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) 不存在

例 11 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x+1}} \right)$ 。 答案: $\ln 3$

例 12 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \underline{1}$ 。

1.6 极限的存在准则

例 13 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 且存在 N , 使当 $n > N$ 时有 $x_n < a_n < y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ()。

- (A) 存在且等于零. (B) 存在但不一定等于零.
(C) 一定存在. (D) 不一定存在.

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ 的条件不足以保证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 的存在, 选 (D)。

[注] 事实上, 夹逼准则要求除了 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 的存在的条件以外, 还有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 。

例 14 设 $1 < a_1 < 5$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n(5 - a_n)}$, $(n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求此极限值。

【证】 采用归纳法, 先考虑 $\{a_n\}$ 的有界性, 再考虑单调性。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \frac{5}{2}.$$

例 15 设 $0 < a \leq 1$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} =$ _____。

【解】 运用夹逼准则得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + a^x + a^{2x})^{\frac{1}{x}} = 1$ 。

例 16 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + k}$ 。

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} = \frac{1}{4}$ 。

例 17 设 $a_1 = a > 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$, $(n = 1, 2, \dots)$, 证明

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求出此极限; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛。

[证] (1) 思路是运用单调有界准则。给出的递推表达式含有两项和, 启示我们可试验平均值不等式。

(2) 略

1.7 三个标准极限的灵活运用

两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 在应用中应视为两个标准极限, 以将 "1[∞]" 凑

成两个重要极限。

(2) 利用复合极限定理, 以及极限的等价描述: $\lim_{n \rightarrow (\cdot)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 可

将两个标准极限视为如下可广义形式, 这会使得极限计算变的快捷方便又准确:

标准极限 1： $\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

标准极限 2： $\lim_{x \rightarrow (\cdot)} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$

其中 $\alpha(x)$ 为某种趋向 $x \rightarrow (\cdot)$ 时的无穷小量。

标准极限 3： $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ 或

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha(\Delta x)) - f(x_0)}{\alpha(\Delta x)} \quad \text{或} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha(h)) - f(x_0)}{\alpha(h)}$$

其中 $\alpha(\Delta x)$ 或 $\alpha(h)$ 是 $\Delta x \rightarrow 0$ (或 $h \rightarrow 0$) 时的高阶无穷小量。

其中 $\alpha(\Delta x)$ 或 $\alpha(h)$ 是 $\Delta x \rightarrow 0$ (或 $h \rightarrow 0$) 时的高阶无穷小量。

单侧导数定义 如果单侧极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)$$

存

在，

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

则

称此极值为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$ ；如果单侧极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$$

由极限存在的充要条件可知， $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导

数都存在，且相等 $f'_-(b) = f'_+(a)$ 。

例 18 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [n((1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e})] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} [n((1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2n}} - \sqrt{e})] = -\frac{1}{4}\sqrt{e}$ 。

例 19 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sin \frac{\pi}{2} x)^{\frac{2}{1-x}}$ 。

【特别提示】本题极限状态属于“ 1^∞ ”型，应用标准极限。

【解】（方法 1）凑成标准极限形式

$$(\text{方法 2}) \text{ 令 } y = (\sin \frac{\pi}{2} x)^{\frac{2}{1-x}}, \text{ 则 } \ln y = \frac{2}{1-x} \ln(\sin \frac{\pi}{2} x)。$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 1} (\sin \frac{\pi}{2} x)^{\frac{2}{1-x}} = 1。$$

$$\text{例 20 求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}。$$

【解】 原极限 = e^{-1} 。

$$\text{例 21 设 } a > 0, b > 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{5}{x}} = \underline{(ab)^{5/2}}。$$

$$\text{例 22 若 } f'(a) = k \text{ 存在, 则 } \lim_{h \rightarrow +\infty} h \left(f(a - \frac{1}{h}) - f(a) \right) = \underline{\quad\quad\quad}。$$

【解】 原式

$$\begin{aligned} &= -\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f(a - \frac{1}{h}) - f(a)}{-\frac{1}{h}} = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \\ &= -f'_-(a) = -f'(a) = -k \end{aligned}$$

例 23 设 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内可导, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 已知 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2} f(x) \right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = \underline{\quad\quad\quad}。$$

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2} f(x) \right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = e^{-1}。$$

$$\text{例 24 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[3 \sin \ln(1 + \frac{3}{x}) - \sin \ln(1 + \frac{1}{x}) \right] = \underline{\quad\quad\quad}。$$

【解】 令 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$\text{原极限} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \ln(1+3t) - \sin \ln(1+t)}{t} = [\sin \ln(1+3t) - \sin \ln(1+t)]' \big|_{t=0} = 2。$$

例 25 若 $f(x) = 2nx(1-x)^n$, 记 $M_n = \max_{x \in [0,1]} \{f(x)\}$; 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \underline{\quad\quad\quad}。$

$$\text{【解】 } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^{-(x+1)} \right]^{-\frac{x}{x+1}} = 2e^{-1}。$$

例 26 已知 $f(0) = 0$, $f'(0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan(5x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$[\text{解}] \text{原式} = f'(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan(5x^2)} = f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{5x^2} = \frac{f'(0)}{10} = \frac{A}{10}。$$

【特别提示】 将幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 写成 $y = e^{g(x)\ln(f(x))}$ 是常用的有效方法。

1.8 无穷小量比阶问题

几组常用等价无穷小量 ($x \rightarrow 0$) 有:

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \arctan x \sim \arcsin x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0)$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(x+1)^\lambda - 1 \sim \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3$$

$$\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$$

以上等价关系可在广义下应用, 即: 等价关系中的 x 在应用中常换为满足 $\lim_{x \rightarrow (\cdot)} \alpha(x) = 0$ 的

某个 $\alpha(x)$, 其中 $x \rightarrow (\bullet)$ 为某种趋向。例如:

$$1 - \cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) \sim \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2 \sim \frac{1}{2x^2} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

其中 $\alpha(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$, 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0$

注意防止无穷小量的非法替换

在极限运算中, 可以用等价无穷小量进行替换, 但必须注意, 替换只能在因子位置上进行, 因等价无穷小量是用因子乘积 $\alpha(x) \cdot \frac{1}{\beta(x)}$ 的极限定义的。非法替换是常见错误。

例 27 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$[\text{解}] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}。$$

【特别提示】 注意如下错误做法, 错误原因在于无穷小量的非法替换:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + xf(x)}{x^2} = 0 \text{ 因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0。$$

例 28 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}。$

【解】原极限

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2}。$$

例 29 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$

【解】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-1} x^2 \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} e^{-1}。$

例 30 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}。$

【解】 $a = -4。$

1.9 连续函数的性质

例 31 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a}, & x < 0 \\ \frac{\sin x}{\ln(1+3x)}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则()。

(A) $a=1, b=-\frac{4}{3}, f(0)=\frac{1}{3}。$

(B) $a=-1, b=\frac{4}{3}, f(0)=\frac{1}{3}。$

(C) $a=1, b=\frac{4}{3}, f(0)=\frac{1}{3}。$

(D) $a=-1, b=-\frac{4}{3}, f(0)=\frac{1}{3}。$

【解】 (B)

例 32 证明: 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < f(x) < b$, 则存在 $x_0 \in (a, b)$,

使得 $f(x_0) = x_0$ 。(该命题称为连续函数的不动点定理)

【证】该命题要证方程 $x = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有实根。引入辅助函数

$$F(x) = x - f(x)$$

则只需证明函数 $F(x) = x - f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点。

例 33 设 $a < b < c$, 证明: $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$ 仅在区间 (a, c) 内恰有两个零点。

【证】略

例 34 设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且满足 $f(0) = f(2a)$, 试证: 明存在 $x_0 \in [0, a]$,

使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$ 。

【证】 考虑辅助函数 $F(x) = f(x) - f(x+a)$ 在 $[0, a]$ 上连续

例 35 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 答案 [D]。

【分析】 考查极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 是否存在, 如存在, 是否等于 $g(0)$, 令 $u = \frac{1}{x}$,

可将极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 转化为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

例 36 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0 \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【解】 $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{1}{2}x} = -2$ 。

例 37. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足 ()。

(A) $a < 0, b < 0$ 。 (B) $a > 0, b > 0$

(C) $a \leq 0, b > 0$ 。 (D) $a \geq 0, b < 0$

【解】 选 (D)。

例 38 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ 的表达式, 并指明间断点的类型。

【解】 $x = \pm 1$ 为第一类间断点 (跳跃), 并且得到 $f(x) = \begin{cases} -1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$ 。

例 39 指出函数 $f(x) = \frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及其类型.

$x=1$ 与 $x=0$ 为第一类间断点; $x=-1$ 为第二类间断点。

1.10 用 Taylor 公式处理极限

例 40 设当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量, 则

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$. (B) $a = 1, b = 1$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$. (D) $a = -1, b = 1$.

[解] 答案为[A].

注: 可用洛必达法则。

例 41 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^{1/x}} - e^{1/3}}{x}$.

[解] 原式 $= -\frac{1}{6}e^{\frac{1}{3}}$.

1.11 几个综合例题

例 42 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $f(f(x)) = x$, 则存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

[证] 略

例 43 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 存在, 若 $y = f(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 内可取到正值, 证明函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上必有正的最大值。

【证】 略

例 44 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 在 $x=1$ 处连续, 并且满足

$f(x) = f(\sqrt{x})$, 试证 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒为常数。

【证】 由归纳法可有 $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$, 令 $n \rightarrow \infty$, $\forall x \in (0, +\infty)$, 由复合极

限定理得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1) = C$

例 45 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调减非负连续函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx, (n=1, 2, \cdots)$$

证明 $\{a_n\}$ 为收敛数列。

[证] 略