强化部分

第五课 微积分

第 4 章 定积分概念与性质

4.1 定积分计算 区间变换技巧

4.2 积分的保序性 估值定理与比较性质 中值定理等性质的简单运用

4.3 变限积分与含参积分

4.4 由定积分性质决定的函数性态 积分等式与不等式处理技巧

4.1 定积分计算 区间变换技巧

例 1 $\int_{-1}^{1}(1+\sin x)\sqrt{1-x^2}dx=$（ B ）。

（A）π。（B）$\frac{\pi}{2}$。（C）2π。（D）$\frac{\pi}{4}$。由几何意义直接可得。

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \frac{\pi}{3}\le x<\pi \\ 0 & \text{其余}\end{cases}$， 则$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2x dx=$（B）。

（A）$\frac{3}{4}$。（B）$-\frac{3}{4}$。（C）1。 （D）－1。

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\ge 0 \\ e^x & x<0\end{cases}$，则$\int_1^3 f(x-2)dx=$________ 。

[解] $\int_1^3 f(x-2)dx=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$。

例 4 设 $f\in C[0,1]$，且$\int_0^1 f(x)dx=2$，则

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin 2x dx=$（ A ）。

（A）2。（B）3。（C）4。（D）1。

例 5 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$ =____________ 。

[解] $\frac{4}{5}$

例 6 设 $f(x)$一个的原函数为$\frac{\sin x}{x}$，则$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx=$__________。

[解] $\frac{4}{\pi}-1$

例 7 已知 $f'(x)=\frac{\cos x}{x}$, $f(\frac{\pi}{2})=a$, $f(\frac{3\pi}{2})=b$，则

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \underline{\frac{\pi}{2}(3b-a)+2}$ 。

例 8　$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}dx$（凑微分法+回归）

[解]　$\frac{3\pi}{16}$

例 9　计算 $\int_0^3 arc\sin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$。

[解]　$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

例 10 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx = \underline{\frac{\pi}{4-\pi}}$ 。

例 11 积分 $\int_{\frac{1}{4}}^{4}\frac{|\ln x|dx}{\sqrt{x}}=$________ 。

【解】　$6\ln 2-2$

例 12 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$，则 $\int_0^x \frac{f'(x)}{1+f^2}dx = \underline{\arctan(\arctan\sin x)}$ 。

例 13　$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$________。答案：$\frac{\pi}{4}$（$x=1$为奇点：$p=\frac{1}{2}$）

[解析与点评] 本题为常规定积分计算基本题目，考点是原函数与定积分计算。**类似例题和方法请参见水木艾迪 2005 基础班例 6.7,突破百分训练营（冲刺班）第 2 讲例 6。与水木艾迪数模 1-13 题，冲刺班例 13，例 19 等雷同。在水木艾迪考研辅导教学及教材《2005 考研数学应试导引与进阶》（刘坤林等编写，清华大学出版社 2004 年 7 月出版）中，例 5.32,例 6.27，以及 5.44 都属于此类题目。**

例 14 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，$\int_0^\pi f(x)dx = \underline{2}$ 。

例 15　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sqrt{\sin x}}-e^{\sqrt{\cos x}}+\sin^3 x}{8}dx=$______ 。答案：(D) $\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{1}{12}$。

(A) $\frac{\pi}{4}$。　(B) $\frac{1}{15}$。　(C) $\frac{\pi}{12}$ 。　(D) $\frac{1}{12}$。

例 16 设 $f(\pi)=2, \int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin xdx=5$， 求 $f(0)$.

[解]　$f(0)=3$

例 17　设 $f(x)$ 为连续奇函数，且 $F(x)=\int_0^x \frac{f(t)\cos t}{1+t^2}dt$，则 $F'(0)=\underline{0}$.

例 18 设 $f(x)$ 为连续奇函数，且 $\int_0^1 f(t)dt=a$，则 $\int_0^1 \frac{f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=\underline{-2a}$.

4.2 积分的保序性 估值定理 中值定理等性质的简单运用

例 19 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{nx^{n-1}}{1+e^x}dx$． 答案：$\dfrac{1}{1+e}$。

例 20 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{\ln t}{1+e^t}dt=$（ ）。

（A）1． （B）0． （C）a． （D）不存在。

[解] 答案为（B）。

例 21 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\dfrac{\sin x}{x}dx=$[ ]。

（A）1． （B）a． （C）0． （D）不存在。

选[C]。

例 22 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$， 则 $F(x)$（ A ）。

(A)必为正的常数.(B) 必为负的常数.(C)恒为零. (D) 不为常数。

例 23 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，当 $x\in[0,1)$ 时满足 $0<f(1)<f(x)$，且

$f'(x)\neq f(x)$，试证方程 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0,1)$ 内有唯一实根。

[证] 略

例 24 设 $a>0$， $f(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，

（1）写出 $f(x)$ 的带 Lagrange 余项的一阶麦克劳林公式公式。

（2）证明在 $[-a,+a]$ 上至少存在一点 η，使得

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx\text{。}$$

[解]（1） $\forall x\in[-a,a]$ 有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，

其中 ξ 在 $0,x$ 之间。

（2）略

例 25 设 $I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\sin x)dx$， $I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln(\cos x)dx$，则(B).

（A） $I_1<0<I_2$。 （B） $0>I_1>I_2$。 （C） $I_1=I_2$。 （D） $I_1>I_2>0$.

例 26 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负且单调增加，记 $X=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$，证明 $x\geq\dfrac{a+b}{2}$。

【思路】本题要证 $I=\int_a^b xf(x)dx-\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx\geq 0$．

将 b 视为变量，引入变上限的积分 $F(x)$，证明 $F(x)\geq 0$，

这便是（方法 1）；将二个积分合并为一个积分号，再插入分点$\frac{a+b}{2}$，把积分拆分为两个区间上的积分，利用 $f(x)$ 单调性对积分估计正负号，形成（方法 2）；利用积分中值定理对积分进行估计，便形成（方法 3）。

【证】略

例 27 设$\delta>0,\ \boldsymbol{f(x)}$在区间$(-\delta,\delta)$内恒有 $\boldsymbol{f}''(x)>0$, 且$|\boldsymbol{f(x)}|\le \boldsymbol{x}^2$，

记$\boldsymbol{I}=\int_{-\delta}^{\delta}\boldsymbol{f(x)dx}$，则必有 B 。

(A) $\boldsymbol{I}=0$； (B) $\boldsymbol{I}>0$； (C) $\boldsymbol{I}<0$；(D) 不确定；

定积分的区间变换 $I_f(a,b)=\int_a^b f(x)dx$，换元法的重要应用之一是区间变换：以改变积分区间为特定目的的变换。

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x(t))x'(t)dt \text{：令 } t=\frac{x-a}{b-a},$$

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_c^d f(x(t))x'(t)dt \text{：令 } t=\frac{x-a}{b-a}(d-c)+c,$$

还有反号变换：$t=-x$，倒数变换：$t=\frac{1}{x}$。

广泛用于积分的合并与拆分。

例 28 设 $\boldsymbol{f}$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $\int_0^1 \boldsymbol{f(x)\,dx}=0$，

证明存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f(1-\xi)-f(\xi)=0$.

[提示] 令$t=1-x,\ dx=-dt$，则有$\int_1^0 f(1-t)\,dt=0$，进一步得到

$\int_0^1[f(t)-f(1-t)]dt=0$，于是存在$\xi\in(0,1)$，使得

$\int_0^1[f(t)-f(1-t)]dt=f(1-\xi)-f(\xi)=0$.

补充：广义奇偶性（偶对称与奇对称）

若 $y=f(x)$ 的图形有对称轴 $x=a$，则应有 $\boldsymbol{f(a-x)=f(a+x)}$（将 x 视为参数）

令 $\boldsymbol{g(x)=f(a-x)}$，则有 $\boldsymbol{g(-x)=f(a+x)=f(a-x)=g(x)}$，

因此 $\boldsymbol{g(x)}$ 为偶函数。且此时有 $f(x)=f(2a-x)$。

若 $y=f(x)$ 的图形有对称中心 $\boldsymbol{(a,0)}$，则应有 $\boldsymbol{f(a-x)=-f(a+x)}$（将 x 视为参数），

令 $\boldsymbol{g(x)=f(a-x)}$，则有 $\boldsymbol{g(-x)=f(a+x)=-f(a-x)=-g(x)}$，

因此 $\boldsymbol{g(x)}$ 为奇函数。且此时有 $f(x)=-f(2a-x)$。

以上这种性质称为函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 的广义奇偶性。

例 29　已知 $[0,a]$ 上的连续曲线 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 关于直线 $x=\dfrac{a}{2}$ 对称，证明

$$\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx .$$

[证] 略

例 29-1 已知连续曲线 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 关于点 $(\boldsymbol{a},0)$ $(\boldsymbol{a}\neq 0)$ 对称，

则 $\forall \boldsymbol{c}\in \boldsymbol{R},\int_{-c}^{c}\boldsymbol{f(a-x)dx}=$（D）。

（A）$2\int_0^c \boldsymbol{f(2a-x)dx}$．（B）$2\int_{-c}^0 \boldsymbol{f(2a-x)dx}$．

（C）$2\int_0^a \boldsymbol{f(c-x)dx}$．　　（D）0．

[解]由几何意义可得知选(D).

例 30 设 $f\in C[0,1],a\in(0,1)$，且 f 单调减少，证明：

$$\int_0^a f(x)dx>a\int_0^1 f(x)dx .$$

[证]（方法 1）

$$a\int_0^1 f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=a\int_0^a f(x)dx+a\int_a^1 f(x)dx-\int_0^a f(x)dx$$

。。。。。。

（方法 2）

$\forall x\in[a,1]$，令 $F(x)=a\int_0^x f(t)dt-x\int_0^a f(t)dt,\quad F(a)=0$

。。。。。。

（方法 3）对 $\int_0^a f(x)dx$ 取区间变换 $t=\dfrac{x}{a}$，则 $dt=\dfrac{1}{a}dx$，

。。。。。。

4.3 变限积分与含参积分

变限积分表示的函数不一定是原函数，即

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a,b]$ 上连续（注意：$F(x)$ 不一定是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数）。

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a,b]$ 上可导，且 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$。(此时 $F(x)$ 一定是 $f(x)$ 在

$[a,b]$上的一个原函数）。

例 31 若极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1-x^{\alpha})}\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^4}-1)dt=\beta\neq 0$，则（　）。

(A) $\alpha=8,\quad \beta=\dfrac{1}{10}$。　　(B) $\alpha=10,\quad \beta=\dfrac{1}{20}$。

(C) $\alpha=10,\quad \beta=-\dfrac{1}{10}$。　　(D) $\alpha=10,\quad \beta=\dfrac{1}{10}$。

[解]　因此$\alpha=10$，极限为$\beta=\dfrac{1}{10}$。

例 31-1 设 $f(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt$，$\varphi(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，

当$x\to 0$时，$f(x)$是$\varphi(x)$的（ C ）。

(A) 高阶无穷小。　　(B) 低阶无穷小。

(C) 同阶但不等价的无穷小。　(D) 等价无穷小。

[注] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5\sin x}{x(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{5}{e}\neq 0$。

例 32 把$x\to 0^+$时的无穷小量

$\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是 [　　]。

(A)α,β,γ.　　(B)α,γ,β.　　(C)β,α,γ.　　(D)β,γ,α,

[注] 与变限积分有关的极限问题，一般属于无穷小量比阶问题，无穷小量替换、对变限积分的求导数、洛必达法则，或利用中值定理导数定义，都是常用方法。

【解】选项(B)正确。

例 32-1 设 $f(x)$有连续导数，且 $f(0)=0,f'(0)\neq 0$，则当$x\to 0$时，

$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt$是[　D　]阶无穷小量.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

例 32-2 设 $f(x)$连续，则$\int_0^x[\int_0^t f(x)dx]dt=$[C]。

(A) $\int_0^x f(t)(t-x)dt$ ；(B) $\int_0^t f(x)(x-t)dx$ ；(C) $\int_0^x f(t)(x-t)dt$ (D) $\int_0^t f(x)(t-x)dx$。

注：上题中，因为 $f(x)$连续，$F(x),G(x)$均可导，可以用求导数的方法证明．若 $f(x)$不连续，则不能用求导数的方法证明。

例 33 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{x(1-\cos x)}$。

[解] $\dfrac{\pi}{6}$。

含有参数的积分

积分号内含有参数的问题是一类重要题型，这类问题往往需要对参数求导数。典型方法有两个：

(1) 当参数以因子形式出现在积分号内时，则将含参数的因子移到积分号外面，

(2) 如无法将含参数的部分移到积分号外面，则引入变量替换。

例 34 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x\cos(2x-t)^2dt=\underline{2\cos(2x)^2-\cos x^2}$ 。

例 35 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}-1$，求 $f(x)$ 的极值及渐近线。

[解] $x=0$ 为驻点， $f(0)=-1$ 为极大值， $y=x$ 为单边渐近线（$x\to-\infty$）。

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，

若 $\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=x^2\ln(1+x)$，求 $f(x)$.

[解] $f(x)=2\ln(1+x)-x+\ln(1+x)$。

4.4 由定积分决定的函数性态研究 积分等式与不等式处理技巧

例 37 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a]\,(a>0)$ 上连续， $g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足

$f(x)+f(-x)=A$（A 为常数），证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$。

[证]略

例 38 设 $f\in C[a,\ b]$，且对满足 $\int_a^b g(x)dx=0$ 的一切 $g(x)$ 有 $\int_a^b f\cdot gdx=0$，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上必（ B ）。

(A) 恒为零 ； (B) 恒为常数;

(C) 恒为线性函数; (D) 恒为平均值为零的周期函数.

例 39 设 $F(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}tdt$，对自然数 n

试证明不等式 $\max\limits_{x\ge 0}F(x)\le\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

[证] 略

例 40 设 a_0 为实数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数，且满足

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

试证明：多项式函数 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^n a_kx^k$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个实根.

[证] 本题考查连续函数及原函数概念与性质。已知等式恰为 $P_n(x)$ 的一个原函数

$\int_0^x P_n(t)dt$ 在 $x=1$ 处的取值。于是引入辅助函数

$$\Phi(x)=\int_0^x P_n(t)dt \quad = a_0 x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$，。。。。。。。

例 41　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a<b)$，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，$\int_a^b xf(x)dx=0$，证明：至少存在两点 $x_1,x_2\in(a,b),\ x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立。

[证] 略

例 42（2005-3-4-19）　设 $f(z)$，$g(x)$ 在 [0,1] 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geq 0$，$g'\geq 0$。证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geq f(a)g(1)$。

[解析与点评 1]　一个切入点是移项，并将参数易为变量，引入变限积分作为辅助函数，利用导数研究增减性，再由终点值判断函数的正负号，这在水木艾迪考研辅导班刘老师的教学中，是处理等式与不等式证明的一类基本方法，被称为增减性加初值（或终值，本题为终值）的分析法，是重点强调的基本方法，这便是方法一。

[证 1]令　$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1)$，　$x\in[0,1]$，

则 $F(x)$ 在 [0,1] 上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(z)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)]$$

…….

[解析与点评 2] 由抽象函数的分部积分（另一个切入点），直接利用函数的增减性，再综合考虑积分的比较性质（积分保序性的推论），给出结果。这在水木艾迪考研辅导班刘老师的教学中是处理等式与不等式的又一类基本方法。

[证 2]　$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x=g(x)f(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x$

……

[解析与点评 3]本题与水木艾迪考研辅导 2005 暑期强化班第 4 讲例 22、突破百分训练营（冲刺班）第 2 讲例 43 相雷同，类似例题还有与水木艾迪考研辅导系列教材《2005 考研数学应试导引与进阶》中的例 6.52，6.68 等典型题目。（刘坤林、谭泽光等编写，清华大学出版社 2004 年 7 月出版）。

例 43　证明；$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^2\arctan(nx)dx=\frac{\pi}{2}$.

证明：证法一．分部积分法

$$\int_{-1}^2\arctan(nx)dx = x\arctan(nx)\Big|_{-1}^2-\int_{-1}^2\frac{nx}{1+(nx)^2}dx$$

……

证法二．积分中值定理

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^2\arctan(nx)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\int_{-1}^1\arctan(nx)dx+\int_1^2\arctan(nx)dx\right]$$

……