# 强化部分

## 第五课 微积分

## 第 5 章　定积分的应用及广义积分

5．1 定积分应用的两种思想

- 定积分问题的持征
- 解决定积分应用问题的两种思路：

（1）元素相加法： 利用定积分定义一个量。

分小取近似：$\Delta I \approx f(\xi_i)\Delta x_i$； 求和取极限

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$。

（2）微元分析法： 通过分析末知函数的增量求出其微分的方法。

分小取微分近似：$\Delta I \approx dI = f(x)dx$；积分求增量：

$$I=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\ .$$

5.2　定积分在几何方面的应用

（1）平面区域的面积

直角坐标系中平面区域的面积（代数面积）

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则区域

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$$

的面积为 $A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$。

注：若连续函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上变号，则 $A=\int_a^b f(x)dx$ 表示正负面积的代数和，有时称为代数面积。

（2）　参数方程下区域的面积

设区域的边界由曲线 $L$: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 确定，其中 $x(t),y(t)$ 连续可导，$y(t)\ge 0$，则区域的面积为 $A=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$。

（3）　极坐标系下区域的面积

设区域 $D$ 为

$$D=\{(x,y)|x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi,\quad \alpha\le\varphi\le\beta, 0\le\rho\le\rho(\varphi)\},$$

则其面积为 $A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\rho^{2}(\varphi)d\varphi$。

（4） 旋转体的体积 考虑平面区域 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$

绕 $x$ 轴旋转生成的旋转体的体积（小圆台法）$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$。

绕 $y$ 轴旋转生成的旋转体的体积（薄壁筒法）$V_y=\int_a^b 2x\pi f(x)dx$。

（5） 平面光滑曲线的弧长

直角坐标系中的光滑曲线 $y=f(x),\quad a\le x\le b$ 的弧长为

$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$。

参数方程 $x=x(t), y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 的弧长为

$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2++[y'(t)]^2}dt$。

极坐标系下曲线 $\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$ 的弧长为

$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)++[\rho'(\varphi)]^2}d\varphi$。

（6） 旋转体的侧面积

直角坐标系中曲线 $y=f(x),\quad a\le x\le b$ 绕 $x$ 轴旋转生成的旋转体的侧面积为 $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$。

参数方程下曲线 $x=x(t), y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 绕 $x$ 轴旋转生成的旋转体的侧面积为 $A=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{[x'(t)]^2++[y'(t)]^2}dt$。

例 1　曲线 $y=f(x)=x(x-1)(x-2)$ 与 $x$ 轴所围部分的面积为( B ).

(A)　$\int_0^2 f(x)dx$。　　　(B) $\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$。

(C)　$-\int_0^2 f(x)dx$。　　　(D) $-\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$。

［提示］被积函数有三个零点，只需注意被积函数的正负号。

例 2　抛物线 $y=x^2+2x$，直线 $x=1$ 与 $x$ 轴所围成图形的面积为________。

［解］ $A=|\int_{-2}^{0}(x^2+2x)dx|+\int_0^1(x^2+2x)dx=\frac{3}{8}$。

例 3 求下列平面区域的面积

（1）　圆域 $\rho \le 1$ 被心脏线 $\rho = 1+\cos\varphi$ 分割成两部分记为 $A_1$ 与 $A_2$，

分别求出 $A_1$ 与 $A_2$；

$A_1 = \pi - A_2 = 2 - \dfrac{\pi}{4}$，$A_2 = 2(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{1}{2}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{5\pi}{4} - 2$。

（2）　由 $\rho = a(1+\cos\varphi)$，$\rho = 2a\cos\varphi$　$(a>0)$ 所围区域介于

$\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$ 的部分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{1}{2}[a^2(1+\cos\varphi)^2 - (2a\cos\varphi)^2]d\varphi = a^2(\frac{5\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8})。$$

**例 4** 区域 $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x = \dfrac{1}{2}y^2 \end{cases}$ 的面积为______________。

[解] 求得交点坐标为 $(2,2),(2,-2)$。所围区域的面积：$\dfrac{4}{3}+2\pi$

**例 5 设 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负，且为单调增加的函数，$f(0)=0$，区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le t, 0\le y\le f(x)\}$ 绕 $x=t$ 轴旋转一周生成的旋转体体积记为 $v(t)$，证明 $v(t)$ 二阶可导，并求 $v''(t)$。**

[解] 用薄壁筒法，$v''(t) = 2\pi f(t)$。

**例 6** 设曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 $y$ 轴的交点为 $P$，过 $P$ 点作该曲线的切线，求切线与该曲线及 $x$ 轴围成的区域绕 $x$ 轴旋转一周生成的旋转体体积。

[解] [方法一] 应用小圆台法与几何意义，$\dfrac{29}{30}\pi$。

[方法二] 应用薄壁筒法，$\dfrac{29}{30}\pi$。

**例 6-1　在曲线 $y=(x-1)^2$ 上点 $(2,1)$ 处引该曲线的法线.由该法线，$x$ 轴及该曲线围成区域为 D( $y>0$ ),求 D 绕 $x$ 轴旋转一周生成的体积。.**

[解] 方法一：对 $x$ 积分：$\dfrac{13\pi}{15}$

方法二：对 y 积分：$\dfrac{13\pi}{15}$。

**例 7**　由 $x^2+y^2 \le x$ 与 $y \ge x$ 确定的区域记为 A，求 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所生成的旋转体体积。

[解] $\dfrac{3\pi^2}{8}-\dfrac{2\pi}{3}$

例 8 设$S(x)$为$[0,\ x]$上$y=\cos x$与$X$轴围城的面积，，

(1) 当 $n$ 为正整数时，且 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，证明

$2n\le S(x)\le 2(n+1)$ .

(2) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$。

[解] (1) 略

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$。

例 9 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x)<0$，试证： $\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$ .

[证] 利用泰勒公式： 令 $\dfrac{a+b}{2}=x_0$，

将 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处展开为带拉格朗日余项的一阶泰勒公式。。。。。。

注：本题有明显的几何意义，请读者自行分析。

例 10 设 $f(x)$ 为连续非负函数，对所有大于 1 的常数 $b$，由$1\le x\le b$及

$0\le y\le f(x)$ 围成区域的面积为$\sqrt{b^2+1}-\sqrt{2}$，求 $f(x)$。

[解] $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)>0,\ f'(x)>0,$ 记 $F(t)$ 为 $a\le x\le t,\ f(x)\le y\le f(t)$ 界定的面积，

$G(t)$为 $t\le x\le b,\ f(t)\le y\le f(x)$ 界定的面积，

证明对任意常数 $k>0$, 存在唯一的 $x_0\in(a,b)$ 使得 $F(x_0)=kG(x_0)$。

[证] 略

例 12 求曲线 $y=(\dfrac{x}{2})^{2/3}$ 介于$0\le x\le 2$之间的弧长为__________。

[解] $\dfrac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)$。

。

例 13 求外摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le 2\pi, a>0)$ 的弧长

[解]　$L=\int_0^{2\pi}a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2-2\cos t}dt=8a$

例 14 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}du$ 及 $y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}du$ 确定.则该曲线当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时的切线斜率等于$\underline{1}$，此曲线介于 $\boldsymbol{t=1}$ 与 $\boldsymbol{t=\frac{e}{2}}$ 之间的弧长为$\underline{1-\ln 2}$.

例 15 求曲线 $y(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos t}{\sqrt{x^2+2x\sin t+1}}dt\qquad(-2\le x\le 2)$ 与直线

$x=-2,\ x=2,\ y=0$ 所围图形绕 $x$ 轴旋转而成的立体体积.

[解]　$V=2\int_0^2\pi y^2dx=2\pi\left(\int_0^1(2x)^2dx+\int_1^2 2^2dx\right)=\frac{32}{3}\pi$ 。

例 16 设二次抛物线 $y=y(x)$ 当 $0\le x\le 1$ 时 $y\ge 0$，若该抛物线与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 $a,b,c$，使此图形绕 $x$ 轴旋转一周而成的体积 $V$ 最小.

[解] 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，$c=0$.

当 $a=-\frac{5}{4},\quad b=\frac{3}{2}$ 时 $V$ 最小。

例 17 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 $s_1$，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 $s_2$，并且 $a<1$。

（1）确定 $a$ 的值，使 $s_1+s_2$ 达到最小，并求出最小值；

（2）求该最小值所对应的图形绕 $x$ 轴旋转一周所生成旋转体的体积。

[解]（1） $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $s_1+s_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^3=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 。

（2） $V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$

## 5.3 定积分的物理应用

**（1）处理压力问题的关键是： 同一深度的各方向的压强相等。**

小微元的压力微元为　$dp=gh\cdot dA$，

其中 $h$ 为该小微元离液面的高度，$g$ 为重力加速度，$dA$ 为该小微元的面积.积分可得压力.

**（2）处理引力问题处理关键是： 利用质点万有引力定律。**

**（3）处理作功问题处理关键是： 不同背景下力的表达，导致作功的有效形成。**

**（4）正确确定积分上下限：对区域的有效分割范围即是积分上下限。**

例 18（2004-2-18）曲线 $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形.该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.（1）求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值；（2）计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$。

[解] （1）$\dfrac{S(t)}{V(t)}=2$。（2） $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}=1$。

**例 19 设** $f(x)$ **在** $[0,a]$ **上非负，** $f(0)=0,\ f''(x)>0,\quad (z,y)$ **为** $y=f(x), y=0, x=a$ **围成区域之形心。记** $X=\dfrac{\int_0^a xf(x)dx}{\int_0^a f(x)dx}$**，试证** $\mathrm{X}>\dfrac{2a}{3}$.

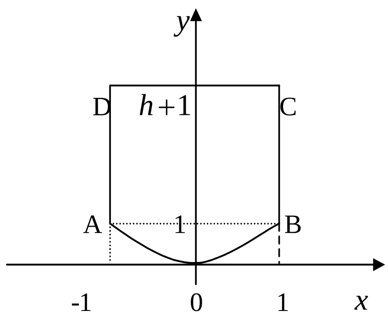
[证] **要证明** $X>\dfrac{2}{3}a$**，即证明** $\int_0^a\left(x-\dfrac{2}{3}a\right)f(x)dx>0$，。。。。。。

**注：** $(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ **为** $y=f(x),\ y=0,\ x=a$ **围成区域之形心，**

例 20 一块高为 $a$，底为 $b$ 的等腰三角形水闸板，垂直地沉没在水中，顶在下，底与水面相齐，则水闸板一个侧面所承受的静压力为____________。

[解] $p=2\int_0^a(a-y)xdy=2\int_0^a(a-y)\dfrac{b}{2a}ydy=\dfrac{1}{6}a^2b$。

例 21 某闸门的形状与大小如图所示，以 $y$ 轴为对称轴，闸门的上部为矩形 ABCD，下部由顶点位于原点的二次抛物线 $y=kx^2$ 与线段 AB 所围成，险段 AB 两端为 A(-1,0)与 B(1,0)，当水面与闸门的上端相重合时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4，问闸门矩形部分的高 $h$ 应为多少 $m$（米）？



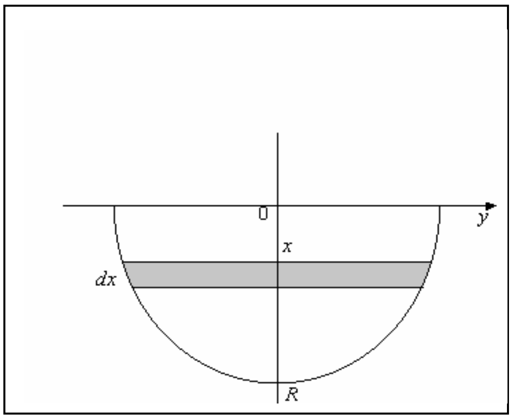

[解] $h=2m$。

例 22 一半径为 $R$ 的下半球形储油罐装满油，其圆形平面向上与地平面重合设有开口，设油的密度为 $\mu$，若将罐内的油全部由开口处泵出油罐，则克服重力所作的功为（ ）。

(A) $\dfrac{1}{4}\pi\mu gR^4$ 牛顿米。 (B) $\dfrac{1}{2}\pi\mu gR^4$ 牛顿米。

(C) $-\dfrac{1}{4}\pi\mu gR^4$ 牛顿米。(D) $-\dfrac{1}{2}\pi\mu gR^4$ 牛顿米。

[解]答案(A)。[提示] 以球心为原点，向上为 $y$ 轴，水平方向为 $x$ 轴，建立直角坐标系。例 23 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合,水的密度为 1,则闸门受的压力为__________.




[解] $p=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}R^3$

6．4 两类广义积分

(1)第一类广义积分

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 一定收敛，此时称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **绝对收敛**.

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 方发散时,称广义积分**条件收敛**.

**直接比较法**：非负函数 $0\le f(x)\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$，若 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 一定收敛；若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 一定发散.

**极限比较法（比阶法）**：设 $f(x),g(x)$ $[a,+\infty)$ 内的任意有限区间可积, $g(x)$ 非负,

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

当 $\lambda\ne 0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 有相同的敛散性;

当 $\lambda=0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛;

当 $\lambda=\infty$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛.

**尺度 1**：$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\quad(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛;当 $p\le 1$ 时发散。或叙述为：

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\lambda\ge 0$ ,且 $p>1$ ,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

(2) 第二类广义积分

若第二类广义积分 $\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛, $\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛，此时称 $\int_a^b f(x)dx$ **绝对收敛**.

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛而 $\int_a^b|f(x)|dx$ 方发散,则称广义积分**条件收敛**.

**直接比较法**：非负函数 $0\le f(x)\le g(x),\ x\in[a,b)$，若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，$\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛；若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，$\int_a^b g(x)dx$ 一定发散.

**极限比较法(比阶法)**：函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b)$ 内的任意区间上可积, $g(x)$

非负，且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

当 $\lambda\neq 0$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 有相同的敛散性；

当 $\lambda=0$ 时，广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

当 $\lambda=\infty$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛.

尺度 2：$\int_a^b \dfrac{1}{(x-b)^p}dx$ 当 $p<1$ 收敛， $p\geq 1$ 时发散．或叙述为：

若 $\lim\limits_{x\to b^-}(x-b)^p f(x)=\lambda\geq 0$，且 $p<1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

**例 24 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}dx$ 的收敛性.**

［解］ $1<p<2$ **时积分收敛。**

例 24-1　当 $p$ 的取值范围为_______时，广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}$ 收敛。

答案：$1<p<2$。 提示：广义积分为混合型，分解为两个积分讨论：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}=\int_1^2\frac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}$$

**例 25 下列结论中正确的是（ D ）。**

(A) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ 与 $\int_0^1\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **都收敛.** (B) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ 与 $\int_0^1\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **都收敛.**

(C) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **发散，** $\int_0^1\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **收敛.** (D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **收敛** $\int_0^1\dfrac{1}{x(x+1)}dx$ **发散.**

**［解析与点评］ 考点是：广义积分收敛性的尺度的运用。正如我们在在水木艾迪考研辅导教学中强调的那样，当 $a$ 为奇点时，** $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty}f(x)dx$ **为混合型广义积分，前者为第二类广义积分，后者为第一类广义积分。分别利用各自的尺度即可判断他们的收敛性。所谓尺度是：**

**尺度 1：$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ 或 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x-a)^p}dx$， $p>1$ 收敛，** $p\leq 1$ **发散。**

**尺度 2：$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^p}dx$ ： $p<1$ 收敛，** $p\geq 1$ **发散。 $p\leq 0$ 为普通定积分。**

对$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$，$p=2>1$，收敛；对$\int_0^1\frac{1}{x(x+1)}dx$，$p=2>1$，发散。

**此类题目在水木艾迪考研辅导教学中是基本例题，特别是基础班的例 7.29,7.30,7.33 等题目，有了这些例题的概念与方法，解答本考题只需 20 秒时间。本题还与水木艾迪考研辅导系列教材《2005 考研数学应试导引与进阶》中的一些例题及模拟与自测题目相雷同（刘坤林、谭泽光等编写，清华大学出版社 2004 年 7 月出版）。**

例 26 设 $p(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负，若方程 $y'+p(x)y=0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的任意一个非零解 $y(x)$，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。则下列结论中正确的是[ D ]。

(A) 广义积分 $\int_0^{+\infty}p(x)dx$ 收敛。　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=-\infty$。

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$。　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$。

例 27 计算（1）$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$．　答案：$\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$。

（2） 计 算 广 义 积 分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+8}dx$ ．

[解] $I=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{x+2}{2})^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{8}$。

例 28 设广义积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=A$，则广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=$_____。

答案：$\frac{A}{2}$。

例 29 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$_________。答案：1。

[提示] 令 $\ln x=t,\ x=e^t,dx=e^t dt$，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=1$。

例 30 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$。

[解] $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\ln 2$。

例 31 求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1,x=2$ 所围平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体体积最小。

答案：$y=x-\frac{75}{124}x^2$。

例 32 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，记 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)| = M$ ，

试证 $M \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$ ，(综例 10.2.4)

[证] 略

例 33 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数， $f(a) = f(b) = 0$ ，记 $M = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$ ，证明

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}M\text{。}$$

[证] 略

例 34 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续单调增加，试证明对满足 $0 < a < b$ 的任意实数 $a$ 与 $b$ 成立不等式

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right]\text{。}$$

[证] 略

例 35 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ ，记 $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$ 。

(1) 求 $F'(x)$ ；

(2)试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点，使 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$

(3)试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $x_0$ ，使得 $2f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0$

[证] (1) $F'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$ (2)略 (3) 略。

例 36 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(e^{\frac{\pi}{n}} - 1)$ 。答案：$\frac{\pi}{e}$ 。

[解] 运用定积分求极限基本公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n}k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 。