# 强化部分

# 第五课　微积分

# 第 6 讲 级数

## 6．1 级数基本概念 定义与符号运算

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ ，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 称为数项级数的前 $n$ 项部分和。部分和记号与级数一般项 $u_n$ 的运算关系是　$S_n=S_{n-1}+u_n$，$u_n=S_n-S_{n-1}$。

部分和 $\{S_n\}$ 有极限时，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛， 极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 称为此级数的和；当 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在时,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。

收敛级数的性质

（1）级数收敛的必要条件：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

（2）级数收敛的充要条件

充要条件 1：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$（ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$）存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ .

充要条件 2：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$ .

（3）　运算性质

数乘运算： 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\alpha\forall\in R$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha u_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha u_n=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。

加法运算： 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{。}$$

这一性质，表现为充分条件，若条件不满足，结论不一定不成立。

（4）重组性质（更新性质）

- 收敛级数加括号后所生成的新级数仍收敛，且级数的和不变。

[注] 若合并级数相邻有限项后所得到的更新级数发散，则可推断原级数发散。

• 一个级数去掉、增加或改变有限项后，生成的更新级数与原级数有相同的收敛性结论。

从极限的概念来理解，一个级数的收敛性，只依赖于某个足够大的下标 $N$ 之后的无穷多项和有极限，与级数的前端限项无关。

例 1　证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+5)}$ 收敛，且其和为 $\frac{1}{4}$。［解］略

例 2 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于(　　)。

(A) 3.　(B) 2.　(C) 8.　(D) 12。

[寓意] 本题练习级数的符号运算，以及收敛级数的运算法则，而级数的运算法则的实质是极限的运算法则。答案(D)。

6．2　正项级数与任意项级数

(1) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的基本属性是：部分和数列 $\{S_n\}$ 为单增数列。由此属性，构成正项级数判敛法的理论基础。

正项级数收敛的充要条件　$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

尺度级数 1：几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$，当 $|q|<1$ 时，几何级数收敛。其和为 $\frac{1}{1-q}$；

当 $|q|\geq 1$ 时，几何级数发散。

尺度级数 2：$p-$级数 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $p\leq 1$ 时，级数发散。特别当 $p=1$ 时，称 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}$ 为调和级数。

(2) 正项级数的判敛法（一般表现为充分条件）

• 直接比较法　若存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $0\leq u_n\leq v_n$，则

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

• 极限比较法(比阶法)：　设 $a_n\geq 0$，$b_n\geq 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$，则

当 $A\neq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同为收敛或同为发散；

当 $A=0$ 时，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

当 $A=+\infty$，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可推断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

• **比率判敛法** 设 $u_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

（1）当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$；

（3）当 $\rho=1$ 时，本方法失效。

［证］只证（1）。$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists \boldsymbol{N}>\boldsymbol{0}$，使当 $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N}$ 时有

$\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon$，特别取 $\varepsilon=\frac{1-\rho}{2}>0$，则 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1+\rho}{2}<1$，

令 $q=\frac{1+\rho}{2}<1$，于是有 $u_{N+1}<qu_N$，$u_{N+2}<q^2u_N$，$\cdots, u_{N+p}<q^pu_N$，

而 $\sum_{p=1}^{\infty} q^p u_N$ 收敛，由比较法，所以级数 $\sum_{p=1}^{\infty} u_{N+p}$ 收敛。

再由重组性质，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。其余留给读者练习证明。

• **根值判敛法** 设 $u_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$；当 $\rho=1$ 时，本方法失效。

**［注］与比率法类似，但根值法比比率法适应范围要宽。另外，根值法与比率法可以与绝对值判敛法结合在一起判断任意项级数的敛散性，也是求幂级数的收敛半径的重要方法。**

**例 3 判断** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ 的收敛性。

［解］$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$，因此该级数收敛。

**注：若用比率法，**$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\dfrac{3^n}{2+(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{3\left(2+(-1)^n\right)}$不存在，因为$n=2k$时上述极限为$\dfrac{1}{9}$，　$n=2k+1$时上述极限为$1$，故不能得出收敛性结论。一般来说，由比率法可以判断收敛性的级数，　用根值法一定可以给出同样结论，而反之未必。

说明：　$u_{N+p}<q^p u_N$，$q=\dfrac{1+\rho}{2}<1$，$\sqrt[N+p]{u_{N+p}}<q^{\frac{p}{N+p}}\cdot\sqrt[N+p]{u_{N+p}}\to q<1$。

• **积分判敛法（充要条件）**设$f(n)\geq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛的充分必要条件是存在$N\geq 1$，使得广义积分$\int_N^{+\infty}f(x)dx$收敛。

典型例题是：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散，因为$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}$发散。

**6．3 任意项级数**

**（1）绝对收敛与条件收敛**

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**。

**绝对值判敛法** 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

[证]　由不等式$0\leq|u_n|-u_n\leq 2|u_n|$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|-u_n)$收敛。

而　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|-u_n)$，由运算法则得到，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

**[注] 绝对收敛级数可以重排其通项顺序，重排后所得更新级数的保持敛散性，收敛时其和不变。这类似于有限个数加法的交换率。而条件收敛的级数不具备这种性质。**

**例 4** 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{a}{n})\dfrac{n!}{n^n}$ 的收敛性结论是(　　)。答案：(A)。

(A) 绝对收敛。　(B) 条件收敛。　(C) 发散。　(D) 与$a$的取值有关。

**（2）交错级数** 设$u_n>0$，称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$为**交错级数**。

**莱布尼兹判敛准则** 若 $u_n > 0\ (n=1,2,3,\cdots)$ 满足：

数列 $\{u_n\}$ 单减，即 $u_n \ge u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，

且满足 $|R_n| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}u_k\right| \le u_n$。

**[注] 以上的两个条件也称为莱布尼兹条件。莱布尼兹判敛法不仅给出了交错级数的收敛性结论，而且还给出了用部分和近似级数和时的误差限，这是一般判敛法所没有的功能。**

**6．4　每一位考生，应总结归纳级数收敛性分析的一般程序。**

**例 5** 设 $0 < a_n < \dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中必收敛的为（　　）。

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$。　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$。　(D) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^2 \ln n$。

**[解] 应选**(D)。

**例 6** 设常数 $\alpha > 0$，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+1+\cos\alpha}}$ [　　]

(A)发散。　(B)条件收敛。　(C)绝对收敛。　(D)敛散性与 $\alpha$ 的值有关。

**[解] 答：**(C)。

**例 7** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则由下列选项[　　]能得出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。　　。

$(A)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 1$。　　$(B)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 0$　。

$(C)$ $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - b_n) = 1$　。　$(D)$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_n - b_n) = 1$

[ 解 ] 应 注 意 ： 判 断 正 项 级 数 收 敛 性 的 方 法 不 能 直 接 适 用 于 任 意 项 级 数 。
$a_n - b_n = \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$，再由运算法则，得到答案：（$D$）。

**例 8** 下列说法中正确的是（　　）。 答案$(D)$。

$(A)$　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \ge v_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛。

$(B)$　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛。

$(C)$　若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n \geq \frac{1}{n}$。

$(D)$　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)^2$ 收敛。

**例 9** 设 $a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}$，$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$，则下列四个级数

$(a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 。　$(b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$。　$(c)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 。　$(d)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 。

的收敛关系是[　　　　　] 。 **答案**$(B)$。

（$A$）若$(a)$收敛，则$(c)$和$(d)$皆收敛。

（$B$）若$(b)$收敛，则$(a)$、$(c)$和$(d)$皆收敛。

（$C$）若$(c)$和$(d)$发散，则$(a)$和$(b)$皆发散。

（$D$）$(a)$　$(b)$　$(c)$　$(d)$收敛性无关。

**例 10** 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$，

（1）求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$的和；（2）证明，$\forall \lambda > 0$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

**[解]**　（1） $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 = S$ 。（2）略

**例 11** 下列命题中正确的是[　　]。**答：**(D)。

(A)若$u_n < v_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。

(B) 若$u_n < v_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(C)若$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(D) 若$w_n < u_n < v_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，且$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

例 12 设常数 $a>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln a+n\ln n}{n^2}$（ B ）。

（A）发散；　（B）条件收敛；（C）绝对收敛；（D）敛散性与 $a$ 取值有关。

[提示] 应用运算法则。

17．设 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+1+\sin\lambda}}$ 收敛性结论是

（A）绝对收敛。　（B）条件收敛。　　（C）发散。　　（D）不定。

[提示] 由平均值不等式有

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+1+\sin\lambda}}\le\frac{1}{2}(|a_n|^2+\frac{1}{n^2+1+\sin\lambda})\le\frac{1}{2}(|a_n|^2+\frac{1}{n^2})。$$

例 13 设常数 $\lambda\neq0$，$a_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$ [　　]。

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。　（D）收敛性与 λ 有关。

[解]级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$ 绝对收敛。

例 14 设 $\boldsymbol{a_n>0}$，单调减且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$ 是否收敛？证明结论。

[解] 由比较法，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n+1})^n$ 收敛。

例 15　设 $f(x)$ 有三阶连续导数，常数 $\alpha<-\dfrac{5}{12}$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$，

则使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n^\alpha)$ 收敛性的结论是　（　　）。答案 B。

（A）条件收敛。（B）绝对收敛。（C）发散。（D）不定。

6．5 幂级数　　GPS：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，　　NPS：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$x_0=0$。

**（1）幂级数的收敛域**　幂级数作为一种特殊的函数项级数，其收敛域也具有某些特定的性质。这主要体现在以下的定理和其推论中。

**幂级数收敛域的基本特点是：**

- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ **的收敛域是非空点集，即至少在** $x_0$ **处收敛。**

• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **的收敛域是以 $x_0$ 为对称点的一个对称区间（收敛区间），**

**即 $(x_0-r, x_0+r)$， $r$ 为收敛半经；区间端点情况较复杂，视具体级数而定。**

**•幂级数的条件收敛点只能位于收敛区间端点。**

**阿贝尔定理** 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则其在 $|x|<|x_0|$ 时绝对收敛。若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1$ 处发散，则其在 $|x|>|x_1|$ 时发散。

例 16 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} (x-a)^n$ 在点 $x_1=-2$ 条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} (x-a)^n$ 在点 $x_2=\frac{1}{2}$ 的收敛情况是 [　　]．答案（C)。

(A) 绝对收敛．(B) 条件收敛．　(C) 发散．　(D) 不能确定．

例 16-1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ ，在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（ B ）。

(A)条件收敛。　(B) 绝对收敛。 (C) 发散。　(D) 敛散性不能确定。

[提示] 注意到：$x_0=1, R\geq 2$，点 $x=2$ 在收敛域内部。

例 17 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{2^n+(-5)^n}$ 的收敛域为______ 。答案：$(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$。

[注] **求幂级数**的收敛域时应注意：$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n x^n}$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ **或** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1}$ **，以及** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

（$x_0 \neq 0$）的区别。请参见下列例题：

例 17-1　**幂级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} (x+1)^{n-1}$ 的收敛域是__________ 。

[解]收敛域为 $(-3, 1)$。

（2）**解析性质**

**•和函数的连续性：** 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 $I$ 上连续，即任给 $x_0 \in I$，

有 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0}a_nx^n\right)=\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$。

● **和函数的可积性与逐项积分性质**

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 $I$ 上可积，且可逐项积分，即任给 $x\in I$，有

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^ndt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+}$$ 。

● **和函数的可导性与逐项求导公式**：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即 $S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$。

逐项积分或微分后的幂级数收敛半径不会改变。

**例 18 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-8，8]$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_nx^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 $R$ 为**[ C ]。

(A) $R\geq 8$． (B) $R\leq 8$． (C) $R=8$． (D) 不定.

[解] **由逐项微分（两次）可得** $R=8$。

(3) **展开法与求和法**　包括直接展开法与见解展开法。

由直接展开法易知函数 $e^x,\cos x,\sin x,\ln(1+x),(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1],$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

其中，当 $\alpha\leq -1$ 时，$x\in(-1,1)$；当 $-1<\alpha<0$ 时，$x\in(-1,1]$；当 $\alpha>0$ 时，$x\in[-1,1]$。

特别，当 $\alpha=-1$ 时，有（**常用展开与求和零部件**）

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n，\qquad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n，\ x\in(-1,1)。$$

**间接展开法**：通过一定运算将函数转化为可利用基本展开式结果的函数形式，所用的运算主要是加减法运算，数乘运算，复合运算，（逐项）积分运算和（逐项）求导运算。

求幂级数的和函数问题，是将函数展开成幂级数问题的反问题。

**级数展开基本例题（注意基本零部件的组装）**

例 19 求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式,指明收敛域.

[解] $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})(x-1)^n$。收敛域：$|x-1|<1$。

例 20 将 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x_0=1$ 处展开为幂级数，并指明收敛域。

[解] $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-1)^n$，$|x-1|<2$.

例 21 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，试将 $\boldsymbol{f(x)}$ 展成 $x$ 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4^n}$ 的和.

[解] $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2+1}x^{2n},|x\le 1|$，令 $x=1$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4^n}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}。$$

**级数求和基本例题（注意基本零部件的组装）**

例 22 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数 $S(x)$。

[解] $S(x)=xS_1(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$。

例 22-1 设参数 $\boldsymbol{a>1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a^n}}$ 的和为__________ 。

[解] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a^n}}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{(1-a)^2}}$。

例 22-2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和 $S$ 为______， 答案： 3 。

例 23 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和。

[解] $\ln 2$。

例 23-1 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

[解] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$。

例 24 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和。

[解] $S(x)=\frac{2x}{(1+x)^3}$， $|x|<1$。于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}=S(\frac{1}{2})=\frac{8}{27}。$$

注：逐项求导和逐项积分性质是幂级数的两个重要性质，是处理幂级数求和与展开问题的有效手段。

例 25 求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

[解] 设 $s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$，则只需求 $s(\frac{1}{2})$，

$$s(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2 .$$

综合例题

例 26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和 $S$ 为______。

答案：0

例 27 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 点处条件收敛，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1+\frac{1}{2n})^{n^2}$ 是否收敛，若收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛？

[解]级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1+\frac{1}{2n})^{n^2}$ 绝对收敛。

**例 28** 设两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$，记他们交点 X 坐标的绝对值为 $\boldsymbol{a_n}$。

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 $S_n$。（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n}$ 的和。

［解］（1）$S_n = \frac{4}{3}\frac{1}{[n(n+1)]^{\frac{3}{2}}}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3}$。

**例 29** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$ .

［解］

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}, & |x| \in (0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

## 6．6　傅里叶级数

傅里叶级数是刻画周期信号的常用工具。重点是理解傅里叶级数的概念，掌握狄里克雷收敛定理，能写出函数的傅里叶系数、傅里叶级数及其和函数等。

**（1）周期为 $2\pi$ 的傅里叶级数**

三角函数系 $\{1, Cos\,nt, Sin\,nt \mid n = 1,2,\cdots\}$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的正交性：即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}, \quad n = 0,1,2,\cdots; m = 1,2,\cdots$$

**（2）$[-\pi,\pi]$ 上定义的周期函数展开为傅里叶级数**

设函数 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的可积周期函数，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

**傅里叶级数**。记作　$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$。

**当 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的可积奇函数时有正弦级数：** $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$。

$a_n = 0\ (n = 0,1,2,\cdots)$，$b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx\ (n = 1,2,3,\cdots)$。

**而当** $f(x)$ **是周期为** $2\pi$ **的可积偶函数时有余弦级数：** $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 0,1,2,\cdots)$，$b_n = 0\ (n = 0,1,2,\cdots)$。

根据周期函数的性质，傅里叶系数可在任何一个周期长度的区间上积分得到，即

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nxdx，b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nxdx。$$

**（3）傅里叶级数的收敛性**

**狄里克雷收敛定理** 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的可积函数，且满足

（1） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，

（2） $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个单调区间，

则 $f(x)$ 的以 $2\pi$ 为周期的傅里叶级数收敛，且

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))。$$

也就是说，在 $f(x)$ 的连续点处，和函数 $S(x)$ 与函数 $f(x)$ 的值相等；在 $f(x)$ 的第一类间断点处，$S(x)$ 的值等于 $f(x)$ 在此点的左、右极限的平均值。

**（4）周期为 $2l$ 的傅里叶级数**

函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的可积周期函数

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 0,1,2,\cdots)，b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)。$$

周期为 $2l$ 的傅里叶级数的收敛性结论与周期为 $2\pi$ 的傅里叶级数有类似结论。

**（5）周期奇延拓与周期偶延拓 只在 $[0,l]$ 上有定义的函数的傅里叶级数展开**

**周期奇延拓 （正弦级数展开）** $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x$，$x \in [0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $b_n = \dfrac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$。

**周期偶延拓 （余弦级数展开）** $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi}{l}x$，$x \in [0,l]$，（周期为 $2l$ ）。

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n=0,1,2,\cdots)$。

**例 30** 设 $f(x)=\pi x+x^2$ ,$(-\pi\le x\le\pi)$,的付里叶级数为

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中的系数 $b_3$ 的值为（$\frac{2}{3}\pi$）.

$b_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3xdx$ 。

**例 31** 设 $f(x)=x^2,\quad 0\le x<1$ ,而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx,\ n=1,2,\cdots$，则等于 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于（ B ）.

(A) $-\frac{1}{2}$；　(B) $-\frac{1}{4}$；　(C) $\frac{1}{4}$；　(D) $\frac{1}{2}$。

[提示]（方法 1）利用奇延拓画出草图。

（方法 2）利用奇延拓写出函数 $F(x)=\begin{cases}-x^2, & -1<x<0\\ x^2, & 0\le x<1\end{cases}$。

**例 32** 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1/2\\ 2-2x, & 1/2<x<1\end{cases}$, $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi xdx$，则等于 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于（ C ）.

(A) $\frac{1}{2}$。　(B) $-\frac{1}{2}$。　(C) $\frac{3}{4}$。　(D) $-\frac{3}{4}$。

**例 33** 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$,将 $f(x)$ 展成周期 $T=2$ 的正弦级数,则 $S(-\frac{5}{2})$

为（　C　）。

(A) 0。　(B) $\frac{1}{4}$。　(C) $-\frac{1}{4}$。　(D) 1。