《数学一、二、三、四公共内容》

第一章 函数 极限 连续

基本内容

(一) 极限

1. 数列极限的定义 设 $\{u_n\}$ 为一个数列,a 为一个常数.若任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正整数 N,使得 $n>N$ 的一切 u_n 都满足不等式 $|u_n-a|<\varepsilon$,则称 a 为数列 $\{u_n\}$ 当 $n\to\infty$时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$

2. 函数极限的定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 邻域内(点 x_0 可除外)有定义,A 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正数δ,使得满足$0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

左极限和右极限的定义 若对于满足 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$的一切 x 所对应的 $f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$当x自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限,即左(右)极限,分别记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=A \quad \left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A\right)$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

类似地,可以给出当 $x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$ 时,$f(x)$的极限为 A 的定义.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷小.

(2) 无穷大的定义 若对任意给定的$M>0$,都存在一个正数$\delta(N)$,使得满足 $0<|x-x_0|<\delta\left(|x|>N\right)$的一切 x所对应的$f(x)$都满足不等式$|f(x)|>M$,则称 $f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$$

(3) 无穷小与无穷大的关系(以下所讨论的极限,都是在自变量同一变化过程中的极限) 若$\lim f(x)=0(f(x)\neq0)$, 则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$;

若$\lim f(x)=\infty$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(4) 无穷小的阶　设α、β都是无穷小.若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小,记作$\beta=O(\alpha)$;特别地,当$c=1$时,则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$

给定无穷小β,若存在无穷小α,是它们的差$\beta-\alpha$是比α较高阶的无穷小,即

$$\beta-\alpha=o(\alpha)\quad 或\quad \beta=\alpha+o(\alpha)$$

则称α是无穷小β的主部;

若β和$\alpha^k(k>0)$是同阶无穷小,则称β是α的k阶无穷小.

4. 极限的性质

唯一性、有界性、保号性

设$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$

充要条件 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\quad(\lim\alpha=0)$

运算法则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

①分子，分母整体可以换

$\lim[f(x)\bullet g(x)]=\lim f(x)\bullet\lim g(x)$

②一一乘积因子

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq 0)$

③加减号千万不能代

50%

两个准则:夹逼准则;单调有阶数列必有极限

当$x\to 0$　$\sin x\sim x$

两个重要极限:

$e^x-1\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\quad 或\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$\ln(1+x)\sim x$

(二) 连续

1. 函数连续的概念　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.若函数在区间　I　内每一点都连续,则称函数$f(x)$在区间I内连续.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$

2. 间断点的概念　若函数　$f(x)$　在点　x_0不满足下列三个条件之一:$f(x)$在点x_0有定义;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称点　x_0　是函数　$f(x)$　的间断点.

间断点分为:

第一类间断点　左、右极限都存在的间断点;　左、右极限不仅存在而且相等的间断点,　又称为可去间断点;

第二类间断点　左、右极限至少有一个不存在的间断点.

3. 连续函数的运算 性质及初等函数的连续性　若函数　$f(x)$　、$g(x)$　在点　x_0　连续,则　$f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$　、$\frac{f(x)}{g(x)}$　$(g(x_0)\neq 0)$　在点　x_0　也连续:若函数　$u=\varphi(x)$　在点　x_0　连续,函数　$y=f(u)$　在点　$u_0=\varphi(x_0)$连续,则函数　$y=f[\varphi(x)]$　在点　x_0　连续;

初等函数在其定义区间内均连续.

4. 反函数的连续性　设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增(减)的连续函数，其值域为 (A,B)，则必存在反函数 $x = f^{-1}(y)$，且 $x = f^{-1}(y)$ 在 (A,B) 内为单调增(减)的连续函数.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理　闭区间上连续函数必取得最大值和最小值.

(2) 有界性定理　闭区间上连续函数在该区间上有界.

(3) 介值定理　闭区间上连续函数必取得介于它的最大值和最小值之间的一切值.

70% 零点定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $f(a)\cdot f(b)<0$ $f(\xi)=0$

极限不存在 → ① $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ ② 左右极限有一不存在 ③ ∞

基本题型

第一节　极限

10年中考6年

题型一　求极限

(一) 利用极限存在的充要条件　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$

1. 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于2　(B) 等于0　(C) 为∞　(D) 不存在但不为∞ ✓

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 2-1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1} + \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$

$\dfrac{\infty}{\infty} \neq 1$

(二) 利用分子有理化

10年考8年

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$

对于 $\infty-\infty$ ① 分子有理化 ② 若有分母，选通分变为 ③ 提取公因子或利倒

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\sqrt{1+\cdots+n} - \sqrt{1+\cdots+(n-1)}][\sqrt{1+\cdots+n} + \sqrt{1+\cdots+(n-1)}]}{\sqrt{1+\cdots+n} + \sqrt{1+\cdots+(n-1)}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\frac{(n+1)n}{2}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$

（三）利用极限存在准则：

1.设$a_1 = 2, \cdots, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ $(n = 1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，并求之.

$a_{n+1} \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}}$ $=1$ ∴ 数列单调递减 ∴ 极限存在 $\therefore l = 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{a_n^2})$ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$\because a_n \geq 1$ $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ $l = \frac{1}{2}(l + \frac{1}{l})$

2.设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$,

$(n = 1,2,\cdots)$, 证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

定积分积分中值定理100%一定会考

$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$ $\int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $(a \leq \xi \leq b)$

$a_n = f(n) + \sum\limits_{k=1}^{n-1}[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx]$ $= \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$ 广义积分中值定理

$f(n) \geq 0$ $\therefore a_n \geq 0$

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

$a_{n+1} - a_n$

$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0$ $g(x) > 0$

单调递减有下界∴极限存在

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n})$

$\frac{1+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq g(n) \leq \frac{1+\cdots+n}{n^2+n+1}$

$\frac{(n+1)n}{2(n^2+n+n)} \leq g(n) \leq \frac{(1+n)n}{2(n^2+n+1)}$

$\frac{1}{2} \leq g(n) \leq \frac{1}{2}$

$g(n) = \frac{1}{2}$

4.求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3}\ dx$

$\sqrt{3} \leq \sqrt{x+3} \leq 2$

$\sqrt{3}\int_0^1 x^n dx \leq g(x) \leq 2\int_0^1 x^n dx$ $g(x) \to 0$

$\sqrt{3}\frac{1}{n+1} \leq \quad \leq 2\frac{1}{n+1}$

5.求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1$

$1 \leq \quad \leq \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

$= 1$

设 $\ln n^y = \frac{1}{n}\ln n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n^y = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore \lim n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\ln n^y} = e^0 = 1$

6.设函数$S(x)=\int_0^x |\cos t|\ \mathrm{d}t$,

(1)当n为正整数，且 $n\pi \le x<(n+1)\pi$ 时，证明:$2n\le S(x)<2(n+1)$;

(2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

（四）利用等价无穷小量的替换定理:

1.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin x-\tan x}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\tan x}\dfrac{\left(e^{\sin x-\tan x}-1\right)}{\sin x-\tan x}$

$=1$

在求极限过程中极限存在的乘积因子要随时把它的极限求出来。

2.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}$

3.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin^2x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}}$

$=1$

4.$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}\left[\ln 2^x+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)\right]$

$=\cancel{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln 2}{x}}\ 3\ln 2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{x}=3\ln 2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot\frac{1}{2^x}}{x}$

$=3\ln 2$

5.设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A\quad (a>0,a\ne 1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

（五）利用洛必达法则：

1."$\frac{0}{0}$"型未定式　(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{-2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t})dt}{(1+\cos x)\int_0^x\ln(1+t)dt}$　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(I) (II) (III)

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t})dt}{\int_0^x\ln(1+t)dt}=\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\left(\frac{\sin x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{\sin x-x}{2}\right)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\,\frac{\sin x+x}{2}\,\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}=-\frac{1}{2}\times2\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$

$=-\frac{1}{2}\times(-1)\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$

2."$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x\int_2^x\frac{dt}{\ln t}}{x}=1$

3."$\infty-\infty$"型未定式　(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$

(2)设函数$f(x)$在点$x=a$处具有二阶导数，并且$f'(a)\neq 0$ 未说连续

求$\lim\limits_{x\to a}[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}]$

$= \frac{1}{f'(a)} \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)f'(a)-f(x)+f(a)}{[f(x)-f(a)](x-a)} = \frac{1}{f'(a)} \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(a)-f'(x)}{f(x)-f(a)+(x-a)f'(x)}$

$= \frac{1}{f'(a)} \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{f'(a)-f'(x)}{x-a}}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f'(x)} = \frac{-f''(a)}{2[f'(a)]^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

设$x=\frac{1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}[\frac{1}{t}-(\frac{1}{t})^2\ln(1+t)]$

$= \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}$

4.其它类型的未定式

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x \to y$　　另$x=\frac{1}{t}$

$\ln y = x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})$　　$= \frac{1}{t}\ln(\sin 2t+\cos t) = \frac{\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = x\ln(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})$　　原式$=e^2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = y$

$\ln y = \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$

$e^{-\frac{1}{6}}$

$\lim\limits_{x\to 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$= \frac{-1}{6}$

（六）利用定积分的定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$　　$(p\neq -1)$

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p \cdots]\frac{1}{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\cdot\frac{1}{n} = \int_1 \cancel{(\frac{i}{n})^p \frac{1}{n} d_i}$

$\lim \sum (\frac{i}{n})^p \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{\dots}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$ $=\dfrac{2}{\pi}$

（七）其它类型

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})^{n}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi-n\pi)$

$\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

$\downarrow 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+k}$ $=2$

$1^3+2^3+\cdots n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$1^2+2^2+\cdots n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2(n+1)^2}{n^3}-n\right)=\dfrac{1}{2}$

题型二　极限式中常数的确定

1. 设 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求常数$a,b$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$有有限极限值$b$，试求常数$a$及极限值$b$.

$a=4$

$b=10$

3.设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求$a$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\frac{3a}{x-a}}=e^{3a}=8$

$a=\ln 2$

4.已知n为正整数，a为某常数，$a\neq0$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1999}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{a}$,求$n$和$a$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1999}}{nx^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}\cdots-(-1)^n}=\dfrac{1}{a}$

$\begin{cases}n-1=1999\\ a=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=2000\\ a=2000\end{cases}$

5.当α取何值时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ 存在并且非零，并求此极限值.

$\alpha>0$时

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1+x^8}}{\alpha x^{\alpha-1}}$

$=\dfrac{2}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\sqrt{1+x^8}}{x^{\alpha-2}}$

应有 $\alpha-2=4$

$\alpha=6$

$\therefore$极限为$\dfrac{1}{3}$

变限积分

$*\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt$

$=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$

6.设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中$a^2+c^2\neq0$，则必有

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

上下求导

题型三 无穷小的比较

1.设$x\to0$时，$e^{\tan x}-e^x$是x^n同阶无穷小，则n为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2.设$f(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to0$时，$f(x)$是$g(x)$的

(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

3.设$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 \mathrm{d}t$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

第二节 函数的连续性

题型一 分段函数的连续性

1.若$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 3x, & 0\le x<1 \\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\ge 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，求 a 的值.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=e^{2a}-e^{a}+1 \Rightarrow a=\ln 2$

$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

2.设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0 \\ \sqrt{2} & x=0 \\ \dfrac{1}{x-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{b+t^2}}\mathrm{d}t, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求a,b

当$|x|<1$，$f(x)=ax^2+bx$

$|x|>1$，$f(x)=\frac{1}{x}$

$|x|=1$，

$x=1$ $f(x)=\frac{a+b+1}{2}$

$=-1$ $f(x)=\frac{a-b-1}{2}$

题型二 有关极限表示的函数的连续性

1.设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

$a=0$

$b=1$

有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立

$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|$

当$x\in(-\infty,-X)$和$(X,+\infty)$

$|f(x)|\le M_1$

2.已知$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}$　$(x>0)$

(1) 求$f(x)$;　(2) 函数$f(x)$在定义域内是否连续.

题型三　讨论函数的连续性，确定间断点的类型

$f(0)=f(0)+f(0)$

1.若$f(x)$在点$x=0$连续，且$f(x+y)=f(x)+f(y)$对任意的$x,y\in(-\infty,+\infty)$都成立，试证$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

只要 $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$

取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0)+f(\Delta x)]$

$=f(x_0)+f(0)$

$=f(x_0)$.

2.设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\ne1\\ 1, & x=1\end{cases}$，问函数$f(x)$在$x=1$处是否连续？若不连续，修改函数在$x=1$处的定义，使之连续.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sec^2x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi^2}$

∴ 使$x=1$时 $f(x)=\dfrac{4}{\pi^2}$

题型四　闭区间上连续函数的性质

1.若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$，证明在$[a,b]$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=\xi$.

构造辅助函数.

$\varphi(x)=f(x)-x$，由零点定理

$\varphi(a)=f(a)-a<0$　　$\varphi(a)\varphi(b)<0$

$\varphi(b)=f(b)-b>0$　∴存在ξ 使$f(\xi)=\xi$

2.设$f(x)$在$[0,2L]$上连续，且$f(0)=f(2L)$，证明方程$f(x)=f(x+L)$在$[0,L]$内至少有一个根.

$\varphi(x)=f(x+L)-f(x)$　　$\cancel{\varphi(0)\cdot\varphi(L)}<0$

$\varphi(0)=f(L)-f(0)$　　$=f(L)-f(2L)$

$\varphi(L)=f(2L)-f(L)$

∵ $f(0)=f(2L)$

∴ $\varphi(0)=-\varphi(L)$　若$f(0)\ne f(L)$　$\varphi(0)\cdot\varphi(L)<0$ ∴ 则存在一个ξ

若$f(0)=f(L)$ ∴ 0和L就是 $f(x)=f(x+L)$ ∴至少存在两个根

3.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$　(A为常数)，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

$|f(x)|=|f(x)-A+A|$

$\le|f(x)-A|+|A|$

$<\varepsilon+|A|\triangleq M_1$

$\exists X$. 使只要 $|x|>X$ 时
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立

$\because |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|\triangleq m_1$

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-X)$ 和 $(X,+\infty)$ $|f(x)|\le m_1$

取 $m=\max\{m_1,m_2\}$

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时

有 $|f(x)|\le m$

有界

4.设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，且$x\to a^+$时函数$f(x)$的极限存在，则函数$f(x)$在$(a,b]$上有界.

5.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，试证在(a,b)上至少有一个c，使$f(c)=0$.

$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

$x\in(a,a+\delta_1)$

$\therefore f(x)>0$

$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$

$x\in(b-\delta_2,b)$ $f(x)<0$

至少存在一点 $c\in(a,b)$.
使得 $f(c)=0$.