

第一篇：函数、极限、连续

1. 求复合函数表达式

2. 分段函数参与的复合函数求表达式

3. 函数性质的选择题 { 解法: 1. 无穷小, 无穷大

● 主要知识点

★ 函数

一、函数的一些性质

1. 奇偶性

说明: (1) 在直角坐标系中, 偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图像关于原点对称;

(2) 奇函数的导函数是偶函数;

(3) 偶函数的导函数是奇函数;

(4) 奇函数的原函数是偶函数;

(5) 偶函数的原函数不一定是奇函数。

记住: 奇' = 偶
偶' = 奇
奇 = 偶

2. 有界性

定义: 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果存在常数 M , 当 $x \in X$ 时, 恒有 $f(x) \leq M$, 则称

$f(x)$ 在 X 上有上界;

定义: 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果存在常数 m , 当 $x \in X$ 时, 恒有 $f(x) \geq m$, 则称

$f(x)$ 在 X 上有下界;

定义: 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果存在常数 $M > 0$, 当 $x \in X$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$,

则称 $f(x)$ 在 X 上有界;

定义: 设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, 如果对任意常数 $M > 0$, 存在 $x \in X$, 使得 $|f(x)| > M$,

则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

命题 1: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界。

命题 2: 如果存在数列 $\{x_n\} (x_n \in I)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上无界。

说明: (1) 若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 存在极限, 则存在该点的一个去心邻域 U , 在该邻域内

$f(x)$ 有界;

三、无穷大

定义: 任给 $M > 0$, 存在小正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $x \rightarrow x_0$

时, $f(x)$ 是无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

命题: 如果存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ (常数), 则 $x \rightarrow x_0$ 时,

$f(x)$ 不是无穷大。

说明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 任一个邻域内无界, 反之不成立。(即无穷大一定无界, 无界未必是无穷大)

★ 无穷大与无穷小

一、无穷小的判定

函数 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

二、无穷小的性质

1. 有限个无穷小的和、差、积仍然是无穷小;

2. 有界函数与无穷小的积还是无穷小。

三、无穷小比较

定义: 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 是无穷小, 且 $\beta(x) \neq 0$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (c \neq 0 \text{ 为常数})$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小。

四、等价无穷小的替换定理

定理: 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x)$ 都是无穷小, 且 $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x), \beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{\alpha}(x)f(x)}{\tilde{\beta}(x)g(x)}$$

说明: (1) 求极限时, 整个式子的乘、除因子可用其等价无穷小来代换, 加、减时不能用等价无穷小代换, 部分式子的乘除因子也不能用等价无穷小代换;

(2) 几个常用的等价无穷小代换

设 $x \rightarrow x_0$ 时, $u = u(x) \rightarrow 0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时

$$\sin u \sim u, \arcsin u \sim u, \tan u \sim u, \arctan u \sim u$$

$$1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2, \ln(1+u) \sim u, a^u - 1 \sim u \ln a$$

$$e^u - 1 \sim u, (1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$$

五、无穷小的阶

定义: 设 α, β 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 若存在 $k > 0$ 使得 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta^k} = c$ (非零的常数) 则称

$x \rightarrow x_0$ 时 α 是 β 的 k 阶无穷小。

定理: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

七、无穷大与无穷小的关系

命题: 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$

为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

★ 极限

{ 数列 极限
函数 极限 * 未定式求极限

一、数列极限的定义

定义: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ (常数) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$ 。

二、函数在一点存在极限的充要条件

命题: $f(x)$ 在 x_0 处存在极限的充分而且必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左、右极限都存在并且相等。

目的: 5 段函数, 5 段点, 求极限

说明: 函数在一点是否有极限与函数在该点是否有定义无关。

三、极限的性质

1. 保号性 (理解, 常会用, 做题选择)

定理 1: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则存在 x_0 的一个去心邻域, 在该邻域内恒有 $f(x) > 0$

定理 2: 若存在 x_0 的一个去心邻域, 在该邻域内 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ 。

2. 局部有界性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则在 x_0 的某个去心邻域内函数 $f(x)$ 有界。(知道即可)

3. 唯一性

若函数在 x_0 的极限存在, 则极限值是唯一的。(知道即可)

四、极限存在定理 (知道即可)

1. 夹逼定理

设 (1) 在 x_0 的某个去心邻域内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

合意: 若 x_0 在某点邻域内 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
且 $\lim_{x \rightarrow x_0} [h(x) - g(x)] = 0$ 则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 X.

2. 单调有界准则

(1) 单调增加数列, 如有上界, 则该数列必有极限;

(2) 单调减少数列, 如有下界, 则该数列必有极限;

若加上有界 $g(x)$ 极限存在
则成立。

* 若 $x_{n+1} = f(x_n)$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 时, A

(3) 单调不减数列，如有上界，则该数列必有极限；

(4) 单调不增数列，如有下界，则该数列必有极限。

五、洛必达法则

法则一：" $\frac{0}{0}$ "型

设 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或为 ∞

第4版: $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导
则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $x \rightarrow x_0$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

法则二：" $\frac{\infty}{\infty}$ "型

设 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或为 ∞

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

对抽象函数使用洛必达法则

说明：(1) 使用洛必达法则之前应先化简；(等价无穷小代换、如有非零极限值的乘积因子，应先将该因子的极限求出。)

(2) 对 " $\frac{0}{0}$ " 型未定式，如式子中含 $\sin \frac{1}{x}$ 或 $\cos \frac{1}{x}$ 一般不能用洛必达法则；

要用极限的四则运算法则和等价无穷小的性质

(3) 如 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是变上限积分表示的函数，一般要用洛必达法则求极限。

六、海因定理

(数列极限与函数极限关系)

定理： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是：对于任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

利用海因定理，数列极限与函数极限的关系
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ (e 为自然对数的底数)

七、关于极限的几个命题

命题 1: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ ，反之一般不成立；

说明：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ ，则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 。

命题 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$ 。

命题 3: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 则数列 $\{x_n\}$ 有界, 反之不成立

★ 连续、间断

一、函数在一点连续的充要条件

命题: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续同时又右连续。

二、连续函数的运算性质

1. 连续函数的四则运算性质

若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ 在

点 x_0 也连续;

2. 复合函数的连续性

若函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续, 则函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续;

3. 反函数的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内为单调的连续函数, 其值域为 (m, n) , 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在区间 (m, n) 也是连续的。

命题: 一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

说明: 判断 $f(x)$ 在点 x_0 处连续性的方法:

先考虑 $f(x)$ 是否为初等函数, 点 x_0 是否为 $f(x)$ 定义区间内的点。如果上述两条件都满足, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。如果给定函数是分段函数, 点 x_0 为分段点, 则须利用连续性定义来判定; 特别是在分段点两侧函数表达式不同的时候, 考察函数在该点处的连续性应该用左连续、右连续判定。

三、间断点及其分类

1. 间断点定义

设 x_0 的任何邻域内总有异于 x_0 而属于函数 $f(x)$ 的定义域内的点。如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 不满足下列三个条件之一:

$f(x)$ 在点 x_0 有定义; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间

断点。

2. 间断点的分类

第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点; 左右极限都存在且相等的间断点又称为可去间断点; 左右极限都存在且不相等的间断点又称为跳跃间断点。

第二类间断点: 左、右极限至少有一个不存在的间断点; 当 $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$,

又称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点。

说明：如果只要求指明是什么间断点，那么就只需指出是第几类间断点即可。

四、闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则在该区间上至少存在两点 x_1, x_2 ，满足任意的 $x \in [a, b]$ ，

恒有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 。

2. 介值定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续， m, M 是函数在该区间上的最小与最大值，则对任意的

$\mu \in [m, M]$ ，在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ ，满足 $f(\xi) = \mu$

3. 零点定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则在开区间 (a, b) 内至少存在一

点 ξ ，使得 $f(\xi) = 0$

4. 广义零点定理

如果 $f(x)$ 在闭区间 (a, b) 上连续，且满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) < 0$ ，则在开区间 (a, b) 内至

少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi) = 0$

五、关于函数连续常用的命题

命题 1: 如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续；

命题 2: 如 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上连续；

命题 3: 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ ，则在 (a, b) 内至少存在一点

ξ ，使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

● ● 典型题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2+x, & x \leq 0 \\ 2-x, & x > 0 \end{cases}$ ，则 $g[f(x)] =$

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 1+x & 0 \leq x < 1 \\ 3-x & x \geq 1 \end{cases}$$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小量

(B) 无穷大量

(C) 有界量非无穷小量

(D) 无界但非无穷大

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 _____

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数;

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数; X

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数; tan

(D) 当 $f(x)$ 是单增函数时, $F(x)$ 必是单增函数;

奇' = 偶
偶' = 奇
奇 = 偶
偶 = 奇

这题考察的是函数奇偶性 (奇偶性)
(1) 直接由被积函数中的
项的奇偶性判定
变量代换法
(2) 利用公式求导数

1. 设 $g(x) = \int_0^x e^t dt - 1$, $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的

(A) 同阶而非等价无穷小

(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小

(D) 低阶无穷小

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t dt - 1}{\int_0^x \sin(t^2) dt}$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos(e^{x^2} - 1)$ 与 $2^m x^n$ 是等价无穷小, 则 $m = \underline{1}$, $n = \underline{4}$.

3. 设 $f(x)$ 是满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ 的连续函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{\sin^2 x} f(t) dt$ 是关于 x 的 n 阶无穷小, 则 $n = \underline{\quad}$.

4. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, 则 $h \rightarrow 0$ 时, 必有

(A) dy 是 h 的等价无穷小;

(B) dy 是 h 的高阶无穷小;

(C) $\Delta y - dy$ 是比 h 高阶的无穷小

(D) $\Delta y - dy$ 是 h 的同阶无穷小

$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$

5. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \cos x$, $g(x) = \int_0^{\ln(1-x^2)} \sin t dt$, $h(x) = \arcsin x - x$ 都是无穷小量, 按照它们关于 x 的阶数从低到高的顺序排列, 应得到

(A) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$

(B) $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$

(C) $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$

(D) $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$

6. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - (a + b \cos x) \sin x$ 是关于 x 的 5 阶无穷小, 求常数 a, b 的值.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, 若

$af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 确定 a, b 的值.

三

1. 数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a 的充要条件是

(A) 对于任给 $\varepsilon > 0$, 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$ 的只有有限项

(B) 对于任给 $\varepsilon > 0$, 总有相应的项 a_n , $|a_n - a| \geq \varepsilon$

(C) 存在某个正数 ε_0 , 除有限项外, 都有 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$

(D) 存在某个正数 ε_0 , 有无穷多项满足 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必无界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则 () 正确

(A) $x_n > y_n$

(B) $\forall n, x_n \neq y_n$

(C) 存在 N , 使得 $n > N$ 时, $x_n > y_n$

(D) x_n 与 y_n 大小关系不确定。

4. 设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 则 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2e}} [1 + (x-a)]^{\frac{1}{\sin(x-a)}}$ 等于 ()

$\Rightarrow a = \frac{1}{2e}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2e}} (1 + (x - \frac{1}{2e}))^{\frac{1}{\sin(x - \frac{1}{2e})}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2e}} (x - \frac{1}{2e}) \cdot \frac{1}{\sin(x - \frac{1}{2e})}} = e^1 = e$

(A) 1 (B) e (C) 0 (D) a

5. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限值为

(A) 2

(B) 0

(C) ∞

(D) 不存在但也不是 ∞

6. 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} + \sqrt{1 - \cos \frac{4\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 - \cos \frac{2n\pi}{n}} \right]$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} + \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right]$

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] = 1$

$* f(x) = a^{\frac{1}{x}} \quad x \rightarrow 0$
 一定要用左右极限

$\frac{1}{2\pi}$
 数列通项是 n 项和
 $\int_0^1 \sqrt{1 - \cos 2t} dt$

(4) 设 $x_n = \frac{2^n}{n+1} + \frac{2^n}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^n}{n+\frac{1}{n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

先夹逼, 再积分

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \dots (2n-1)}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$

eg: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$ (夹逼定理)

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{1}{n^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2})$

(8) 已知 $x_0 = 0, x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}} (n=1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

① 证明极限存在 (数学归纳法)
② 设极限为 a
 $a = f(a) \Rightarrow a = -$

(9) 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, 求 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}}$

$x_{n+1} = \ln(1+x_n) < x_n$
单调递减

(10) 设 $x_n = n[e(1+\frac{1}{n})^{-n} - 1]$, 其中 n 为自然数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

利用海因定理

7. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$

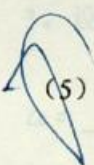
(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{1 - \cos \sqrt{x(1-\cos x)}} = \frac{2}{3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + (1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} = \frac{3}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg(x-t) dt}{\sin 3x \cdot \ln(1+2x)}$

洛一失败

22



(5) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$

先用洛必达法则
再用积分中值定理

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^x + a^{2x} + \dots + a^{nx}}{n} \right]^{\frac{1}{n}}, a > 0, n \in \mathbb{N}$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} [(x-3)e^{-\frac{2}{x}} - x]$

(9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2)$

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x})$

(11) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf'(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$

(12) 设 $f(x)$ 在 $0 < |x| < \delta$ 有定义, 其中 δ 是一个正数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e$, 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{3}{2}$

(13) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}$

13, 10, 15 - 9 级题

(14) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) = 4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$

(15) 已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在 $(0, 0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程,

并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(\frac{2}{n})$

(16) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|})$

(17) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x [\frac{1}{x}]$, 其中 $[\frac{1}{x}]$ 表示不大于 $\frac{1}{x}$ 的最大整数。

8. 求下列极限

(1) 设 $f(x)$ 三阶可导, 且 $f'''(a) \neq 0$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''[a+\theta(x-a)]}{2} (x-a)^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

求 $\lim_{x \rightarrow a} \theta$

(2) 假设 $f(x)$ 具有二次连续导数, 且 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) (0 < \theta < 1), f''(x) \neq 0$,

求: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta =$ 。

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-L, L)$ 连续, 在 $x=0$ 可导, 且 $f'(0) \neq 0$

a). 证明: 对任一给定的 $0 < x < L$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$$

b). 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$

四

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = 2$, 则

(A) $a=1, b=-\frac{5}{2}$

(B) $a=0, b=-2$

(C) $a=0, b=-\frac{5}{2}$

(D) $a=1, b=-2$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 1} - ax - b] = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

3. 确定常数 a, b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x+3x^2) + ax + bx^2}{x^2} = 4$

4. 确定 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0)$

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)], \quad \text{求 } c \text{ 的值.}$$

五

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 则 $x=0$ 是函数 _____ 间断点

(A) $\max\{f(x), g(x)\}$

(B) $\min\{f(x), g(x)\}$

(C) $f(x) - g(x)$

(D) $f(x) + g(x)$

2. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为 $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1+x & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$

(A) 不存在间断点

(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$

(D) 存在间断点 $x=-1$

3. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$, 且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则

$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \beta = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续, 且对一切 x_1, x_2 , 恒有 $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 则 $f(x)$

(A) 仅在 $x=0$ 处连续

(B) 在任意点处连续

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有可去间断点

(D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有跳跃间断点

5. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = a$, 已知

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{a + b \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 求 a, b 的值

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$
 $= 0$

6. 设 $f(x) = \frac{1-x2^{1-x}}{(2-x)(1-x)}$ ($x \neq 1, 2$), 问如何定义 $f(1), f(2)$ 才能保证 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续

续

7. 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x/\tan(x-\frac{\pi}{4})}{4}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判定其类型

8. 求函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\tan t}{\tan x} \right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan t - \tan x)}}$ 的间断点, 并判定间断点的类型

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in [a, b], t_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, 证明: 至少存在

一个 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ 。

10. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$, 证明对任何自然数 n , 存在 $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, 使 $f(x) =$

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

六

1. 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \leq |\sin x|, a_1, a_2, \dots, a_n$ 为实数, 证明

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1.$$

2. 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 而

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。