

# 线性代数 (同济四版) 习题参考答案

黄正华

Email: [huangzh@whu.edu.cn](mailto:huangzh@whu.edu.cn)

武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072



WUHAN UNIVERSITY

# 目 录

第一章	行列式	1
第二章	矩阵及其运算	17
第三章	矩阵的初等变换与线性方程组	33
第四章	向量组的线性相关性	48
第五章	相似矩阵及二次型	69

# 第一章 行列式

课后的习题值得我们仔细研读. 本章建议重点看以下习题: 5.(2), (5); 7; 8.(2). (这几个题号建立有超级链接.) 若您发现有好的解法, 请不吝告知.

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8 - 0 \times 1 \times 3 - 2 \times (-1) \times 8 - 1 \times (-4) \times (-1) \\ &= -24 + 8 + 16 - 4 \\ &= -4. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - bbb - aaa - ccc = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2 = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - y^3 - (x+y)^3 - x^3 \\ &= 3xy(x+y) - y^3 - 3x^2y - 3y^2x - x^3 - y^3 - x^3 \\ &= -2(x^3 + y^3). \end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;

(2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1;

(4) 2 4 1 3;

(5) 1 3  $\cdots$  (2n-1) 2 4  $\cdots$  (2n);

(6) 1 3  $\cdots$  (2n-1) (2n) (2n-2)  $\cdots$  2.

解

(1) 逆序数为 0.

(2) 逆序数为 4: 4 1, 4 3, 4 2, 3 2.

(3) 逆序数为 5: 3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1.

(4) 逆序数为 3: 2 1, 4 1, 4 3.

(5) 逆序数为  $\frac{n(n-1)}{2}$ :

3 2 ..... 1 个  
 5 2, 5 4 ..... 2 个  
 7 2, 7 4, 7 6 ..... 3 个  
 .....  
 $(2n-1) 2, (2n-1) 4, (2n-1) 6, \dots, (2n-1) (2n-2)$  .....  $(n-1)$  个

(6) 逆序数为  $n(n-1)$ :

3 2 ..... 1 个  
 5 2, 5 4 ..... 2 个  
 7 2, 7 4, 7 6 ..... 3 个  
 .....  
 $(2n-1) 2, (2n-1) 4, (2n-1) 6, \dots, (2n-1) (2n-2)$  .....  $(n-1)$  个  
 4 2 ..... 1 个  
 6 2, 6 4 ..... 2 个  
 .....  
 $(2n) 2, (2n) 4, (2n) 6, \dots, (2n) (2n-2)$  .....  $(n-1)$  个

3. 写出四阶行列式中含有因子  $a_{11}a_{23}$  的项.

解: 由定义知, 四阶行列式的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4},$$

其中  $t$  为  $p_1 p_2 p_3 p_4$  的逆序数.

由于  $p_1 = 1, p_2 = 3$  已固定,  $p_1 p_2 p_3 p_4$  只能形如 13□□, 即 1324 或 1342. 对应的逆序数  $t$  分别为

$$0 + 0 + 1 + 0 = 1, \text{ 或 } 0 + 0 + 0 + 2 = 2.$$

所以,  $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$  和  $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$  为所求.

4. 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 - 10r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+15r_2]{r_4+7r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 17 \times 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -adfbce \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第 3 行}} (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd + ab + cd + ad + 1.$$

5. 证明:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

证明:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{分裂开}]{\text{按第1列}} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{裂开}]{\text{再次}} a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{裂开}]{\text{再次}} a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
& = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

此题有一个“经典”的解法:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix} \\
& = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \\
& = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

这个解法“看上去很美”,实则是一个错解!我们强调,行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

证明:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \\
& \xrightarrow[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{两列成比例}} 0.
\end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

证明:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,3,4]{c_j - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{展开 } r_1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix} \\ & = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{展开 } r_1} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix} \\ & = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d). \end{aligned}$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证明: 方法一. 设法把主对角线上的  $x$  变为 0, 再按第一列展开.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{c_{n-1}+xc_n} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \underline{\underline{c_{n-2}+xc_{n-1}}} \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{array} \right| \\
& \begin{array}{c} \underline{\underline{c_j+xc_{j-1}}} \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & & & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ & & 0 & & & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{array} \right| \\
& = (x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)(-1)^{n+1} \left| \begin{array}{cccc} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right| \\
& = (x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\
& = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
\end{aligned}$$

方法二. 设法把  $-1$  全部变为  $0$ , 得到一个下三角矩阵.

若  $x = 0$ , 则  $D_n = a_n$ . 等式成立.

若  $x \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned}
& D_n \begin{array}{c} \underline{\underline{c_2+\frac{1}{x}c_1}}} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{array} \right| \\
& \begin{array}{c} \underline{\underline{c_3+\frac{1}{x}c_2}}} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} x & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{array} \right| \\
& = \cdots \\
& = \left| \begin{array}{cccccc} x & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{array} \right|
\end{aligned}$$

这里,

$$P_2 = a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-2}},$$

$$P_1 = x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n = x^{n-1} \cdot P_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

方法三. 用递归法证明. 记

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} D_n &\stackrel{\text{展开 } c_1}{=} x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} + a_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= x D_{n-1} + a_n (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} = x D_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

所以,  $D_n = x D_{n-1} + a_n$ . 由此递归式得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

方法四. 按最后一行展开. 先看  $a_{n-i}$  的代数余子式. 因为

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & & & & & \\ & x & -1 & & & & \\ & & x & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & x & & \\ \hline & & & & -1 & x & -1 \\ & & & & & x & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & x & -1 \\ \hline a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & a_{n-i} & a_{n-(i+1)} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

划掉  $a_{n-i}$  所在的行和所在的列, 左上角是  $i \times i$  的方块, 右下角是  $(n-i-1) \times (n-i-1)$  的方块, 余下全为 0.

则  $a_{n-i}$  的代数余子式为 (注意到  $a_{n-i}$  处在第  $n$  行、 $i+1$  列)

$$(-1)^{n+i+1} \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i \times i} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1) \times (n-i-1)} = x^i$$

所以,  $D_n$  按最后一行展开, 得到

$$D_n = a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \cdots + a_{n-i} x^i + \cdots + a_2 x^{n-2} + (x + a_1) x^{n-1}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

方法五. 针对  $c_1$  作变换.

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\underline{\underline{c_1 + xc_2}}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\underline{\underline{c_1 + x^2c_3}}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} \\
 &= \cdots \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

这里,  $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$ .

再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

6. 设  $n$  阶行列式  $D = \det(a_{ij})$ , 把  $D$  上下翻转、或逆时针旋转  $90^\circ$ 、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明  $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ,  $D_3 = D$ .

证明:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{\text{\underline{\underline{n-1 次行的相邻互换}}}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{\substack{n-2 \text{ 次行的相邻互换} \\ (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots \\ & = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \cdots (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D. \end{aligned}$$

同理可证

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D = (-1)^{n(n-1)} D = D.$$

7. 计算下列各行列式 ( $D_k$  为  $k$  阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}, \text{ 其中对角线上元素都是 } a, \text{ 未写出的元素都是 } 0;$$

解: 方法一. 将  $c_n$  作  $n-1$  次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

再将  $r_n$  作  $n-1$  次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} = (a^2 - 1)a^{n-2}.$$

方法二.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + 1 \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1} \times 1 \times (-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \\ & = a^n - a^{n-2}. \end{aligned}$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

解: 方法一. 将第一行乘  $(-1)$  分别加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法二. 将各列都加到第一列得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以  $(-1)$  分别加到其余各行, 得

$$D_n = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法三. 升阶法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \xrightarrow[\substack{r_i - r_1 \\ i=2,3,\dots}]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

若  $x = a$ , 则  $D_n = 0$ . 若  $x \neq a$ , 则将  $\frac{1}{x-a}c_j$  加到  $c_1, j = 2, 3, \dots, n+1$ :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$$= \left(1 + \frac{na}{x-a}\right) (x-a)^n = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \text{ (提示: 利用范德蒙德行列式的结果.) }$$

解: 从第  $n+1$  行开始, 第  $n+1$  行经过  $n$  次相邻对换, 换到第 1 行; 第  $n$  行经  $(n-1)$  次对换换到第 2 行. 经  $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  次行交换, 得 (或者直接由题 6 的结论)

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此行列式为范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法知, 这里的  $a = x_1, a-1 = x_2, \dots, a-(n-1) = x_n, a-n = x_{n+1}$ . 则  $x_i = a - (i-1), x_j = a - (j-1)$ . 所以

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [(a-i+1) - (a-j+1)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [-(i-j)] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j) \\ &= \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j). \end{aligned}$$

$$(4) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & 0 & & b_n \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & a_1 & b_1 & 0 \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_n & & 0 & & d_n \end{vmatrix};$$

解: 方法一. 将  $c_{2n}$  作  $2n-1$  次列的相邻对换, 移到第二列; 再将  $r_{2n}$  作  $2n-1$  次行的相邻对换, 移到

第二行:

$$D_{2n} = (-1)^{2n-1}(-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} a_n & b_n & & & & \\ c_n & d_n & & & & \\ & & a_{n-1} & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_1 & b_1 \\ & & & & c_1 & d_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

又  $n=1$  时  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$ , 所以

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i).$$

这个方法与教材 P.15 的例 11 相同. 本题的第 (1) 小题也用到了此方法.

方法二.

$$D_{2n} \xrightarrow{\text{展开 } r_1} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_1 & b_1 & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & \vdots & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_{2n-1}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}.$$

由此得递推公式:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

即  $D_{2n} = \prod_{i=2}^n (a_i d_i - b_i c_i) D_2$ .

而  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$ , 得  $D_{2n} = \prod_{i=1}^n (a_i d_i - b_i c_i)$ .

(5)  $D_n = \det(a_{ij})$ , 其中  $a_{ij} = |i-j|$ ;

解: 由  $a_{ij} = |i-j|$  得

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} \overline{\overline{r_i - r_{i+1}}} \\ i=1,2,\dots \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
& \begin{array}{c} \overline{\overline{c_j + c_1}} \\ j=2,3,\dots \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

解: 升阶法.

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
& \begin{array}{c} \overline{\overline{r_i - r_1}} \\ i=2,3,\dots \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
& \begin{array}{c} \overline{\overline{c_1 + \frac{1}{a_1} c_2}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
& \begin{array}{c} \overline{\overline{c_1 + \frac{1}{a_j} c_{j+1}}} \\ j=2,3,\dots \end{array} \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \\
& = (a_1 a_2 \cdots a_n) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).
\end{aligned}$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix} = -142.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ -2 & -3 & 5 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ 0 & -5 & -18 \\ -2 & 5 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -4 & 0 & 10 \\ 23 & 0 & -22 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 11 \\ 0 & 0 & 39 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -284 \end{vmatrix} = -284;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142.$$

所以,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 & = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = 0, \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 & = 0, \\ x_4 + 5x_5 & = 1. \end{cases}$$

解: 系数行列式

$$\begin{aligned} D_{5 \times 5} &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & & & \\ 1 & 5 & 6 & & \\ & 1 & 5 & 6 & \\ & & 1 & 5 & 6 \\ & & & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_1} 5D_{4 \times 4} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{4 \times 4} - 6 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

由递归式  $D_{5 \times 5} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3}$  知,

$$D_{3 \times 3} = 5D_{2 \times 2} - 6D_{1 \times 1} = 5(25 - 6) - 6 \times 5 = 65,$$

$$D_{4 \times 4} = 5D_{3 \times 3} - 6D_{2 \times 2} = 5 \times 65 - 6 \times 19 = 211,$$

$$D_{5 \times 5} = 5D_{4 \times 4} - 6D_{3 \times 3} = 5 \times 211 - 6 \times 65 = 665.$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_1} D_{4 \times 4} + \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= D_{4 \times 4} + 6^4 = 211 + 6^4 = 1507.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_2} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{5+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_2} -D_{3 \times 3} - 5 \times 6^3 = -65 - 1080 = -1145.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_3} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{5+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_2} D_{2 \times 2} - 6 \times 6 \times D_{2 \times 2} = 703.$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_4} (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{5+4} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{展开 } c_4} -5 - 6D_{3 \times 3} = -5 - 6 \times 65 = -395.$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开 } c_5} (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + D_{4 \times 4} = 1 + 211 = 212.$$

所以,

$$x_1 = \frac{1507}{665}, \quad x_2 = -\frac{1145}{665}, \quad x_3 = \frac{703}{665}, \quad x_4 = -\frac{395}{665}, \quad x_5 = \frac{212}{665}.$$

9. 问  $\lambda, \mu$  取何值时, 齐次线性方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$  有非零解?

解: 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = \mu(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu(1-\lambda).$$

要使齐次线性方程组有非零解, 则  $D=0$ , 即

$$\mu(1-\lambda)=0,$$

得  $\mu=0$  或  $\lambda=1$ .

10. 问  $\lambda$  取何值时, 齐次线性方程组 
$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 & -2x_2 & +4x_3=0, \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2 & & +x_3=0, \\ x_1 & +x_2+(1-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$
 有非零解?

解: 系数矩阵

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3+\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3) - 4(1-\lambda) + (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)(-3+\lambda) \\ &= (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda)^2 + \lambda - 3 \\ &= \lambda(\lambda-2)(3-\lambda). \end{aligned}$$

齐次线性方程组有非零解, 则  $D=0$ , 即

$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda)=0.$$

得  $\lambda=0$ ,  $\lambda=2$  或  $\lambda=3$ .

## 第二章 矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量  $x_1, x_2, x_3$  到变量  $y_1, y_2, y_3$  的线性变换.

解: 方法一. 用消元法解方程, 得出  $y_1, y_2, y_3$ . 略.

方法二. 解矩阵方程. 由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

方法三. 用克拉默法则解方程. 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{c_2-2c_3}{c_2-2c_3}]{} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

所以,

$$y_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 5 \\ x_3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3;$$

同理得  $y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$ ,  $y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$ .

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从  $z_1, z_2, z_3$  到  $x_1, x_2, x_3$  的线性变换.

解: 方法一. 直接代入. 比如:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + y_3 \\ &= 2(-3z_1 + z_2) + (-z_2 + 3z_3) \\ &= -6z_1 + z_2 + 3z_3. \end{aligned}$$

方法简单, 但我们应尽可能使用本章学习的矩阵知识.

方法二. 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

3. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,

求  $3AB - 2A$  及  $A^T B$ .

解:

$$\begin{aligned} 3AB - 2A &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}. \\ A^T B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2);$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

解: (1)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 7 + 3 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 7 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 \\ 5 \times 7 + 7 \times 2 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}.$

(2)  $(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10) = 10.$

(3)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2) = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 2 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

(4)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$

(5)  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

(6)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$

5. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 问:

(1)  $AB = BA$  吗?

(2)  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  吗?

(3)  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  吗?

解: (1) 因为

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

所以,

$$AB \neq BA.$$

(2) 因为

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

故

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

(3) 因为

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

当然, 一个简单的说法是, 在得到  $AB \neq BA$  之后, 直接有

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \\ (A+B)(A-B) &= A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2. \end{aligned}$$

6. 举反例说明下列命题是错误的:

- (1) 若  $A^2 = O$ , 则  $A = O$ ;
- (2) 若  $A^2 = A$ , 则  $A = O$  或  $A = E$ ;
- (3) 若  $AX = AY$ , 且  $A \neq O$ , 则  $X = Y$ .

解: (1) 取  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = O$ , 但  $A \neq O$ .

(2) 取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = A$ , 但  $A \neq O$  且  $A \neq E$ .

(3) 取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$AX = AY$  且  $A \neq O$  但  $X \neq Y$ .

题 5 和题 6 看上去很简单, 实则是再次提醒我们注意矩阵运算不满足交换律, 不满足零律, 不满足消去律. 这是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点“相同”而忘记二者本质的不同.

这种不同的讨论范围里的“加法”、“乘法”, 还有很多很多, 在现代数学里非常广泛和一般.

7. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ . 求  $A^2, A^3, \dots, A^k$ .

解: 由计算

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

猜测:  $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix}$ . 下用数学归纳法证明.

当  $n=1$  时, 显然成立. 假设  $n=k$  时成立, 则  $n=k+1$  时

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知:  $\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$ .

8. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{A}^k$ .

解: 方法一. 首先计算

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{猜测: } \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \quad (n \geq 2).$$

下用数学归纳法证明:

当  $n=2$  时, 显然成立.

假设  $n=k$  时成立, 则  $n=k+1$  时

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{由数学归纳法得证: } \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

上面的猜测其实是不容易得到的. 这里另有一个解法.

方法二. 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \lambda \mathbf{E} + \mathbf{B}.$$

则<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n \\ &= (\lambda \mathbf{E})^n + C_n^1 (\lambda \mathbf{E})^{n-1} \mathbf{B} + C_n^2 (\lambda \mathbf{E})^{n-2} \mathbf{B}^2 + \cdots + \mathbf{B}^n. \end{aligned}$$

注意到

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{B}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (k \geq 3).$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n \\ &= (\lambda \mathbf{E})^n + C_n^1 (\lambda \mathbf{E})^{n-1} \mathbf{B} + C_n^2 (\lambda \mathbf{E})^{n-2} \mathbf{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵, 且  $\mathbf{A}$  为对称矩阵, 证明  $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$  也是对称矩阵.

证明: 即要证  $(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ .

已知  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , 由公式  $(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  知

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T &= ((\mathbf{B}^T \mathbf{A}) \mathbf{B})^T \\ &= \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{A})^T \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

得证  $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$  是对称阵.

10. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是  $n$  阶对称矩阵, 证明  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  是对称矩阵的充分必要条件是  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$ .

证明: 已知  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \mathbf{B}^T = \mathbf{B}$ , 要证

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{A} \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}.$$

<sup>1</sup>注意对一般的矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , 并不能对  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$  得到牛顿二项式展开式. 比如最简单的情形

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B}^2,$$

我们就知道其不一定成立. 除非  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  可交换. 而这里的  $\lambda \mathbf{E}, \mathbf{B}$  当然是可交换的.

充分性: 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . 又

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA},$$

所以,  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ . 即  $\mathbf{AB}$  是对称矩阵.

必要性:  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ . 又

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA},$$

所以,  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

解: (1) 由  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $|\mathbf{A}| = 1 \neq 0$ , 所以  $\mathbf{A}$  可逆. 又

$$A_{11} = 5, \quad A_{21} = 2 \times (-1), \quad A_{12} = 2 \times (-1), \quad A_{22} = 1.$$

得

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

$$\text{故 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

建议记住教材 P.44 例 10 的结论:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

其中  $ad - cb \neq 0$ .

$$(2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

解:  $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1$ , 由上述结论得

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

解:  $|\mathbf{A}| = 2$ , 故  $\mathbf{A}^{-1}$  存在. 又

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -4, & A_{21} = 2, & A_{31} = 0, \\ A_{12} = -13, & A_{22} = 6, & A_{32} = -1, \\ A_{13} = -32, & A_{23} = 14, & A_{33} = -2. \end{array}$$

故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

解: 由对角矩阵的性质知

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{解: } (1) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

解: (1) 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解: 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

14. 设  $A^k = O$  ( $k$  为正整数), 证明

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

证明: 验证

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E$$

即可. 下略.

15. 设方阵  $A$  满足  $A^2 - A - 2E = O$ , 证明  $A$  及  $A + 2E$  都可逆, 并求  $A^{-1}$  及  $(A + 2E)^{-1}$ .

证明: 直接求逆即可.

由  $A^2 - A - 2E = O$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A(A - E) = 2E \\ &\Rightarrow A \left[ \frac{1}{2}(A - E) \right] = E \\ &\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E). \end{aligned}$$

又由  $A^2 - A - 2E = O$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (A + 2E)A - 3(A + 2E) = -4E \\ &\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) = -4E \\ &\Rightarrow (A + 2E) \left[ -\frac{1}{4}(A - 3E) \right] = E \\ &\Rightarrow (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A). \end{aligned}$$

这类题目的解法就是要“凑”出要求逆的式子. 比如本题, 要从  $A^2 - A - 2E = O$  中凑出式子  $A + 2E$ .

16. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $|A| = \frac{1}{2}$ , 求  $|(2A)^{-1} - 5A^*|$ .

解: 由

$$\begin{aligned} |A| |(2A)^{-1} - 5A^*| &= |A(2A)^{-1} - 5AA^*| && (|AB| = |A||B|) \\ &= \left| \frac{1}{2}AA^{-1} - 5AA^* \right| && ((\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}) \\ &= \left| \frac{1}{2}E - 5|A|E \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}E - \frac{5}{2}E \right| && (|A| = \frac{1}{2}) \\ &= |-2E| \\ &= (-2)^3 |E| && (|kA| = k^n |A|) \\ &= -8. \end{aligned}$$

得

$$|(2A)^{-1} - 5A^*| = -16.$$

17. 设矩阵  $A$  可逆, 证明其伴随矩阵  $A^*$  也可逆, 且  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

证明: 验证  $A^*(A^{-1})^* = E$  即可.

因为

$$(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^* = |A^{-1}| E,$$

而

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad \text{即 } A^* = |A| A^{-1},$$

所以

$$A^*(A^{-1})^* = |A| A^{-1} (A^{-1})^* \quad (A^* = |A| A^{-1})$$

$$= |\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{E} \\ = \mathbf{E}.$$

$$((\mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}^{-1})^* = |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{E}) \\ (|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}| = 1)$$

得证矩阵  $\mathbf{A}^*$  可逆, 且  $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$ .

18. 设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵为  $\mathbf{A}^*$ , 证明:

(1) 若  $|\mathbf{A}| = 0$ , 则  $|\mathbf{A}^*| = 0$ ;

(2)  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ .

证明: (1) 用反证法证明. 假设  $|\mathbf{A}^*| \neq 0$ , 则有  $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{E}$ .

由此得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A} \mathbf{A}^* (\mathbf{A}^*)^{-1} & (\mathbf{A}^* (\mathbf{A}^*)^{-1} &= \mathbf{E}) \\ &= |\mathbf{A}| \mathbf{E} (\mathbf{A}^*)^{-1} & (\mathbf{A} (\mathbf{A}^*) &= |\mathbf{A}| \mathbf{E}) \\ &= \mathbf{O}. & (|\mathbf{A}| &= 0) \end{aligned}$$

这与  $|\mathbf{A}^*| \neq 0$  矛盾, 故当  $|\mathbf{A}| = 0$  时有  $|\mathbf{A}^*| = 0$ .

(2) 由  $\mathbf{A} \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$  取行列式得到:

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}| \mathbf{E}| = |\mathbf{A}|^n.$$

若  $|\mathbf{A}| \neq 0$  则  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ .

若  $|\mathbf{A}| = 0$  由 (1) 知  $|\mathbf{A}^*| = 0$  此时命题也成立.

故有

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}.$$

19. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ , 求  $\mathbf{B}$ .

解: 由  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$  得

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

故

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}$ . 求  $\mathbf{B}$ .

解: 由

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{E} &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{B} \\ \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{B} - \mathbf{B} &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} \\ \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{E}) \mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{E}), \end{aligned}$$

又

$$|\mathbf{A} - \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

知  $A - E$  可逆. 所以

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. 设  $A = \text{diag}(1, -2, 1)$ ,  $A^*BA = 2BA - 8E$ . 求  $B$ .

解: 由  $A = \text{diag}(1, -2, 1)$  知  $A$  可逆, 且

$$|A| = -2.$$

由

$$\begin{aligned} A^*BA &= 2BA - 8E \\ \Rightarrow A^*B &= 2B - 8A^{-1} && (\text{上式两边右乘 } A^{-1}) \\ \Rightarrow |A|B &= 2AB - 8E && (\text{上式两边左乘 } A) \\ \Rightarrow -2B &= 2AB - 8E && (|A| = -2) \\ \Rightarrow (A + E)B &= 4E, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (A + E) &= \text{diag}(2, -1, 2), \\ (A + E)^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

所以

$$B = 4(A + E)^{-1} = \text{diag}(2, -4, 2).$$

22. 已知矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ . 求  $B$ .

解: 解法与上题相似.

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= BA^{-1} + 3E \\ \Rightarrow AB &= B + 3A && (\text{上式两边右乘 } A) \\ \Rightarrow |A|B &= A^*B + 3|A|E && (\text{上式两边左乘 } A^*) \\ \Rightarrow (|A|E - A^*)B &= 3|A|E \end{aligned}$$

由公式  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 又计算得  $|A^*| = 8$ , 所以

$$|A|^3 = 8, \text{ 即 } |A| = 2.$$

得

$$(2E - A^*)B = 6E.$$

又

$$2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

所以

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. 设  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 其中  $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{11}$ .

解:  $P^{-1}AP = \Lambda$  故  $A = P\Lambda P^{-1}$ . 所以

$$A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}.$$

又

$$|P| = 3, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^{11} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}.$$

24. 设  $AP = P\Lambda$ , 其中  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ , 求  $\varphi(A) = A^8(5E - 6A + A^2)$ .

解: 由题设得  $A = P\Lambda P^{-1}$ , 注意到  $\Lambda$  为对角阵, 则  $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ . 又

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= 5A^8 - 6A^9 + A^{10} \\ &= P(5\Lambda^8 - 6\Lambda^9 + \Lambda^{10})P^{-1}. \end{aligned}$$

由  $\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 5)$ , 则

$$\begin{aligned} \Lambda^8 &= \text{diag}(1, 1, 5^8), \\ \Lambda^9 &= \text{diag}(-1, 1, 5^9), \\ \Lambda^{10} &= \text{diag}(1, 1, 5^{10}), \\ 5\Lambda^8 - 6\Lambda^9 + \Lambda^{10} &= \text{diag}(12, 0, 0). \end{aligned}$$

25. 设矩阵  $A, B$  及  $A + B$  都可逆, 证明  $A^{-1} + B^{-1}$  也可逆, 并求其逆阵.

证明: 由  $A, B$  及  $A + B$  都可逆,  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ,  $BB^{-1} = B^{-1}B = E$ , 得

$$\begin{aligned} A^{-1} + B^{-1} &= A^{-1}E + EB^{-1} \\ &= A^{-1}BB^{-1} + A^{-1}AB^{-1} \\ &= A^{-1}(B + A)B^{-1} \\ &= A^{-1}(A + B)B^{-1}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} &= [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}]^{-1} \\&= (\mathbf{B}^{-1})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} \\&= \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}.\end{aligned}$$

26. 计算  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

解:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

27. 取  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = -\mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 验证

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix}.$$

解: 因为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow[r_2-r_4]{r_1-r_3} \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| = 4,$$

而

$$\begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & |\mathbf{B}| \\ |\mathbf{C}| & |\mathbf{D}| \end{vmatrix}.$$

28. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \mathbf{O} \\ 4 & -3 & \\ \mathbf{O} & 2 & 0 \\ & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $|\mathbf{A}^8|$  及  $\mathbf{A}^4$ .

解: 记  $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

则

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^8 = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{aligned} |A^8| &= |A_1^8| |A_2^8| = |A_1|^8 |A_2|^8 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^8 \\ &= 10^{16}. \end{aligned}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & O \\ 0 & 5^4 & O \\ O & 2^4 & 0 \\ O & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

29. 设  $n$  阶矩阵  $A$  及  $s$  阶矩阵  $B$  都可逆, 求

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1};$$

解: 设

$$\begin{pmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{s \times s} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

其中  $C_1$  为  $s \times n$  矩阵,  $C_2$  为  $s \times s$  矩阵,  $C_3$  为  $n \times n$  矩阵,  $C_4$  为  $n \times s$  矩阵. 又

$$\begin{pmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{s \times s} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{cases} AC_3 = E_n & \Rightarrow C_3 = A^{-1}, \\ AC_4 = O & \Rightarrow C_4 = O, & (A^{-1} \text{ 可逆}) \\ BC_1 = O & \Rightarrow C_1 = O, & (B^{-1} \text{ 可逆}) \\ BC_2 = E_s & \Rightarrow C_2 = B^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1};$$

解: 设

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = E.$$

又

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & AA_2 \\ CA_1 + BA_3 & CA_2 + BA_4 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}_1 = \mathbf{E} & \Rightarrow \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_2 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{A}_2 = \mathbf{O}, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{A}_3 = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{A}_3 = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{A}_4 = \mathbf{E} & \Rightarrow \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

30. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

解: 由分块对角阵的性质知

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ & & 8 & 3 \\ & & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \\ & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ -2 & 5 & & \\ & & 2 & -3 \\ & & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

解: 记  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . 又

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

### 第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

本章的重要题型有两个:

- 解矩阵方程的新方法, 习题 4, 5. 例题见教材 P.65 例 3.
- 方程组解的讨论, 习题 15, 16, 17. 例题见教材 P.76 例 12.

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div (-2)]{r_2 \div (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + r_3]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 \times 2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + 3r_2]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \div 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_2 - 3r_1, r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 \div (-5)]{r_2 \div (-4), r_3 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_1 - 3r_2, r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_1 - 2r_2, r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 8r_1 \\ r_4 - 7r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \times (-1) \\ r_4 - r_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} r_2 + r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2. 设  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{A}$ .

解: 可以按照求矩阵方程的一般方法求解.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

或者下面的解法.

记  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ . 注意到  $\mathbf{A}$  两边乘以的是初等矩阵, 可知矩阵  $\mathbf{B}$  是把  $\mathbf{A}$  进行初等变换  $r_1 \leftrightarrow r_2$

和  $c_3 + c_1$  得到的. 所以要得到  $\mathbf{A}$ , 需要将  $\mathbf{B}$  进行初等变换  $c_3 - c_1$  和  $r_1 \leftrightarrow r_2$ . 即

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

还有一种看法是把  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  变为单位阵, 这相当于在  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

两边分别左乘、右乘了相应的初等矩阵, 那么矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  也要进行相应的行变换、列变换, 即:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & \text{(两边同时 } r_1 \leftrightarrow r_2) \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} & \text{(两边同时 } c_3 - c_1) \\ \Rightarrow & \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & | & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即逆矩阵为  $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} (2) & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & | & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} r_3 - 4r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_4 + 2r_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right) \\
& \begin{array}{l} r_3 - r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_1 + 2r_4 \end{array} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 4 & 2 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_3 \\ r_1 + 3r_3 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

故逆矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$ .

4. (1) 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $AX = B$ ;

(2) 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $XA = B$ .

解: (1)

$$\begin{aligned}
(A, B) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_1 - r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ r_3 \times (-1) \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

所以

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & - & - & - \\ 1 & 2 & 3 & - & - & - \\ 2 & -3 & 1 & - & - & - \end{array} \right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & - & - & - \\ 3 & 2 & 1 & - & - & - \\ 1 & -3 & 2 & - & - & - \end{array} \right) \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & 11 & -3 & - & - & - \\ 3 & -4 & 1 & - & - & - \\ 1 & -5 & 2 & - & - & - \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - 2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} c_2 - c_3 \\ c_1 - 4c_3 \\ c_3 \times (-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -4 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{c_1 - 3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

所以

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

本题解法与教材 P.65 例 3 相同, 是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型. 在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

已知  $AX = B$ , 所以  $X = A^{-1}B$ .

因为  $A$  是否可逆, 此时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

5. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $AX = 2X + A$ , 求  $X$ .

解: 由  $AX = 2X + A$  得

$$\begin{aligned}
AX - 2X &= A \\
(A - 2E)X &= A
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
(A - 2E, A) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{r_3 + r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{r_2 + r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{r_1 + r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \times (-1)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

所以

$$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 在秩是  $r$  的矩阵中, 有没有等于 0 的  $r-1$  阶子式? 有没有等于 0 的  $r$  阶子式?

解: 由矩阵秩的定义, 在秩是  $r$  的矩阵中, 至少存在一个不等于 0 的  $r$  阶子式, 而且所有阶数高于  $r$  的子式全等于 0. 由此可知, 在秩是  $r$  的矩阵中, 可能存在等于 0 的  $r-1$  阶子式 (但是不能全等于 0), 也可能存在等于 0 的  $r$  阶子式.

例如,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $R(A) = 3$ , 其中存在等于 0 的 3 阶子式和 2 阶子式.

7. 从矩阵  $A$  中划去一行得到矩阵  $B$ , 问  $A, B$  的秩的关系怎样?

解: 不妨把题设改为: 从矩阵  $A$  中划去一行得到矩阵  $B$ .

记划去的那一列为  $a$ , 则

$$A \sim (B, a).$$

从而,

$$R(A) = R(B, a).$$

由矩阵秩的性质 5,

$$R(B) \leq R(B, a) \leq R(B) + 1,$$

所以,

$$R(B) \leq R(A) \leq R(B) + 1.$$

即,  $R(A)$  等于  $R(B)$  或者  $R(B) + 1$ .

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 0, 0).$$

解: 符合条件的矩阵有很多, 比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这两个矩阵容易分别变换为行阶梯型、列阶梯型矩阵, 非零行有 4 行.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - r_1 \\ r_2 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2;

二阶子式  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ , 为一个最高阶非零子式.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 - 7r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2;

二阶子式  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ , 为一个最高阶非零子式.

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_4]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \div 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 3;

三阶子式  $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$ , 为一个最高阶非零子式.

10. 设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 证明  $A \sim B$  的充分必要条件是  $R(A) = R(B)$ .

证明: 必要性即教材 P.68 定理 3. 只需证明充分性.

设  $R(A) = r$ , 则  $A$  的标准型矩阵为  $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 即

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

同样,  $B$  的标准型矩阵也为  $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 即

$$B \sim \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

由矩阵等价的传递性, 得

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}.$$

11. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

问  $k$  为何值, 可使

$$(1) R(\mathbf{A}) = 1;$$

$$(2) R(\mathbf{A}) = 2;$$

$$(3) R(\mathbf{A}) = 3.$$

解:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \div 3]{c_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - kr_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以, 当  $k \neq 1$  且  $k \neq -2$  时,  $R(\mathbf{A}) = 3$ .

$$\text{当 } k = 1 \text{ 时, } \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(\mathbf{A}) = 1.$$

$$\text{当 } k = -2 \text{ 时, } \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(\mathbf{A}) = 2.$$

另解: 由  $|\mathbf{A}| \neq 0$  时,  $R(\mathbf{A}) = 3$ , 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{\frac{r_3-kr_1}{r_2+r_1}} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{r_3-r_2}{r_2+r_1}} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = -6(k-1)^2(k+2). \end{aligned}$$

所以, 当  $k \neq 1$  且  $k \neq -2$  时,  $R(\mathbf{A}) = 3$ .

余下的讨论与前相同.

12. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解: (1) 对系数矩阵施行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_1 - r_2 - r_3]{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_1]{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 + r_1]{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_1]{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_2 = -3x_4, \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c$  为任意实数.

(2) 对系数矩阵施行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_2 \div (-4)]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2$  为任意实数.

(3) 对系数矩阵施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 4r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 9 & -19 & 34 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_4 - r_2 \\ 7r_3 - 9r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & -43 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} r_3 + 43r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 327 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

所以方程组的解为 
$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

(4) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_3 - 2r_1 + r_1 \\ r_4 - r_1 - 2r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} 3r_2 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

即得 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

所以方程组的解为 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \text{ 为任意实数}.$$

13. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases}$$

解: (1) 对系数的增广矩阵施行变换, 有

$$\left( \begin{array}{cccc} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1 - r_2]{4r_2 - 3r_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right),$$

看见

$$R(\mathbf{A}) = 2, \text{ 而 } R(\mathbf{B}) = 3,$$

故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵施行变换:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - r_1 - 2r_2]{r_3 - 2r_1 + r_2} \left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

即得

$$\begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 2, \\ z = z. \end{cases}$$

所以  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c$  为任意实数.

(3) 对系数的增广矩阵施行变换:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

即得

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ y = y, \\ z = z, \\ w = 0. \end{cases}$$

所以  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2$  为任意实数.

(4) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{2r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \\ z = z, \\ w = w. \end{cases}$$

所以  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c_1, c_2$  为任意实数.

14. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解: 把解的形式改写为  $\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$ , 即

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

15.  $\lambda$  取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解?

解: (1) 记系数矩阵为  $\mathbf{A}$ , 当  $|\mathbf{A}| \neq 0$  时方程组有惟一解. 由

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

得  $\lambda \neq 1$ , 且  $\lambda \neq -2$  时方程组有惟一解.

(2)  $\lambda = -2$  时,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

知  $R(\mathbf{A}) = 2 < R(\mathbf{B}) = 3$ , 此时方程组无解.

(3)  $\lambda = 1$  时,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

知  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 1$ , 此时方程组有无限多解.

我们强调, 这一类的题型是必须掌握的. 更一般的解法是, 通过行变换, 讨论  $R(\mathbf{A})$  与  $R(\mathbf{B})$  的关系. 比如这一题,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

当  $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$ , 且  $(1-\lambda)(\lambda+1)^2 \neq 0$ , 即  $\lambda = -2$  时, 方程组无解. 其他的讨论类似.

#### 16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

当  $\lambda$  取何值时有解? 并求出它的解.

解:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 须  $(1-\lambda)(\lambda+2)=0$ , 得

$$\lambda = 1, \text{ 或 } \lambda = -2.$$

当  $\lambda = 1$  时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当  $\lambda = -2$  时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

17. 设

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$$

问  $\lambda$  为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 当  $|A| \neq 0$  时, 有惟一解.

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{r_2+4r_1}{r_1+2r_3}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10). \end{aligned}$$

当  $\lambda \neq 1$  且  $\lambda \neq 10$  时, 有惟一解.

当  $\lambda = 10$  时, 增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+4r_2} \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 & 9 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

可见  $R(A) = 2$ ,  $R(B) = 3$ , 此时方程组无解.

当  $\lambda = 1$  时, 增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组有无限多解. 且原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

18. 证明  $R(A) = 1$  的充分必要条件是存在非零列向量  $\mathbf{a}$  及非零行向量  $\mathbf{b}^T$ , 使  $A = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$ .

证明: (充分性) 设  $A = ab^T$ . 由矩阵秩的性质 7 有

$$R(ab^T) \leq R(a). \quad (3.1)$$

又  $R(a) = 1$ , 所以

$$R(A) = R(ab^T) \leq 1. \quad (3.2)$$

但是  $R(A) \neq 0$ , 因为非零向量  $a, b^T$  分别至少存在一个非零元素, 记为  $a_i, b_j$ . 则矩阵  $A$  中至少有一个非零元  $a_i b_j$  (即  $A$  的一阶非零子式), 从而

$$R(A) \geq 1. \quad (3.3)$$

综合 (3.2), (3.3), 所以  $R(A) = 1$ .

(必要性) 设  $R(A) = 1$ . 则存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0 \cdots, 0) Q.$$

记

$$a \triangleq P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b \triangleq (1, 0 \cdots, 0) Q,$$

注意到  $P, Q$  是可逆矩阵, 其中不可能有全为零的行或列, 从而  $a, b^T$  即是满足条件的非零向量.

19. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明

(1) 方程  $AX = E_m$  有解的充分必要条件是  $R(A) = m$ ;

(2) 方程  $YA = E_n$  有解的充分必要条件是  $R(A) = n$ .

证明: (1) 由教材 P.78 定理 7, 方程  $AX = E_m$  有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, E_m).$$

$A$  为  $m \times n$  矩阵, 则

$$R(A) \leq m.$$

而由矩阵秩的性质 5,

$$m = R(E_m) \leq R(A, E_m) = R(A).$$

所以,  $R(A) = m$ .

(2) 方程  $YA = E_n$  两边作转置, 得

$$A^T Y^T = E_n.$$

此时  $A^T$  为  $n \times m$  矩阵, 由 (1) 的证明知  $A^T Y^T = E_n$  有解的充分必要条件是  $R(A) = n$ . 从而原命题得证.

20. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 证明: 若  $AX = AY$ , 且  $R(A) = n$ , 则  $X = Y$ .

证明: 由  $AX = AY$ , 得

$$A(X - Y) = 0.$$

又  $R(A) = n$ , 由教材 P.78 定理 9, 则矩阵方程  $A(X - Y) = 0$  只有零解, 即

$$X - Y \equiv 0.$$

得证

$$X = Y.$$

## 第四章 向量组的线性相关性

1. 设  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  及  $3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ .

解:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \\ 3 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \\ 3 \times 0 + 2 \times 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. 设  $3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}) = 5(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a})$ , 求  $\mathbf{a}$ , 其中

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解: 由  $3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}) = 5(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a})$  得

$$\mathbf{a} = \frac{1}{6}(3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. 已知向量组

$$A: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B: \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

证明  $B$  组能由  $A$  组线性表示, 但  $A$  组不能由  $B$  组线性表示.

证明: 要证  $B$  组能由  $A$  组线性表示, 由 P.85 定理 2, 即要证矩阵  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  的秩等于矩阵  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  的秩. 由

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4 - 3r_2]{r_3 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_1 - 3r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 20 & 5 & 15 & 25 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),\end{aligned}$$

可见,  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 3$ , 因此,  $B$  组能由  $A$  组线性表示.

又

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - 2r_3, r_4 - 2r_3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见  $R(B) = 2$ . 而  $R(A) = 3$ , 所以  $A$  组不能由  $B$  组线性表示. (因为若  $A$  组能由  $B$  组线性表示, 则  $R(A) \leq R(B)$ . 见教材 P.86 定理 3.)

4. 已知向量组

$$A: \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad B: \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

证明  $A$  组与  $B$  组等价.

证明: 方法与教材 P.86 例 2 相同. 下证  $R(A) = R(B) = R(A, B)$ .

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - r_1 - r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

所以  $R(A) = R(A, B) = 2$ . 又由上述初等变换知

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见  $R(B) = 2$ . 得到  $R(A) = R(B) = R(A, B)$ . 即证  $A$  组与  $B$  组等价.

5. 已知  $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$ ,  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$ , 证明

- (1)  $\mathbf{a}_1$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示;
- (2)  $\mathbf{a}_4$  不能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示.

证明: (1) 由  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$ , 知  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关. 从而向量组  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关 (整体无关则部分也无关. 见 P.90 定理 5(1)).

又  $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2 < 3$ , 所以向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性相关. 由 P.90 定理 5(3) 知  $\mathbf{a}_1$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示.

(2) 假设  $\mathbf{a}_4$  能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示. 已证  $\mathbf{a}_1$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示, 所以  $\mathbf{a}_4$  能由  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示. 这与  $R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = 3$  矛盾.

从而得证  $\mathbf{a}_4$  不能由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 因为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + 3r_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见  $R(A) = 2$ , 所以该向量组是线性相关的.

(2) 因为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times 2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

可见  $R(B) = 3$ , 所以该向量组是线性无关的.

7. 问  $a$  取什么值时下列向量组线性相关?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

解: 向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性相关的充要条件是  $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) < 3$ , 即  $|\mathbf{A}| = 0$ , 这里  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ . 由

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - ar_3} \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2).$$

所以,  $a = -1$  或  $a = 2$  时向量组线性相关.

8. 设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相关, 求向量  $\mathbf{b}$  用  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性表示的表示式.

解: 设  $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ . 由  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}$  线性相关, 则存在不全为零的  $x_1, x_2$  使得

$$x_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) + x_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

代入  $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ , 得

$$[x_1(k_1 + 1) + x_2k_1]\mathbf{a}_1 + [x_1k_2 + x_2(k_2 + 1)]\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关, 得

$$\begin{cases} x_1(k_1 + 1) + x_2k_1 = 0, \\ x_1k_2 + x_2(k_2 + 1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

要使  $x_1, x_2$  不全为零, 则方程组 (4.2) 中系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} k_1 + 1 & k_1 \\ k_2 & k_2 + 1 \end{vmatrix} = k_1 + k_2 + 1 = 0.$$

所以

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 = k_1\mathbf{a}_1 - (1 + k_1)\mathbf{a}_2,$$

或者记为

$$\mathbf{b} = c\mathbf{a}_1 - (1 + c)\mathbf{a}_2, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

9. 设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  也线性无关, 问  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$  是否一定线性相关? 试举例说明之.

解: 不一定. 比如取

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

得

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

此时  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  线性无关,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  也线性无关, 但是  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$  是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

- (1) 若向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  是线性相关的, 则  $\mathbf{a}_1$  可由  $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  线性表示.  
 (2) 若有不全为 0 的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

成立, 则  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  线性相关,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  亦线性相关.

- (3) 若只有当  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  全为 0 时, 等式

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

才能成立, 则  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  线性无关,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  亦线性无关.

- (4) 若  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  线性相关,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  亦线性相关, 则有不全为 0 的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

同时成立.

解: (1) 设

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \dots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

满足  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  线性相关, 但  $\mathbf{a}_1$  不能由  $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  线性表示.

- (2) 由有不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

上式可化为

$$\lambda_1 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \dots + \lambda_m (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

取

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_m = \mathbf{e}_m = -\mathbf{b}_m,$$

其中  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  为单位向量, 则 (4.4) 式成立, 而  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  线性无关,  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  亦线性无关.

- (3) 由仅当  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  全为 0 时,

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0},$$

得  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m$  线性无关.

取  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ , 取  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  为线性无关组, 满足以上条件. 但不能说  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  是线性无关的.

- (4) 取  $\mathbf{a}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (0, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 4)^T,$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} &\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4}\lambda_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

与题设矛盾.

11. 设  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4 = \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$ , 证明向量组  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  线性相关.

证明: 设有  $x_1, x_2, x_3, x_4$  使得

$$x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + x_3 \mathbf{b}_3 + x_4 \mathbf{b}_4 = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

则  $x_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + x_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + x_3(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) + x_4(\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$ , 即

$$(x_1 + x_4)\mathbf{a}_1 + (x_1 + x_2)\mathbf{a}_2 + (x_2 + x_3)\mathbf{a}_3 + (x_3 + x_4)\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

(a) 若  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性相关, 则 (4.6) 式中  $x_1 + x_4, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4$  不全为零.

从而  $x_1, x_2, x_3, x_4$  不全为零, 即  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  线性相关.

(b) 若  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关, 则 (4.6) 式中

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

由

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

知齐次方程组 (4.7) 存在非零解.

从而存在不全为零的数  $x_1, x_2, x_3, x_4$  使得 (4.5) 式成立, 即  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  线性相关.

综上所述得证.

上述证明只是一个一般思路. 其实这个题用一句话就可以证明了: 因为

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4,$$

所以  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  线性相关.

**12.** 设  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b}_r = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_r$ , 且向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  线性无关, 证明向量组  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  线性无关.

证明: 设

$$k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + \dots + k_r\mathbf{b}_r = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

则

$$(k_1 + \dots + k_r)\mathbf{a}_1 + (k_2 + \dots + k_r)\mathbf{a}_2 + \dots + (k_i + \dots + k_r)\mathbf{a}_i + \dots + k_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

因向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_r = 0, \\ k_2 + \dots + k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ k_r = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

因为  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , 故方程组 (4.10) 只有零解. (或者通过回代直接可得  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .)

即, 要使 (4.8) 成立当且仅当  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ . 所以  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$  线性无关.

另证. 由题设知向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  可由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性表示; 又  $a_1 = b_1, a_2 = b_2 - b_1, \dots, a_r = b_r - b_{r-1}$ , 知向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  可由向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性表示. 所以向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  与向量组  $b_1, b_2, \dots, b_r$  等价. 从而,

$$R(b_1, b_2, \dots, b_r) = R(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

又  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 知

$$R(b_1, b_2, \dots, b_r) = R(a_1, a_2, \dots, a_r) = r.$$

所以,  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关.

另证. 记矩阵  $B = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ , 则

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_r) \\ \begin{matrix} c_r - c_{r-1} \\ \sim \\ \dots \\ c_2 - c_1 \end{matrix} (a_1, a_2, \dots, a_r),$$

从而,

$$R(b_1, b_2, \dots, b_r) = R(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

以下同上一证法, 知  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

$$(1) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(2) a_1^T = (1, 2, 1, 3), a_2^T = (4, -1, -5, -6), a_3^T = (1, -3, -4, -7).$$

解: (1) 注意到  $-2a_1 = a_3$ , 所以  $a_1, a_3$  线性相关.

由

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 + 2r_1 \\ r_2 - 9r_1 \\ r_2 - 9r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 82 & 19 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组  $a_1, a_2, a_3$  秩为 2, 一组最大线性无关组为  $a_1, a_2$  (或者  $a_2, a_3$ ).

(2) 由

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 - r_1 \\ r_2 - 4r_1 \\ r_2 - 4r_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组  $a_1^T, a_2^T, a_3^T$  的秩为 2, 最大线性无关组为  $a_1^T, a_2^T$ .

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求  $a, b$ .

解: 依次记这 4 个向量为  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , 并记此向量组为  $A$ . 易见  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关, 而已知向量组  $A$  的秩为 2, 所以  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  是向量组  $A$  的一个最大无关组. 则  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  可以由向量组  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得  $x = 0, y = 1$ , 从而  $a = 2$ .

用同样的方法可以计算得  $b = 5$ .

16. 设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  是一组  $n$  维向量, 已知  $n$  维单位坐标向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  能由它们线性表示, 证明  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  线性无关.

证明: 不妨设:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= k_{11}\mathbf{a}_1 + k_{12}\mathbf{a}_2 + \dots + k_{1n}\mathbf{a}_n, \\ \mathbf{e}_2 &= k_{21}\mathbf{a}_1 + k_{22}\mathbf{a}_2 + \dots + k_{2n}\mathbf{a}_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= k_{n1}\mathbf{a}_1 + k_{n2}\mathbf{a}_2 + \dots + k_{nn}\mathbf{a}_n. \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 得

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{vmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \implies \begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix} \neq 0,$$

即  $n$  维向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  所构成矩阵的秩为  $n$ .

所以  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

另证. 向量组  $e_1, e_2, \dots, e_n$  能由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示, 则

$$R(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq R(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (\text{P.86 定理 3})$$

而

$$R(e_1, e_2, \dots, e_n) = n, \text{ 且 } R(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n,$$

所以

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n) = n.$$

得  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

**17.** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是一组  $n$  维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一  $n$  维向量都可由它们线性表示.

**证明:** (充分性) 设任一  $n$  维向量都可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示, 则  $n$  维单位向量组  $e_1, e_2, \dots, e_n$  能由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示. 由上一题得  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

(必要性) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关. 任给  $n$  维向量  $b$ , 则向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  线性相关 ( $n+1$  个  $n$  维向量是线性相关的).

由 P.90 定理 5(3), 则向量  $b$  必能由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示 (且表示式是惟一的).

**18.** 设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关, 且  $a_1 \neq 0$ , 证明存在某个向量  $a_k$  ( $2 \leq k \leq m$ ), 使  $a_k$  能由  $a_1, \dots, a_{k-1}$  线性表示.

**证明:** 假设不存在这样的  $a_k$ . 则  $a_2$  不能由  $a_1$  线性表示, 从而向量组  $a_1, a_2$  线性无关.

$a_3$  不能由  $a_1, a_2$  线性表示, 又向量组  $a_1, a_2$  线性无关, 所以向量组  $a_1, a_2, a_3$  线性无关.

依次类推, 可以得到向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证.

**19.** 设向量组  $B: b_1, \dots, b_r$  能由向量组  $A: a_1, \dots, a_s$  线性表示为

$$(b_1, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_s)K,$$

其中  $K$  为  $s \times r$  矩阵, 且  $A$  组线性无关. 证明  $B$  组线性无关的充分必要条件是矩阵  $K$  的秩  $R(K) = r$ .

**证明:** (必要性) 设  $B$  组线性无关.

记  $B = (b_1, \dots, b_r)$ ,  $A = (a_1, \dots, a_s)$  则有

$$B = AK. \quad (4.11)$$

由秩的性质知

$$R(B) = R(AK) \leq R(K). \quad (4.12)$$

而由  $B$  组线性无关知  $R(B) = r$ , 故  $R(K) \geq r$ .

又  $K$  为  $r \times s$  阶矩阵, 则  $R(K) \leq \min\{r, s\} \leq r$ .

综上知  $R(K) = r$ .

(充分性) 若  $R(K) = r$ . 令

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_r b_r = 0. \quad (4.13)$$

下证方程 (4.13) 只有零解. 为方便记方程 (4.13) 为

$$Bx = 0. \quad (4.14)$$

代入 (4.11) 式则有

$$AKx = 0. \quad (4.15)$$

由向量组  $A: \alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性无关, 有  $R(A) = r$ . 所以方程 (4.15) 只有零解:

$$Kx = 0. \quad (4.16)$$

又  $R(K) = r$ , 所以方程 (4.16) 只有零解:

$$x = 0.$$

所以  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关.

20. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  等价.

证明: 由题设知向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示. 下面只需证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表示即可.

由题设得

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = (n-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n),$$

所以

$$(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

得

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_1, \\ \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)/(n-1) - \beta_n. \end{cases}$$

得证向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性表示.

综上, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  等价.

21. 已知 3 阶矩阵  $A$  与 3 维列向量  $x$  满足  $A^3x = 3Ax - A^2x$ , 且向量组  $x, Ax, A^2x$  线性无关,

(1) 记  $P = (x, Ax, A^2x)$ , 求 3 阶矩阵  $B$ , 使  $AP = PB$ ; (2) 求  $|A|$ .

解: (1) 由  $P = (x, Ax, A^2x)$ , 有

$$\begin{aligned} AP &= A(x, Ax, A^2x) \\ &= (Ax, A^2x, A^3x) \\ &= (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} && (\text{由 } A^3x = 3Ax - A^2x) \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到矩阵  $P$  是 3 阶方阵, 又向量组  $x, Ax, A^2x$  线性无关, 所以矩阵  $P$  可逆. 得

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 由  $A = PBP^{-1}$ , 两边取行列式得,

$$|A| = |B| = 0.$$

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$(3) nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$$

解: (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 8]{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于  $\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases}$  即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 或者写为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1 - 2r_2]{r_3 - r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 19]{r_1 \div 2 + \frac{3}{38}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于  $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{19}x_3 + \frac{1}{19}x_4, \\ x_2 = -\frac{14}{19}x_3 + \frac{7}{19}x_4. \end{cases}$  即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此基础解系为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 或者写为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$ .

(3) 原方程即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1 = & x_1, \\ x_2 = & x_2, \\ \vdots & \\ x_{n-1} = & x_{n-1}, \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

23. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ , 求一个  $4 \times 2$  矩阵  $B$ , 使  $AB = O$ , 且

$$R(B) = 2.$$

解: 由于  $R(B) = 2$ , 所以可设  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ . 则由

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组可得惟一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故所求矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 11 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

此题中满足条件的矩阵  $B$  显然不止一个. 比如在

$$AB = O$$

两边同时右乘某个初等矩阵, 则等式右边的  $O$  不变, 而矩阵  $B$  被进行列变换而发生了改变.

这也是为什么把  $B$  设为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

而不需要设为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

的原因.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解: 显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

即

$$\begin{cases} x_1 = 3k_2, \\ x_2 = k_1 + 2k_2, \\ x_3 = 2k_1 + k_2, \\ x_4 = 3k_1. \end{cases}$$

消去  $k_1, k_2$  得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解: (1) 因为

$$I \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

所以 I 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$II \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases}$$

所以 II 的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 联立方程组 I 和 II 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

26. 设  $n$  阶矩阵  $\boldsymbol{A}$  满足  $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ ,  $\boldsymbol{E}$  为  $n$  阶单位矩阵, 证

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n.$$

提示: 利用矩阵性质 6 和 8.

证明: 因为  $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$ , 所以由矩阵秩的性质 8(P.71), 知

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \leq n.$$

又由矩阵秩的性质 6(P.71), 有

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \geq R(\mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{A}) = R(\mathbf{E}) = n.$$

所以  $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = n$ .

27. 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵 ( $n \geq 2$ ),  $\mathbf{A}^*$  为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵, 证明

$$R(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(\mathbf{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } R(\mathbf{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } R(\mathbf{A}) \leq n - 2. \end{cases}$$

解: (1) 若  $R(\mathbf{A}) = n$ . 又  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵, 知矩阵  $\mathbf{A}$  可逆. 从而矩阵  $\mathbf{A}^*$  可逆, 得  $R(\mathbf{A}^*) = n$ .

(2) 若  $R(\mathbf{A}) = n - 1$ . 则矩阵  $\mathbf{A}$  至少存在一个  $n - 1$  阶非零子式, 从而矩阵  $\mathbf{A}^*$  中至少有一个元素非零, 得

$$R(\mathbf{A}^*) \geq 1. \quad (4.17)$$

又由  $R(\mathbf{A}) = n - 1$  知  $|\mathbf{A}| = 0$ , 所以

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

由矩阵性质 8 知

$$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{A}^*) \leq n.$$

代入  $R(\mathbf{A}) = n - 1$ , 得

$$R(\mathbf{A}^*) \leq 1. \quad (4.18)$$

综合 (4.17) 式和 (4.18) 式得

$$R(\mathbf{A}^*) = 1.$$

(3) 若  $R(\mathbf{A}) \leq n - 2$ . 则矩阵  $\mathbf{A}$  的所以  $n - 1$  阶子式全为零, 这使得  $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$ . 所以

$$R(\mathbf{A}^*) = 0.$$

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

解: (1)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div -2]{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & 7 & -28 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_2]{r_3 \div 14} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$  是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

**解:** 由于矩阵的秩为 3, 方程组有 4 个未知量,  $n - r = 4 - 3 = 1$ , 故其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量, 且由于  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$  均为方程组的解, 由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

为其基础解系向量, 其中  $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3$  为对应的齐次方程组的解. 故此方程组的通解为:

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

30. 设有向量组  $A: \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 及向量  $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$ , 问  $\alpha, \beta$  为

何值时

- (1) 向量  $\boldsymbol{b}$  不能由向量组  $A$  线性表示;
- (2) 向量  $\boldsymbol{b}$  能有由量组  $A$  线性表示, 且表示式惟一;

(3) 向量  $\mathbf{b}$  能有由量组  $A$  线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解: 设

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b},$$

即

$$\begin{cases} \alpha x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases} \quad (4.19)$$

往下讨论方程组 (4.19) 的解即可. 因为

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 4r_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} \alpha + 2 & -1 & 0 & 1 + \beta \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & -1 - 4\beta \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} \alpha + 4 & 0 & 0 & -3\beta \\ 0 & 0 & 1 & 5\beta + 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 - 4\beta \end{pmatrix}$$

(1) 当  $\alpha + 4 = 0$  且  $-3\beta \neq 0$  时,  $R(\mathbf{A}) = 2 \neq R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$ , 方程组 (4.19) 无解. 即, 当  $\alpha = -4$  且  $\beta \neq 0$  时, 向量  $\mathbf{b}$  不能由向量组  $A$  线性表示;

(2) 当  $\alpha + 4 \neq 0$  时,  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$ , 方程组 (4.19) 有惟一解. 即, 当  $\alpha \neq -4$  时, 向量  $\mathbf{b}$  能有由量组  $A$  线性表示, 且表示式惟一;

(3) 当  $\alpha + 4 = 0$  且  $-3\beta = 0$  时,  $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2 \leq 3$ , 方程组 (4.19) 有无限多解. 此时方程组 (4.19) 等价于

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = -2c - 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

即, 当  $\alpha = -4$  且  $\beta = 0$  时, 向量  $\mathbf{b}$  能有由量组  $A$  线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\mathbf{b} = c\mathbf{a}_1 - (2c + 1)\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

31. 设

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ l_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  线性无关, 且向量组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  线性相关.

证明: 三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0. \end{cases} \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3) \quad (4.20)$$

有惟一解. 记方程组 (4.20) 为

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = -\mathbf{c}. \quad (4.21)$$

方程组 (4.21) 有惟一解的充要条件是

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 2.$$

即向量组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  线性无关, 且向量组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  线性相关.

32. 设矩阵  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ , 其中  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关,  $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ . 向量  $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ , 求方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的通解.

解: 记  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , 则  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  为

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 = \mathbf{b}.$$

代入  $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ ,  $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ , 整理得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\mathbf{a}_2 + (-x_1 + x_3)\mathbf{a}_3 + (x_4 - 1)\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}.$$

又  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  线性无关, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

方程组 (4.22) 等价于

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

得方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

33. 设  $\boldsymbol{\eta}^*$  是非齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一个解,  $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1)  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关;

(2)  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关.

证明: (1) 假设  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性相关. 而由基础解系的定义, 知  $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  是线性无关的, 则  $\boldsymbol{\eta}^*$  可以由  $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性表示. 从而  $\boldsymbol{\eta}^*$  是齐次方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解, 这与  $\boldsymbol{\eta}^*$  是非齐次线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解矛盾. 所以假设不成立. 即  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关.

(2) 易知向量组  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  与向量组  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  等价. 又由本题 (1) 的结论,  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关, 知

$$R(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = R(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = n - r + 1.$$

所以,  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关.

另证. (1) 反证法. 假设  $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性相关, 则存在着不全为 0 的数  $k_0, k_1, \dots, k_{n-r}$  使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \dots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

其中,  $k_0 \neq 0$ , 否则,  $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性相关, 这与基础解系是线性无关的产生矛盾.

由于  $\eta^*$  为特解,  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  为基础解系, 故得

$$A(k_0\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}) = k_0A\eta^* = k_0b.$$

而由 (4.23) 式可得

$$A(k_0\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}) = 0.$$

故  $b = 0$ , 而题中方程组为非齐次线性方程组, 有  $b \neq 0$ .

与题设产生矛盾, 假设不成立, 故  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.

(2) 反证法. 假设  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性相关. 则存在着不全为零的数  $k_0, k_1, \dots, k_{n-r}$  使得

$$k_0\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \dots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0. \quad (4.24)$$

即  $(k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ .

若  $k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 0$ , 由于  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  是线性无关的一组基础解系, 故  $k_0 = k_1 = \dots = k_{n-r} = 0$ , 由 (4.24) 式得  $k_0 = 0$ , 此时

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{n-r} = 0,$$

与假设矛盾.

若  $k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} \neq 0$  由本题 (1) 知,  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关, 故

$$k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0,$$

与假设矛盾,

综上, 假设不成立, 原命题得证.

**34.** 设  $\eta_1, \dots, \eta_s$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的  $s$  个解,  $k_1, \dots, k_s$  为实数, 满足  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ . 证明

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$$

也是它的解.

**证明:** 由于  $\eta_1, \dots, \eta_s$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的  $s$  个解. 故有  $A\eta_i = b, (i = 1, \dots, s)$ .

而

$$\begin{aligned} & A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s) \\ &= k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 + \dots + k_sA\eta_s \\ &= b(k_1 + \dots + k_s) = b, \end{aligned}$$

即  $Ax = b, (x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s)$ .

从而  $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_s\eta_s$  也是方程的解.

**35.** 设非齐次线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵的秩为  $r$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$  是它的  $n - r + 1$  个线性无关的解 (由题 33 知它确有  $n - r + 1$  个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \quad (\text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1).$$

**证明:** 设  $x$  为  $Ax = b$  的任一解. 已知  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$  线性无关且均为  $Ax = b$  的解. 取

$$\xi_1 = \eta_2 - \eta_1, \xi_2 = \eta_3 - \eta_1, \dots, \xi_{n-r} = \eta_{n-r+1} - \eta_1. \quad (4.25)$$

则它们均为齐次方程  $Ax = 0$  的解. 下用反证法证明:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.

假设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性相关, 则存在不全为零的数  $l_1, l_2, \dots, l_{n-r}$  使得

$$l_1\xi_1 + l_2\xi_2 + \dots + l_{n-r}\xi_{n-r} = 0.$$

代入 (4.25) 式整理得

$$-(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-r})\boldsymbol{\eta}_1 + l_1\boldsymbol{\eta}_2 + l_2\boldsymbol{\eta}_3 + \cdots + l_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} = \mathbf{0}.$$

由  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$  线性无关, 知

$$-(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n-r}) = l_1 = l_2 = \cdots = l_{n-r} = 0,$$

与假设矛盾, 故假设不成立. 所以  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$  线性无关, 为齐次方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一组基.

由于  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_1$  均为  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解, 所以  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_1$  为齐次方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解. 则  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_1$  可由

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

线性表示, 设

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_1 &= k_2\boldsymbol{\xi}_1 + k_3\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\xi}_{n-r} \\ &= k_2(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_3(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1) + \cdots + k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} - \boldsymbol{\eta}_1),\end{aligned}$$

整理得

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_1(1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{n-r+1}) + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + k_3\boldsymbol{\eta}_3 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1} = \mathbf{0}.$$

令  $k_1 = 1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{n-r+1}$ , 则  $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$ , 而且

$$\mathbf{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

证毕.

36. 设

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\},$$

$$V_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}.$$

问  $V_1, V_2$  是不是向量空间? 为什么?

证明: 集合  $V$  成为向量空间只需满足条件:

若  $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$ , 则  $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$ ;

若  $\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ , 则  $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$ .

(1) 对任意的  $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$ , 设

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0,$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T, \quad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0.$$

则  $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)^T$ , 且

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1. \quad (4.26)$$

对任意的  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_n).$$

因为

$$\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

故

$$\lambda\alpha \in V_1. \quad (4.27)$$

综合 (4.26) 和 (4.27) 式, 得证  $V_1$  是向量空间.

(2)  $V_2$  不是向量空间, 因为:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

故

$$\alpha + \beta \notin V_2.$$

**37.** 试证: 由  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)^T$  所生成的向量空间就是  $\mathbb{R}^3$ .

**证明:** 设  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ , 因为

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

知  $R(\mathbf{A}) = 3$ , 故  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关.

由于  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  均为三维, 且秩为 3, 所以  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  为此三维空间的一组基, 故由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  所生成的向量空间就是  $\mathbb{R}^3$ .

**38.** 由  $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 1)^T$  所生成的向量空间记作  $L_1$ , 由  $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 3, 3)^T$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1, -1)^T$  所生成的向量空间记作  $L_2$ , 试证  $L_1 = L_2$ .

**证明:** 容易发现向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  与向量组  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  等价. 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2), & \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2); \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2, & \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

又由教材 P.105 例 23 知“等价的向量组生成的向量空间相同”, 所以  $L_1 = L_2$ .

**39.** 验证  $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 3)^T$ ,  $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)^T$  为  $\mathbb{R}^3$  的一个基, 并把  $\mathbf{v}_1 = (5, 0, 7)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-9, -8, -13)^T$  用这个基线性表示.

**解:** 记矩阵  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ . 由于

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

即矩阵  $\mathbf{A}$  的秩为 3, 故  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关, 为  $\mathbb{R}^3$  的一个基.

设

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

要求得  $k_1, k_2, k_3$  和  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 即要求线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$  的解. 由

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 & \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 & \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 & \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 & \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 & \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 & \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_3 - r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 & \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \div (-2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 & \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_3 \\ r_1 - 3r_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 & \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -9 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \div 3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

求得方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$  的解, 即

$$\begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 3, \\ k_3 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -3, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

故

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3.$$

40. 已知  $\mathbb{R}^3$  的两个基为

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  到基  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  的过渡矩阵.

解: 由过渡矩阵的定义知, 从基  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  到基  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  的过渡矩阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

这里  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ . 因为

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_3 + r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_2 - r_3/2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 第五章 相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(2) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解: (1) 由施密特正交化方法, 得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得:

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 由施密特正交化方法得

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交矩阵? 并说明理由.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解: (1) 第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设  $x$  为  $n$  维列向量,  $x^T x = 1$ , 令  $H = E - 2xx^T$ , 证明  $H$  是对称的正交阵.

证明: 注意到矩阵的转置运算满足  $(A+B)^T = A^T + B^T$ , 有

$$\begin{aligned} H^T &= (E - 2xx^T)^T \\ &= E^T - 2(xx^T)^T \\ &= E - 2(x^T)^T(x^T) \\ &= E - 2xx^T \\ &= H. \end{aligned}$$

所以  $H$  是对称的. 又

$$\begin{aligned} H^T H &= (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T + 4xx^T xx^T \\ &= E. \end{aligned} \quad (x^T x = 1)$$

则  $H$  是正交阵.

综上得证  $H$  是对称的正交阵.

4. 设  $A$  与  $B$  都是正交阵, 证明  $AB$  也是正交阵.

证明: 因为  $A, B$  是正交阵, 故  $A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$ .

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^{-1} A^{-1} AB = E.$$

故  $AB$  也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 + (\lambda+2)c_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -5\lambda-7 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3,$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ .

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  时, 解方程  $(A + E)x = 0$ , 由

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 5r_3]{r_1 + 3r_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 所以  $k\mathbf{p}$  ( $k \neq 0$ ) 是对应于  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  的全部特征值向量.

(2) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$ .

当  $\lambda_1 = 0$  时, 解方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1 - r_2]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系  $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 故  $k_1\mathbf{p}_1$  ( $k_1 \neq 0$ ) 是对应于  $\lambda_1 = 0$  的全部特征值向量.

当  $\lambda_2 = -1$  时, 解方程  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系  $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 故  $k_2\mathbf{p}_2$  ( $k_2 \neq 0$ ) 是对应于  $\lambda_2 = -1$  的全部特征值向量.

当  $\lambda_3 = 9$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - 9\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由

$$\mathbf{A} - 9\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

得基础解系  $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 故  $k_3\mathbf{p}_3$  ( $k_3 \neq 0$ ) 是对应于  $\lambda_3 = 9$  的全部特征值向量.

(3) 由

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{展开 } r_1}{=} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda-1) - 1 \cdot (\lambda^2-1) = (\lambda^2-1)^2 \\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2, \end{aligned}$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  时, 解方程  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  的全部特征向量为

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

当  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$  的全部特征向量为

$$k_3\mathbf{p}_3 + k_4\mathbf{p}_4 \quad (k_3, k_4 \text{ 不同时为 } 0).$$

**6.** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵, 证明  $\mathbf{A}^T$  与  $\mathbf{A}$  的特征值相同.

**证明:** 证明二者有相同的特征方程 (或特征多项式) 即可. 由性质  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ , 知

$$|\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}| = |(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^T| = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|.$$

得证  $\mathbf{A}^T$  与  $\mathbf{A}$  的特征值相同.

**7.** 设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  满足  $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$ , 证明  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  有公共的特征值, 有公共的特征向量.

**证明:** 由  $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) < n$ , 有  $R(\mathbf{A}) < n$ , 而

$$R(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{A} - 0\mathbf{E}| = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 的特征值}.$$

同理, 0 也是  $\mathbf{B}$  的特征值. 所以  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  有公共的特征值 0.

下证  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  有对应于  $\lambda = 0$  的公共特征向量.

$\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  有对应于  $\lambda = 0$  的公共特征向量

$\Leftrightarrow$  存在非零向量  $\boldsymbol{p}$  同时满足  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ ,  $\boldsymbol{B}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow$  方程组  $\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$  有非零解

$\Leftrightarrow$  方程组  $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$  有非零解

而

$$R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{B}^T) \leqslant R(\boldsymbol{A}^T) + R(\boldsymbol{B}^T) = R(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) < n.$$

综上知  $\boldsymbol{A}$  与  $\boldsymbol{B}$  有公共的特征向量.

8. 设  $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ , 证明  $\boldsymbol{A}$  的特征值只能取 1 或 2.

证明: 设  $\lambda$  是  $\boldsymbol{A}$  的特征值, 则存在非零向量  $\boldsymbol{p}$  使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}.$$

两边同时左乘  $\boldsymbol{A}$ , 有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}. \quad (5.1)$$

又由  $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ , 得  $\boldsymbol{A}^2 = 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ , 所以

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = (3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = 3\lambda\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}. \quad (5.2)$$

综合 (5.1) 式和 (5.2) 式得

$$\lambda^2\boldsymbol{p} = 3\lambda\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}, \text{ 即 } (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量  $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ , 所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得

$$\lambda = 1 \text{ 或 } 2.$$

得证  $\boldsymbol{A}$  的特征值只能取 1 或 2.

另证. 设  $\lambda$  是  $\boldsymbol{A}$  的特征值, 则  $\lambda^2 - 3\lambda + 2$  是  $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$  的特征值<sup>1</sup>. 则存在非零向量  $\boldsymbol{p}$  使

$$(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p}.$$

又由  $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ , 代入上式得

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量  $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ , 所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得  $\lambda = 1$  或  $2$ .

得证  $\boldsymbol{A}$  的特征值只能取 1 或 2.

一个有缺陷的证明:

由  $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ , 得  $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$ . 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}| |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0.$$

<sup>1</sup> 见 P.122 例 8 的推广结论.

所以

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0 \text{ 或 } |\mathbf{A} - \mathbf{E}| = 0,$$

则 1 或 2 是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 矩阵  $\mathbf{A}$  是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说 “ $\mathbf{A}$  的特征值只能取 1 或 2”.

9. 设  $\mathbf{A}$  为正交阵, 且  $|\mathbf{A}| = -1$ , 证明  $\lambda = -1$  是  $\mathbf{A}$  的特征值.

证明: 即需证明  $\lambda = -1$  满足特征方程  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ , 即  $|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0$ . 因为

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + \mathbf{E}| &= |\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}| && (\mathbf{A} \text{ 为正交阵}) \\ &= |\mathbf{E} + \mathbf{A}^T| |\mathbf{A}| \\ &= -|\mathbf{A}^T + \mathbf{E}| && (|\mathbf{A}| = -1) \\ &= -|(\mathbf{A} + \mathbf{E})^T| \\ &= -|\mathbf{A} + \mathbf{E}|, \end{aligned}$$

所以  $2|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0$ , 即  $|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 0$ . 得证  $\lambda = -1$  是  $\mathbf{A}$  的特征值.

10. 设  $\lambda \neq 0$  是  $m$  阶矩阵  $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times m}$  的特征值, 证明  $\lambda$  也是  $n$  阶矩阵  $\mathbf{BA}$  的特征值.

证明: 设  $\mathbf{p}$  是矩阵  $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times m}$  的对应于  $\lambda$  的特征向量, 则

$$(\mathbf{AB})\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}. \quad (5.3)$$

上式两边同时左乘  $\mathbf{B}$  得  $\mathbf{B}(\mathbf{AB})\mathbf{p} = \mathbf{B}\lambda\mathbf{p}$ , 即

$$(\mathbf{BA})(\mathbf{Bp}) = \lambda(\mathbf{Bp}).$$

下面证明  $\mathbf{Bp}$  是非零的. 因为, 假如  $\mathbf{Bp} = \mathbf{0}$ , 则 (5.3) 式中左边  $(\mathbf{AB})\mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{Bp}) = \mathbf{0}$ ; 但是  $\lambda \neq 0$ , 且特征向量  $\mathbf{p}$  是非零向量, 从而  $\lambda\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ . 假设不成立.

得证  $\lambda$  也是  $n$  阶矩阵  $\mathbf{BA}$  的特征值.

注意: 特征向量是非零的.

11. 已知 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为 1, 2, 3, 求  $|\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A}|$ .

解: (模仿 P.122 例 9 解题.) 设  $\lambda$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 记  $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A}$ , 则  $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$  是  $\varphi(\mathbf{A})$  的特征值. 又

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 3,$$

知  $\varphi(\mathbf{A})$  的特征值为 3, 2, 3, 所以

$$|\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A}| = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

12. 已知 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为 1, 2, -3, 求  $|\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E}|$ .

解: 因  $\mathbf{A}$  的特征值全不为 0, 知  $\mathbf{A}$  可逆, 故  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$ . 而  $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -6$ , 所以

$$\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = -6\mathbf{A}^{-1} + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E}.$$

把上式记作  $\varphi(\mathbf{A})$ , 有  $\varphi(\lambda) = -\frac{6}{\lambda} + 3\lambda + 2$ , 故  $\varphi(\mathbf{A})$  的特征值为

$$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(2) = 5, \quad \varphi(-3) = -5,$$

于是

$$|\mathbf{A}^* + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E}| = (-1) \cdot 5 \cdot (-5) = 25.$$

另解. 注意到  $|A| = -6$ , 先计算  $|A||A^* + 3A + 2E|$ , 即  $|-6E + 3A^2 + 2A|$ . 易得  $-6E + 3A^2 + 2A$  的特征值为  $-1, 10, 15$ , 所以

$$|-6E + 3A^2 + 2A| = (-1) \cdot 10 \cdot 15 = -150,$$

从而得  $|A^* + 3A + 2E| = 25$ .

13. 设  $A, B$  都是  $n$  阶方阵, 且  $A$  可逆, 证明  $AB$  与  $BA$  相似.

证明: 由  $A$  可逆知

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = BA,$$

则  $AB$  与  $BA$  相似.

14. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  可相似对角化, 求  $x$ .

解: 解题依据: 定理 4 (P.125), “ $n$  阶矩阵  $A$  能对角化的充要条件是  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量”.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-6), \end{aligned}$$

得  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

要使 3 阶矩阵  $A$  能对角化, 则需  $A$  有 3 个线性无关的特征向量.

对应单根  $\lambda_1 = 1$ , 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个, 所以, 要使矩阵  $A$  能对角化, 需对应重根  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  有 2 个线性无关的特征向量, 即方程  $(A - E)x = 0$  有 2 个线性无关的解. 由 P.98 定理 7, 即

$$R(A - E) = 1.$$

由

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$x = 3.$$

因此, 当  $x = 3$  时, 矩阵  $A$  能对角化.

15. 已知  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$  的一个特征向量.

(1) 求参数  $a, b$  及特征向量  $p$  所对应的特征值;

(2) 问  $A$  能不能相似对角化? 并说明理由.

解: (1) 设特征向量  $p$  所对应的特征值为  $\lambda$ , 则  $Ap = \lambda p$ , 即

$$Ap = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

得

$$\lambda = -1, \quad a = -3, \quad b = 0.$$

(2) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3,$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

要使 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  能够对角化, 需使重根  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  对应 3 个线性无关的特征向量, 但这是不可能的. 因为 3 元齐次方程  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的线性无关解的个数为

$$n - r = 3 - R(\mathbf{A} + \mathbf{E}),$$

而这里  $\mathbf{A} + \mathbf{E} \neq \mathbf{O}$ , 即  $R(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \geq 1$ , 所以, 方程  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的线性无关解的个数不可能为 3.

因此, 矩阵  $\mathbf{A}$  不能相似对角化.

**16.** 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称矩阵化为对角矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解: (1) 由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 2),$$

得矩阵  $|\mathbf{A}|$  的特征值为  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ .

当  $\lambda_1 = -2$  时, 由

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{单位特征向量可取为 } \mathbf{p}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

当  $\lambda_2 = 1$  时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为  $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

当  $\lambda_3 = 4$  时, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为  $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

得正交阵  $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \boldsymbol{P} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , 所以矩阵  $\boldsymbol{A}$  可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5 - \lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10),$$

得特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ .

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即基础解系为  $\boldsymbol{\xi}_1 = (-2, 1, 0)^T, \boldsymbol{\xi}_2 = (2, 0, 1)^T$ . 将  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  正交化, 取  $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1$ ,

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1]} \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

当  $\lambda_3 = 10$  时, 由

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位化得  $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

得正交阵

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

从而矩阵  $\mathbf{A}$  可对角化为

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

17. 设矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  与  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似, 求  $x, y$ ; 并求一个正交阵  $\mathbf{P}$ , 使

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}.$$

解: 方阵  $\mathbf{A}$  与对角阵  $\mathbf{\Lambda}$  相似, 则  $5, -4, y$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值. 从而  $|\mathbf{A} - 5\mathbf{E}| = 0, |\mathbf{A} + 4\mathbf{E}| = 0$ . 由  $|\mathbf{A} + 4\mathbf{E}| = 0$  得

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

计算得

$$x = 4.$$

下求  $y$ . 由性质  $|\mathbf{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , 得

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) \times y,$$

计算得

$$y = 5.$$

下求正交矩阵  $\mathbf{P}$ .

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\xi_1 = (1, -2, 0)^T, \quad \xi_2 = (0, -2, 1)^T.$$

规范正交化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^T, \quad \eta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, -5)^T.$$

当  $\lambda_3 = -4$  时, 解方程  $(A + 4E)x = 0$ . 由

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得单位化基础解系

$$\eta_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T.$$

令  $P = (\eta_1, \eta_3, \eta_2)$ , 则  $P$  为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

(注意  $P$  中特征向量的排列顺序, 是与  $\Lambda$  中的对角元相对应的.)

**另解**(求  $x, y$ ). 方阵  $A$  与对角阵  $\Lambda$  相似, 则  $5, -4, y$  是矩阵  $A$  的特征值. 由特征值性质  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  和  $|\Lambda| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$  可得

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + x + 1, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\Lambda|. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 1 + y = 2 + x, \\ -20y = -15x - 40. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

18. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ ; 对应的特征向量依次为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求  $A$ .

**解:** 记  $P = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , 则

$$P^{-1}AP = \Lambda.$$

所以

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

其中

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - c_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设 3 阶对称矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ ; 对应  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量依次为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求  $\mathbf{A}$ .

解: 设  $\lambda_3$  对应的特征向量为  $\mathbf{p}_3 = (x, y, z)^T$ . 注意到  $\mathbf{A}$  为对称阵, 由  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ , 知  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  正交. 则

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

由系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

知方程组 (5.4) 的通解为

$$(x, y, z)^T = k(-2, 2, -1)^T.$$

可取

$$\mathbf{p}_3 = (-2, 2, -1)^T,$$

因  $\mathbf{A}$  对称, 必有正交阵  $\mathbf{Q}$ , 使

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}(1, -1, 0).$$

前面已经求得  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  正交, 再单位化, 即得

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \text{diag}(1, -1, 0) \mathbf{Q}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ , 与特征值  $\lambda_1 = 6$  对应的特征向量为  $p_1 = (1, 1, 1)^T$ , 求  $A$ .

解: 1° 先求出  $\lambda_2, \lambda_3$  所对应的特征向量  $p_2, p_3$ . 由定理 6,  $p_2, p_3$  与  $p_1$  正交. 设  $(x, y, z)^T$  与  $p_1$  正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

解方程得基础解系为

$$(-1, 0, 1)^T, (-1, 1, 0)^T.$$

所以可取

$$p_2 = (-1, 0, 1)^T, p_3 = (-1, 1, 0)^T.$$

2° 下求矩阵  $A$ . 由  $A$  是对称阵, 存在正交阵  $Q$  使得  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(6, 3, 3)$ . 所以可以由  $p_1, p_2, p_3$  得到一组单位正交向量, 以构成正交阵  $Q$ .

将  $p_2, p_3$  正交化: 取  $\eta_2 = p_2$ ,

$$\eta_3 = p_3 - \frac{[p_3, \eta_2]}{[\eta_2, \eta_2]} \eta_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

再将  $p_1, \eta_2, \eta_3$  单位化, 得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

令  $Q = (q_1, q_2, q_3)$ , 则  $Q$  为正交阵, 得

$$A = Q \text{diag}(6, 3, 3) Q^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. 设  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, a_1 \neq 0, A = aa^T$ ,

(1) 证明  $\lambda = 0$  是  $A$  的  $n-1$  重特征值;

(2) 求  $A$  的非零特征值及  $n$  个线性无关的特征向量.

解: (1) 注意到  $A$  为对称阵, 故  $A$  与对角阵  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  相似, 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的全部特征值.

由习题三 18 题, 知  $R(A) = 1$ , 从而  $R(\Lambda) = 1$ , 于是  $\Lambda$  的对角元只有一个非零, 即  $\lambda = 0$  是  $A$  的  $n-1$  重特征值.

(2) 因  $A = aa^T$  的对角线元素之和为  $\sum_{i=1}^n a_i^2$ ; 又由特征值性质:  $A$  的  $n$  个特征值之和为  $\sum_{i=1}^n a_i^2$ , 已证

$\lambda = 0$  是  $A$  的  $n-1$  重特征值, 所以剩下的那个特征值只能是  $\sum_{i=1}^n a_i^2$ .

已知  $a_1 \neq 0$ , 所以  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$ , 得证  $\sum_{i=1}^n a_i^2$  是  $A$  的非零特征值 (且是惟一的).

下求  $A$  的特征向量.

(a) 当  $\lambda = 0$  时, 求解方程  $Ax = 0$ . 由

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \div a_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i - a_i r_1, i=2,3,\dots} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得  $\lambda = 0$  对应的全部特征向量为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1} \begin{pmatrix} -a_n/a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \text{ 不同时为 } 0).$$

(b) 当  $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$  时, 由  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ , 有

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a}) = \mathbf{a} \sum_{i=1}^n a_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \mathbf{a},$$

可见  $\lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$  对应的特征值就是  $\mathbf{a}$ .

22. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{A}^{100}$ .

解: (一般的解法) 先把矩阵  $\mathbf{A}$  对角化. 由

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$ .

当  $\lambda_1 = 1$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_1 = 1$  对应的特征向量为  $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)^T$ .

当  $\lambda_2 = 5$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_2 = 5$  对应的特征向量为  $\mathbf{p}_2 = (2, 1, 2)^T$ .

当  $\lambda_3 = -5$  时, 解方程  $(\mathbf{A} + 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} + 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_3 = -5$  对应的特征向量为  $\mathbf{p}_3 = (1, -2, 1)^T$ .

记  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(1, 5, -5)$ , 则  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ . 所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}.$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{100} &= \mathbf{P} \mathbf{A}^{100} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 5^{100} & 5^{100} \\ 0 & 5^{100} & -2 \cdot 5^{100} \\ 0 & 2 \cdot 5^{100} & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100} - 1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

另解. (一个碰巧的解法) 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & (a+c)d \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

若  $d = c - a$ , 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c^2 - a^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \\ &\dots\dots\dots \\ \begin{pmatrix} a^n & 0 & c^n - a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & c^{n-1} - a^{n-1} \\ 0 & b^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25^{50} - 1 \\ 0 & 25^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 25^{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100} - 1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

注 这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ , 计算  $\mathbf{A}^5$ .

解法一 注意到

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

所以

$$\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-3)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (-3)^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 81\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

解法二 由

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\mathbf{A},$$

可知

$$\mathbf{A}^5 = (-3)^4 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

再看一个题目.

已知  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{A}^{2006}$ .

解: 注意到  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{2006} &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2006 \text{ 个 } \mathbf{A}} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2005 \text{ 个 } (a+b+c) \text{ 相乘}} \\ &= (a+b+c)^{2005} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**23.** 在某国, 每年有比例为  $p$  的农村居民移居城镇, 有比例为  $q$  的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把  $n$  年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为  $x_n$  和  $y_n$  ( $x_n + y_n = 1$ ).

(1) 求关系式  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ , 求  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .

解: 由题设得

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-p)x_n + qy_n, \\ y_{n+1} = px_n + (1-q)y_n. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2) 由递推关系式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

代入  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0.5 \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

下求  $\mathbf{A}^n$ . 由

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)[\lambda-(1-p-q)],$$

得矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1-p-q$ .

当  $\lambda_1 = 1$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_1 = 1$  所对应的特征向量为  $\xi_1 = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ .

当  $\lambda_2 = 1-p-q$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - (1-p-q)\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由

$$\mathbf{A} - (1-p-q)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_2 = 1-p-q$  所对应的特征向量为  $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

令  $\mathbf{P} = (\xi_1, \xi_2)$ , 则  $\mathbf{P}$  可逆, 且  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1-p-q)$ . 所以  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \text{diag}(1, 1-p-q) \mathbf{P}^{-1}$ , 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q - (q-p)(1-p-q)^n \\ 2p + (q-p)(1-p-q)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

24. (1) 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{10} - 5\mathbf{A}^9$ ;

(2) 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{10} - 6\mathbf{A}^9 + 5\mathbf{A}^8$ .

解: (1) 矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  是实对称矩阵, 可找到正交相似变换矩阵  $\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}.$$

从而

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^{10} - 5\mathbf{A}^9 \\ &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{10}\mathbf{P}^{-1} - 5\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^9\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 同 (1) 求得正交相似变换矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda},$$

从而

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^{10} - 6\mathbf{A}^9 + 5\mathbf{A}^8 \\ &= \mathbf{A}^8(\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 5\mathbf{E}) \\ &= \mathbf{A}^8(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - 5\mathbf{E}) \\ &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^8\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1)  $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz;$

(2)  $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz;$

(3)  $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4.$

解: (1) 
$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(2) 
$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(3) 
$$f = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1)  $f(x) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x};$  (2)  $f(x) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

解: 对称地调整  $a_{ij}$  与  $a_{ji}$  的值, 使两者的和不变, 且  $a_{ij} = a_{ji}$  即可.

(1)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(2)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1)  $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3;$

(2)  $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

解: (1) 二次型  $f$  的矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$  由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda),$$

得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 1.$

当  $\lambda_1 = 2$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系  $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 取  $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

当  $\lambda_2 = 5$  时, 解方程  $(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 取  $p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

当  $\lambda_3 = 1$  时, 解方程  $(A - E)x = 0$ , 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系  $\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 取  $p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有

$$f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2.$$

(2) 二次型  $f$  的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ .

当  $\lambda_1 = -1$  时, 可得单位特征向量  $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,

当  $\lambda_2 = 3$  时, 可得单位特征向量  $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,

当  $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$  时, 可得单位特征向量  $p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

且有

$$f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$$

化成标准方程.

解: 把等式左边的二次型化为标准型即可. 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

由

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 10-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(11-\lambda),$$

得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 11$ . 下求它们对应的特征向量.

当  $\lambda_1 = 0$  时, 由

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_1 = 0$  对应的特征向量为  $\xi_1 = (0, 1, 1)^T$ . 单位化得  $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T$ .

当  $\lambda_2 = 2$  时, 由

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_2 = 2$  对应的特征向量为  $\xi_2 = (4, -1, 1)^T$ . 单位化得  $p_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, 1)^T$ .

当  $\lambda_3 = 11$  时, 由

$$\mathbf{A} - 11\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -11 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + 5r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可取  $\lambda_3 = 11$  对应的特征向量为  $\xi_3 = (1, 2, -2)^T$ . 单位化得  $p_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$ .

从而得正交矩阵

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

由正交变换  $(x, y, z)^T = \mathbf{P}(u, v, w)^T$ , 二次型  $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz$  化为标准型

$$2v^2 + 11w^2.$$

即二次曲面的标准方程为

$$2v^2 + 11w^2 = 1.$$

**29.** 证明: 二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  在  $\|\mathbf{x}\| = 1$  时的最大值为矩阵  $\mathbf{A}$  的最大特征值.

**证明:** 注意到  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵, 则存在正交矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{\Lambda}.$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 不妨设  $\lambda_1$  最大.

由  $\mathbf{P}$  为正交矩阵, 则  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ , 且  $|\mathbf{P}| = 1$ , 所以  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}$ . 则

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

这里  $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ .

当  $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{P} \mathbf{x}\| = |\mathbf{P}| \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$ , 即  $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$  时,

$$f = (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2) \leq (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \dots + \lambda_1 y_n^2) = \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_1.$$

故得证

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} f = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

**30.** 用配方法化下列二次型成规范型, 并写出所用变换的矩阵:

$$(1) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$$

$$(2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$(3) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3;$$

**解:** (1)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}(x_2 + x_3), \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2/\sqrt{2} + 3y_3, \\ x_2 = y_2/\sqrt{2} - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

把  $f$  化为规范型  $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 所用变换矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_2^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases}$$

把  $f$  化为规范型  $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ y_3 = \sqrt{2}x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 - y_3/\sqrt{2}, \\ x_2 = y_1 - y_2 + \sqrt{2}y_3, \\ x_3 = y_3/\sqrt{2}, \end{cases}$$

把  $f$  化为规范型  $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ , 所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求  $a$ .

解: 该二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

由正定的充要条件, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

即

$$\begin{cases} 1 - a^2 > 0, \\ -a(5a + 4) > 0. \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5} < a < 0.$$

32. 判定下列二次型的正定性:

(1)  $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3;$

(2)  $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4.$

解: (1)  $f$  的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

由

$$a_{11} = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -38 < 0,$$

根据定理 11 知  $f$  为负定.

(2)  $f$  的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix},$$

由

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0, \quad |\mathbf{A}| = 24 > 0,$$

根据定理 11 知  $f$  为正定.

**33.** 证明对称阵  $\mathbf{A}$  为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵  $\mathbf{U}$ , 使  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ , 即  $\mathbf{A}$  与单位阵  $\mathbf{E}$  合同.

**证明:** (充分性) 若存在可逆矩阵  $\mathbf{U}$ , 使  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ , 任取  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ , 且  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 则

$$\mathbf{U}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

(如果  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由  $\mathbf{U}$  可逆, 则  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 矛盾.)

对这个任取的  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = [\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{x}] = \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|^2 > 0.$$

从而矩阵  $\mathbf{A}$  为正定的.

(必要性) 设对称阵  $\mathbf{A}$  为正定的. 因  $\mathbf{A}$  是对称阵, 则存在正交阵  $\mathbf{Q}$ , 使  $\mathbf{A}$  对角化, 即

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值. 而  $\mathbf{A}$  为正定的, 所以  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 记对角阵

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}),$$

则

$$\mathbf{\Lambda}_1^2 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \mathbf{\Lambda}.$$

从而

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_1) (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_1)^T,$$

记  $\mathbf{U} = (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_1)^T$ , 则  $\mathbf{U}$  可逆, 而且得到  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ .