目 录

第一章 行列式

一、知识结构网络图 …… (1)
二、基本内容与重要结论 …… (3)
基本概念 …… (3)
重要定理 …… (4)
主要公式 …… (5)
方阵的行列式 …… (8)
克莱姆法则 …… (8)
三、典型例题分析选讲 …… (10)
数字型行列式 …… (10)
含参数行列式 …… (14)
抽象行列式 …… (16)
矩阵秩的概念 …… (18)
关于$|A|=0$ …… (19)
代数余子式求和 …… (20)
四、练习题精选 …… (22)
答案与提示 …… (23)

第二章 矩阵

一、知识结构网络图 …… (26)
二、基本内容与重要结论 …… (27)
基本概念 …… (27)
重要定理 …… (31)

主要公式 …… (33)
三、典型例题分析选讲 …… (35)
矩阵运算 …… (35)
伴随矩阵 …… (40)
可逆矩阵 …… (43)
初等变换 …… (45)
矩阵方程 …… (48)
四、练习题精选 …… (51)
答案与提示 …… (52)

第三章　n 维向量

一、知识结构网络图 …… (54)
二、基本内容与重要结论 …… (55)
基本概念 …… (55)
重要定理 …… (57)
三、典型例题分析选讲 …… (60)
正交矩阵 …… (60)
线性相关 …… (61)
线性表出 …… (68)
向量组的秩 …… (73)
矩阵的秩 …… (75)
Schmidt 正交化 …… (78)
向量空间 …… (78)
四、练习题精选 …… (81)
答案与提示 …… (82)

第四章　线性方程组

一、知识结构网络图 …… (84)
二、基本内容与重要结论 …… (85)

基本概念 …… (85)
主要定理 …… (86)
三、典型例题分析选讲 …… (88)
基础解系 …… (88)
解方程组 …… (92)
有解判定、解的结构、性质 …… (98)
公共解、同解 …… (104)
四、练习题精选 …… (107)
答案与提示 …… (108)

第五章 特征值与特征向量

一、知识结构网络图 …… (111)
二、基本内容与重要结论 …… (112)
基本概念 …… (112)
重要定理 …… (113)
三、典型例题分析选讲 …… (114)
特征值、特征向量 …… (114)
相似、相似对角化 …… (122)
求相似对角化时的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ …… (126)
用相似求 $\boldsymbol{A}^n$ …… (130)
求参数的问题 …… (132)
反求矩阵 A …… (134)
实对称矩阵 …… (135)
四、练习题精选 …… (141)
答案与提示 …… (142)

第六章 二次型

一、知识结构网络图 …… (145)
二、基本内容与重要结论 …… (146)

重要概念 …… (146)
主要定理 …… (148)
三、典型例题分析选讲 …… (149)
二次型的标准形 …… (149)
二次型的正定性 …… (155)
矩阵的等价、相似、合同 …… (158)
四、练习题精选 …… (160)
答案与提示 …… (160)

附录 45分钟水平测试

自测(一) …… (163)
自测(二) …… (163)
自测(三) …… (164)
参考答案与提示 …… (165)

第一章　行列式

一、知识结构网络图

- **行列式**
  - **概念**　不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - **性质**
    - 经转置行列式的值不变
    - 某行有公因数 k,可把 k 提到行列式外
    - 某行所有元素都是两个数的和,则可写成两个行列式之和
    - 两行互换行列式变号
    - 某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变
  - **展开式** —— **代数余子式**
    - $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$　(按 i 行展开)
    - $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$　(按 j 列展开)
  - **计 算**
    - **数字型**
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
    - **抽象型**
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|A| = \prod \lambda_i$
  - **证 $|A| = 0$**
    - $Ax = 0$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(A) < n$
    - 0 是 A 的特征值
    - $|A| = -|A|$
  - **应用**
    - $Ax = 0$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克莱姆法则
    - 特征值计算

学习札记：

【评注】(1) 二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

(2) 对行列式的性质 3 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$, 由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和, 所以若用性质 3 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3) 要会用行列式性质及展开定理计算数字型行列式

(4) 要熟悉抽象型行列式的计算.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基本概念

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列.通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

定义 1.2　一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**.用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

例如,在 5 级排列 25134 中,有逆序 21,51,53,54,因此排列 25134 的逆序数为 4,即 $\tau(25134)=4$.所以排列 25134 是偶排列.

定义 1.3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如,若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项,那么根据行列式的定义,它应是不同行不同列元素的乘积.因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列的逆序数

$$\tau(4312)=3+2+0=5$$

是奇数,所以该项所带符号为负号.

定义 1.4　在 n 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 $\boldsymbol{M}_{ij}$. 而称 $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$，即

$$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij} \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$ 即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.2 n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.3 设 n 阶行列式

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i \neq k \quad (i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \tag{1.5}$$

当 $j \neq k \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \tag{1.6}$$

【评注】 根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，类似地由(1.4)与(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

$$\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用，关于伴随矩阵 A^* 要防止两种错误：

(1) 行列式 $|A|$ 中第 i 行元素的代数余子式在伴随矩阵 A^* 中是第 i 列；

(2) 求代数余子式 A_{ij} 时，不要忘记所带正负号 $(-1)^{i+j}$。

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.7}$$

(2) 关于副对角线的行列式

学习札记：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \tag{1.8}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \tag{1.11}$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}| \tag{1.12}$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

学习札记：

【评注】 设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维非零列向量，若

$$A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$$

则称 λ 是矩阵 A 的特征值，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\lambda\alpha-A\alpha=0\Rightarrow(\lambda E-A)\alpha=0$

知 α 是齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解，故系数行列式 $|\lambda E-A|=0$

关于(1.12)的推导请参看 P1 之点评(2).

特别地，若秩 $r(A)=1$，由(1.12)知特征多项式

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-(\sum a_{ii})\lambda^2=(\lambda-\sum a_{ii})\lambda^2$$

那么，矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=0$.

【例 1.1】 (1992,3)* 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，$C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$，则 $|C|=$ ______.

【分析】 由拉普拉斯展开式(1.10)，有

$$|C|=\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|=(-1)^{mn}ab$$

所以应填 $(-1)^{mn}ab$

【例 1.2】 (1996,1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

[ ]

【分析】 本题解法较多，较简单的方法是用两列对换，两行对换，把零元素调至行列式的一角，就可用拉普拉斯展开式，例如

$$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ b_4 & a_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}$$

而知应选(D).

【例 1.3】 $\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=$ ______.

注：(1992.3) 意为本题选自 1992 年数学三真题，下同

学习札记：

【分析】 把第 2 行加至第 1 行，提取公因式，即为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

【例 1.4】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵且 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值，那么由(1.12)有

$$\begin{aligned} |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| &= \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+s_2\lambda-|\boldsymbol{A}| \\ &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \\ &= \lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

比较同次方的系数，有

$$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i \text{ 与 } \sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$$

方阵的行列式

(1) 若 A 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$； (1.12)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$； (1.13)

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$； (1.14)

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$； (1.15)

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$； (1.16)

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$； (1.17)

(7) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. (1.18)

克莱姆法则

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

学习札记：

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} \tag{1.19}$$

其中

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0，则方程组只有零解.

推论 2 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，则系数行列式 $|A| = 0$.

【例 1.5】 三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 16 \end{cases}$$

的解中，未知数 x_2 的值必为

(A)1　　(B) $\frac{5}{2}$　　(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{1}{6}$　　[　　]

【分析】 因为方程组的系数矩阵行列式是范德蒙行列式，由(1.11)有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1-2)(3-2)(3-(-1)) = -12.$$

根据克莱姆法则，$x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}$ 其中

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix} = (4-2)(3-2)(3-4) = -2$$

于是 $x_2 = \frac{1}{6}$，所以应选(D).

【例 1.6】 齐次线性方程组

学习札记：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ \lambda^2x_1+2x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

有非零解，则 $\lambda=$ ________.

【分析】 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 必是齐次线性方程组的解，现在方程组又有非零解，说明方程组的解不唯一，那么，根据克莱姆法则必有系数行列式为 0. 因为

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ \lambda^2 & \lambda^2+2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

所以，λ 为 1 或 2.

三、典型例题分析选讲

数字型行列式

【例 1.7】 (1999,2)

记行列式 $\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　[　]

【分析】 同方程 $f(x)=0$ 有几个根，也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\ 2x-2 & 1 & 0 & -1\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2\\ 4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(2)+(4)}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\ 2x-2 & 1 & 0 & 0\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1\\ 4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\ 2x-2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2 & -1\\ x-7 & -6\end{vmatrix}\qquad(\text{拉普拉斯}(1.9))$$

易见 $f(x)$ 是二次多项式，故应选(B).

学习札记：

【评注】　本题难度值 0.55. 由于行列式的每一个位置都含有 x，若立即展开处理是不妥的，应当先恒等变形消除一些 x 再展开. 不要错误地认为这样的 $f(x)$ 一定是 4 次多项式，其实适当选系数可构造出 0 至 4 任一次数的多项式.

【例 1.8】　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】　各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开有

$$D=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{4}a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

由(1.7) 知，$D=x^3(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)$

【例 1.9】　4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】　对本题可用逐行相加的技巧，第一行的 x 倍加至第二行，然后第二行的 x 倍加至第三行，如此继续，有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(-1)^{4+1}(-1)^3$$

学习札记：

$$= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

【例 1.10】 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$$

【分析】 对于爪型行列式,将其转化为上(或下)三角行列式.

$$D = 2\cdot 3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = -2.$$

【评注】 对于 $|\nwarrow|$ 与 $|\searrow|$ 型行列式,可用主对角线元素化其为上(下)三角型来计算.

对于 $|\swarrow|$ 与 $|\nearrow|$ 型行列式,可用副对角线元素化其为 |◸| 或 |◿| 型来计算.

【例 1.11】 行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

的值

(A)264　　(B)364　　(C) -264　　(D) -364　　[　　]

【分析】 对于这类三对角线行列式通常可用递推法,例如按第 1 列展开,有

$$D_5 = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4D_4 - 3D_3$$

于是

$$D_5 - D_4 = 3(D_4 - D_3) = 3^2(D_3 - D_2) = 3^3(D_2 - D_1) = 3^5$$

那么

$$D_5 = D_4 + 3^5 = D_3 + 3^4 + 3^5 = D_2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = -\sqrt{2} \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < 0)$$

$\therefore$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，只右连续．$x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点．

【例 36】 已知 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(e^n + x^n)}{n} \quad (x>0)$

(1) 求 $f(x)$；　　　(2) 函数 $f(x)$ 在定义域内是否连续？

【解】 (1) 当 $0 < x \leqslant e$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\{e^n[1+(\frac{x}{e})^n]\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \ln[1+(\frac{x}{e})^n]}{n} = 1$$

当 $e < x$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\{x^n[1+(\frac{e}{x})^n]\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln x + \ln[1+(\frac{e}{x})^n]}{n} = \ln x$$

$\therefore$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant e \\ \ln x & x > e \end{cases}$$

(2)
$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \ln x = 1 \qquad \lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} 1 = 1 \qquad f(e) = 1$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x = e$ 处连续．

在其余点上，$f(x)$ 是初等函数且有定义，故连续．

$\therefore$ $f(x)$ 在其定义域内连续．

【例 37】 若对任意 x_1、x_2 有 $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)\neq 0$，证明：对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 连续．

【证明】 $\because$ 对一切 x_1、x_2 有 $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$

$\therefore$ 当 $x_1 = x_2 = 0$ 时，$f(0) = f^2(0)$．

$\because$ $f(0)\neq 0$　　　　$\therefore$ $f(0) = 1$

对 $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x)f(\Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x\to 0} f(x)[f(\Delta x) - 1]$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=1$

$\therefore$
$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x) - 1] = f(0) - 1 = 0$$

$\therefore$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$　　　故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．

【例 38】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & x\geqslant 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$，$g(x) = \sin x$，讨论 $f[g(x)]$ 的连续性．

【解】 $\because$
$$f[g(x)] = \begin{cases} 1 & \sin x \geqslant 0 \\ -1 & \sin x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \\ -1 & (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \end{cases}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

又
$$\lim_{x\to 2k\pi^-} f[g(x)] = \lim_{x\to 2k\pi^-}(-1) = -1 \qquad \lim_{x\to 2k\pi^+} f[g(x)] = \lim_{x\to 2k\pi^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to (2k+1)\pi^-} f[g(x)] = \lim_{x\to (2k+1)\pi^-} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to (2k+1)\pi^+} f[g(x)] = \lim_{x\to (2k+1)\pi^+}(-1) = -1$$

$\therefore$ $f[g(x)]$ 在 $x = k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处不连续而在其余点处连续．

2. 在闭区间上连续函数的性质

【例 39】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) < a$，$f(b) > b$．证明：必 $\exists\,\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta) = \zeta$．

【证明】 设 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

又
$$F(a) = f(a) - a < 0, \qquad F(b) = f(b) - b > 0$$

学习札记：

$$= 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

【例 1.14】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【分析】 每列元素都是一个 a 与 $n-1$ 个 b，故可把每行均加至第一行，提取公因式 $a+(n-1)b$，再化为上三角行列式，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

含参数行列式

【例 1.15】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$，则 $\lambda =$ ____.

【分析】 这是 λ 的三次方程，对于三次方程尽力用因式分解法求其根.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

学习札记：

所以 λ 为 2,3 和 6.

本题的解法很多,例如

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-6 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-2)$$

【评注】 对于特征多项式应两行(或列)加加减减,至多是三行(或列)的加加减减找出 $\lambda-a$ 的公因式,然后再解一个二次方程,就可求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,这一类行列式的计算要掌握好.

【例 1.16】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$,则 $\lambda =$ ________.

【分析】 把第 3 列加至第 1 列,第 1 列有公因式 $\lambda-1$.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+1)^2 = 0$$

所以 λ 为 $1,-1,-1$.

【例 1.17】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = 0$,则 $\lambda =$ ________.

【分析】 把第二行加至第一行,第一行有公因式 $\lambda-a-1$

$$\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-a+1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a+1 & 1 \\ 2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

所以 λ 为 $a+1,a+1,a-2$.

学习札记：

【评注】 例1.16与例1.17分别是数学四在1999年与2001年解答题中所出现的行列式，前者特征值与参数 k 无关，后者特征值与参数 a 有关，应当会计算这些含参数的行列式.

抽象行列式

【例1.18】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^T|=$ ________.

【分析】 由于 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，$|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$，故

$$|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^T|=2^n|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^T|=2^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^T|=2^n|\boldsymbol{A}|^{n-1}|\boldsymbol{B}|=-3\cdot 2^{2n-1}$$

【例1.19】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

【分析】 由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 没有运算公式，对这一类行列式通常应当用矩阵性质恒等变形将其化为乘积的形式.

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 或 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以本题有两种置换方法

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}(-3\boldsymbol{B}^{-1})-(2\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=|-5\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-5)^n|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=(-1)^{n+1}\frac{5^n}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|&=\left|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*(-\frac{1}{3}\boldsymbol{B}^*)\right|\\&=\left|\frac{5}{6}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\right|=(\frac{5}{6})^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^*|\\&=(\frac{5}{6})^n\cdot 2^{n-1}(-3)^{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{5^n}{6}\end{aligned}$$

【例1.20】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=4\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{BA}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

【分析】 由于 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，易知本题 $|\boldsymbol{A}|=3$，那么，对已知矩阵方程左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$3\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{AB}$$

即有 $3(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$. 两边取行列式，有

$$3^3|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=4^3 \text{ 又 } |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=16$$

学习札记：

故 $|B|=\dfrac{4}{27}$.

【例 1.21】 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 4 维列向量，若 4 阶行列式 $|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \gamma|=a$，$|\beta+\gamma\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|=b$，那么 4 阶行列式 $|2\beta\ \ \alpha_3\ \ \alpha_2\ \ \alpha_1|=$

(A)$2a-b$　(B)$2b-a$　(C)$-2a-2b$　(D)$-2a+2b$　[　]

【分析】 利用行列式性质，有

$$|2\beta\ \ \alpha_3\ \ \alpha_2\ \ \alpha_1|=2|\beta\ \ \alpha_3\ \ \alpha_2\ \ \alpha_1|$$

由于

$$\begin{aligned}|\beta+\gamma\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|&=|\beta\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|+|\gamma\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|\\&=-|\beta\ \ \alpha_3\ \ \alpha_2\ \ \alpha_1|-|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \gamma|\end{aligned}$$

所以

$$|\beta\ \ \alpha_3\ \ \alpha_2\ \ \alpha_1|=-|\beta+\gamma\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|-|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \gamma|=-a-b$$

故应选(C).

【例 1.22】 已知 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量，若 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_3+\alpha_1$，则行列式 $|A|=$ ＿＿＿＿＿.

【分析】 利用分块矩阵，有

$$A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$$

两边取行列式，并用行列式乘法公式(1.13)，有

$$\begin{aligned}|A||\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|&=|\alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3\ \ \alpha_3+\alpha_1|\\&=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ \ \alpha_2+\alpha_3\ \ \alpha_3+\alpha_1|\\&=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ \ -\alpha_1\ \ -\alpha_2|\\&=2|\alpha_3\ \ -\alpha_1\ \ -\alpha_2|\\&=2|\alpha_3\ \ \alpha_1\ \ \alpha_2|\\&=2|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|\end{aligned}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，行列式 $|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3|\neq 0$，从而得 $|A|=2$.

或者，

$$A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$$

即

$$A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad(*)$$

记 $P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$，则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，知 P 是可逆矩阵，从而

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

由(1.18)知

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$$

学习札记：

其实由(∗)式两边取行列式，即可得上式.

【例 1.23】 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ 则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$ ________.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，于是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，那么 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值是 2,3,4，从而 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1,2,3，于是 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=1\times2\times3=6$.

或者，由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，进而 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 即 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|$，又因 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&\\&\frac{1}{3}&\\&&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\sim\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}\sim\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$

从而 $|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{vmatrix}=6$. 故 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=6$.

若现在看本题有困难可在复习第五章特征值之后再来处理.

【评注】 对于抽象型行列式的计算，可能涉及矩阵的恒等变形(如例 1.18—1.20)，可能考查行列式的性质(如例 1.21，1.22 解法一)，也可能用特征值、相似等处理(如例 1.22 解法二，例 1.23)，这一类题目计算量一般不会很大，但涉及知识点多，公式法则多.

矩阵秩的概念

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩记为 $r(A)$. 例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&6&-1&1\\0&2&4&0&3\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

其中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq0$$

而 $\boldsymbol{A}$ 中又没有 4 阶子式，故 $\boldsymbol{A}$ 中不为零的子式最高是 3 阶，所以秩 $r(\boldsymbol{A})=3$.

关于矩阵的秩要理解清楚：

学习札记：

$r(A)=r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0，任何 $r+1$ 阶子式(若还有)必全为 0.

$r(A)<r \Leftrightarrow A$ 中 r 阶子式全为 0

$r(A) \geqslant r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0

特别地，

$r(A)=0 \Leftrightarrow A=\mathbf{0}$

$A \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow r(A) \geqslant 1$

若 A 是 n 阶矩阵，$r(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

$r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$ 不可逆

若 A 是 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A) \leqslant \min(m,n)$

关于 $|A|=0$

【例1.24】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非 0 矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$，证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【证法一】 (反证法)若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的两端，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

与 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$ 矛盾，故 $|\boldsymbol{A}|=0$

【证法二】 (用秩)据已知有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathbf{0}$，那么

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \leqslant n$$

因为 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \neq \mathbf{0}$，那么秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \geqslant 1$ 从而秩 $r(\boldsymbol{A})<n$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【证法三】 (用 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解)据已知有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，又因 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \neq \mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【评注】 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 是考研题中一个常见的已知条件，对于 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 应当有两种思路：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$，则

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

(2) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$

【例 1.25】 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\zeta\zeta^T$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，ζ 为 3 维非零列向量，ζ^T 是 ζ 的转置，若 $\zeta^T\zeta=1$，证明 $|\boldsymbol{A}|=0$(1996，1 改写).

【证法一】 (用特征值)由于 $\zeta^T\zeta=1$，且 $\zeta \neq \mathbf{0}$，有

$$\boldsymbol{A}\zeta=(\boldsymbol{E}-\zeta\zeta^T)\zeta=\zeta-\zeta(\zeta^T\zeta)=\zeta-\zeta=0\zeta$$

按定义知 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(ζ 是属于 $\lambda=0$ 的特征向量)，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【证法二】 (用特征值)因为 ζ 是 3 维非零列向量，故 $\zeta\zeta^T$ 是秩为 1 的三阶矩阵，据(1.12)有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\zeta\zeta^T|=\lambda^3-\lambda^2=0$$

即矩阵 $\zeta\zeta^T$ 的特征值是 1,0,0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\zeta\zeta^T$ 的特征值是 0,1,1. 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

学习札记：

【评注】 本题的证法很多，你还能用别的方法吗？如果对证法二有困难，可在复习完特征值之后再来看这种解法.

【例 1.26】 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $AA^T=E$，(E 为 n 阶单位矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵)，$|A|<0$，证明 $|A+E|=0$.

【证】 因为

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|$$
$$=|A(E+A)^T|=|A||E+A|$$

所以 $(1-|A|)|A+E|=0$

又因 $|A|<0$ 于是 $1-|A|>0$

故必有 $|A+E|=0$

【例 1.27】 (1994,1) 设 A 为 n 阶非零矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

【证】 由于 $A^*=A^T$，即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即 $A_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$

因为 $A\neq 0$，不妨设 $a_{ij}\neq 0$，那么用按行展开公式(1.3)，有

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0$$

故 $|A|\neq 0$

代数余子式求和

【例 1.28】 设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

则 (1)$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=$ ________;

(2)$A_{31}+2A_{32}+A_{34}=$ ________.

【分析】 (1) 由于 $a_{11}=1, a_{21}=2. a_{31}=3, a_{41}=4$，据(1.6)立即有

$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0$

(2) 因为 A_{ij} 与元素 a_{ij} 的大小无关，可构造一个行列式(用 A_{3j} 的系数置换 $|A|$ 第 3 行的元素)，即

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

学习札记：

则行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 第三行元素的代数余子式是一样的，一方面，对 $|\boldsymbol{B}|$ 按第三行展开(用(1.3))有

$$|\boldsymbol{B}| = A_{31} + 2A_{32} + A_{34}$$

另一方面，对行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 恒等变形，有

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 96$$

所以，$A_{31} + 2A_{32} + A_{34} = 96$.

【例 1.29】 (2001,4) 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

则第 4 行各元素余子式之和的值为________.

【分析】 本题主要考查余子式的概念及三阶行列式的计算，所谓 a_{ij} 的余子式 M_{ij}，就是把行列式 $|A|$ 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列后所得到的 $n-1$ 阶行列式，根据余子式的定义，即求

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \cdot 8 + 0 + 3 \cdot 14 + (-7)(-1)^{3+2}(-2) = -28$$

或者，转换为代数余子式来求解，即

$$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

【评注】 本题难度值仅为 0.2，是一个值得考生思考的问题，复习要全面，概念要清晰，计算要准确，如若求第 4 行元素代数余子式的和，则有

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \frac{1}{2}(2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + 2A_{44})$$

$$= \frac{1}{2}(a_{21}A_{41} + a_{22}A_{42} + a_{23}A_{43} + a_{24}A_{44}) = 0$$

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&5\\2&4&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=$ ______.

(2) $\begin{vmatrix}1-a&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$ ______.

(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}=$ ______.

(4) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\-1&1&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{vmatrix}=$ ______.

(5) $\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0&b\\b&a&0&\cdots&0&0\\0&b&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b&a\end{vmatrix}=$ ______.

(6) $\begin{vmatrix}a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}=$ ______.

2. 选择题

(1) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为4维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3|=5$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta}\quad\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3|=-1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$

(A)4　　(B)6　　(C)32　　(D)48　　[　　]

学习札记：

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A) 当 $m>n$，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

(B) 当 $m>n$，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

(D) 当 $n>m$，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$ [　　]

(3) 设 A 为 n 阶矩阵，则行列式 $|A|=0$ 的必要条件是

(A) A 的两行元素对应成比例

(B) A 中必有一行为其余各行的线性组合

(C) A 中有一列元素全为 0

(D) A 中任一列均为其余各列的线性组合 [　　]

3. **求 x 的值**

(1) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix}=0$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix}=0$

4. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满是 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

5. 已知 a,b,c 不全为零，证明齐次方程组

$$\begin{cases} \quad ax_2+bx_3+cx_4=0 \\ ax_1+x_2 \qquad\qquad =0 \\ bx_1 \qquad +x_3 \qquad =0 \\ cx_1 \qquad\qquad +x_4=0 \end{cases}$$

只有零解.

答 案 与 提 示

1. (1) 18　　(2) $1-a+a^2-a^3+a^4$　　(3) $n!$

(4) $\frac{1}{2}n(n+1)$　　(5) $a^n+(-1)^{n+1}b^n$　　(6) $b^{n-1}(\sum a_i+b)$

【提示】

(1) 不必去求伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，根据 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，有

$$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|=(\frac{1}{2})^3|\boldsymbol{A}^*|=\frac{1}{8}|\boldsymbol{A}|^2$$

(2) 把各列均加至第 1 列，然后按第 1 列展开，可建立递推关系，即

$$D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

学习札记：

$$= D_3 + (-a)\cdot(-1)^{4+1}a^3 = D_3 + a^4$$

那么 $$D_3 = D_2 + (-a)(-1)^{3+1}a^2 = D_2 - a^3$$

$$D_2 = D_1 + (-a)(-1)^{2+1}a = 1 - a + a^2$$

三个式子相加可得 D_4.

(3) 把第一行分别加至其它各行.

(4) 把每列均加至第 1 列.

(5) 本题已有大量的 0,可立即用展开公式来计算,建议按第 1 行展开,比按第 1 列展开要简洁.

(6) 把各列均加至第 1 列,提取公因式 $b+\sum a_j$ 然后把第 1 行的 -1 倍分别加至其余各行,可得上三角行列式.

2. (1)(C)　　(2)(B)　　(3)(B)

【提示】

(1) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\quad 2\boldsymbol{\gamma}_1\quad 2\boldsymbol{\gamma}_2\quad 2\boldsymbol{\gamma}_3| = 8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2\quad \boldsymbol{\gamma}_3|$

$$= 8(|\boldsymbol{\alpha}\quad \boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2\quad \boldsymbol{\gamma}_3| + |\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2\quad \boldsymbol{\gamma}_3|)$$

(2) 因为 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵,行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充分必要条件是秩 $r(\boldsymbol{AB})<m$. 由于

$$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B}) \leqslant \min(m,n)$$

可见当 $m>n$ 时,必有

$$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B}) \leqslant n < m$$

故应选(B).

或者,由于方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解必是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解,而 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组,因此当 $m>n$ 时,方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解,从而 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,那么行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(3)(A)、(C) 均是 $|A|=0$ 的充分条件并不必要,只要有一行(列)是其余各行(列)的线性组合就可保证 $|A|=0$.

3. (1)5,6,0　　(2)1,2,6

【提示】

(1) 把第 2 行的 -2 倍加至第 3 行,可出 $x-5$ 的公因式,即

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2(x-5) & x-5 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5)\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (x-5)\begin{vmatrix} x-1 & 5 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-5)(x^2-6x)$$

(2) 把第 1 行的 -3 倍、-4 倍分别加至第 3 行与第 4 行,可用拉普拉斯展开式,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = 0$$

4. 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$ 得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$，故齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0$.

【评注】 请参看例 1.24 的各种证明方法.

5. 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2) \neq 0$$

【评注】 请参看例 1.10 爪型行列式的计算.

学习札记：

第二章　矩　　阵

一、知识结构网络图

- **矩阵**
  - **概念** —— $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表格
  - **运算**
    - $A+B, kA$
    - AB
    - A^T

    → 方阵的幂
  - **初等变换**
    - **初等矩阵**
      - 初等矩阵 P 左乘 A 所得 PA 就是 A 作了一次与 P 同样的行变换
      - $E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k}),E_{i,j}^{-1}=E_{i,j},E_{i,j}^{-1}(k)=E_{i,j}(-k)$
    - **等价**　$A\rightarrow\cdots\rightarrow B\quad\Leftrightarrow\quad PAQ=B,P,Q$ 可逆
  - **逆矩阵**
    - **求法**
      - 用定义
      - $(A\mid E)\xrightarrow{\text{行}}(E\mid A^{-1})$
      - 用伴随 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$
      - 用分块　$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$
    - **证法**
      - $|A|\neq 0$
      - $r(A)=n$
      - 特征值
      - 反证法
  - **秩**
    - **计算**　初等变换法　定义法
    - **性质**　$r(AB)\leqslant\min[r(A),r(B)]$；如 A 可逆，则 $r(AB)=r(B)$
  - **特殊矩阵**
    - 伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$，$AA^*=A^*A=|A|E$
    - 对称矩阵 $A^T=A\quad\Leftrightarrow\quad a_{ij}=a_{ji}$
    - 反对称矩阵 $A^T=-A\quad\Leftrightarrow\quad a_{ii}=0,a_{ij}=-a_{ji}$
    - 正交矩阵 $AA^T=A^TA=E\quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}=A^T$
    - 对角矩阵 $A_1A_2=A_2A_1$，$\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^n&&&\\&a_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^n\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&\\&\frac{1}{a_2}&\\&&\frac{1}{a_3}\end{pmatrix}$$，其中 a_1,a_2,a_3 非 0.

学习札记：

【评注】　矩阵是线性代数的核心内容，它贯彻线性代数的始终．复习时要引起考生足够的重视，概念要清晰，符号要习惯，运算要正确、迅速、简捷．

(1) 理解矩阵的概念，了解几种特殊矩阵（单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵）的定义及性质．

(2) 掌握矩阵运算（加、减、数乘、乘法）及其运算规律，掌握矩阵转置的性质，掌握行列式乘法公式，了解方阵的幂．

(3) 理解逆矩阵的概念，掌握矩阵可逆的充要条件，掌握可逆矩阵的性质，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求矩阵的逆．

(4) 掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质及矩阵等价的概念，理解矩阵秩的要领，掌握用初等变换求矩阵的逆和秩．

(5) 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算．

二、基本内容与重要结论

基本概念

定义 2.1　$m\times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为是一个 $m\times n$ **矩阵**，当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**或叫 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**.

如果一个矩阵的所有元素都是 0，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 $\boldsymbol{0}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$，如果 $m=s$，$n=t$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**.

两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 2.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵.

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

学习札记：

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**，记为 $k\boldsymbol{A}$.

定义 2.4 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记成 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则

$$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|.$$

【评注】 矩阵是表格，行列式是数，这两个概念要区分清楚，当矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$ 时，行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 是否相等是不清楚的. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

虽 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，但 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. 特别地，当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时，行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是否为 0 是不清楚的. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \text{或} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

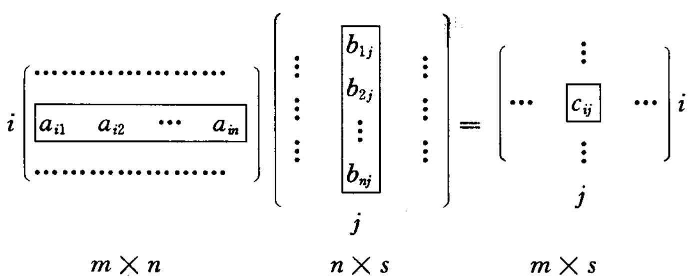
虽均有 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，但行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 前者为 0，后者不为 0.

定义 2.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{2.2}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵的乘法可图示如下：



【评注】 矩阵的乘法运算是重要的、基本的、也是一些考生不重视常出错的地方. 首先，要会作乘法运算，例如

学习札记：

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\quad 0\quad 1)=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&0&2\\6&0&3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=(2\quad 0\quad 1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=5$$

前者 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 是 3 阶矩阵，后者 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数，这里的运算要正确，符号不应混淆.

其次，关于矩阵乘法要注意三个方面：

(1) 矩阵乘法没有交换律，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$$

特别地

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

但 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$

(2) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

例如

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}$ 虽 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，

但

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

在这里，矩阵运算与数的运算不要混淆.

(3) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$

有　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\3&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{AC}$

显然 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

但若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=n$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 这是因为：

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{0}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\leqslant n\Rightarrow r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=0$，故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

学习札记：

定义 2.6 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的转置矩阵，记为 A^T.

定义 2.7 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，行列式 $|A|$ 的各个元素 a_{ij} 的代数余子式所构成的如下的矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

【评注】 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，由行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 得到代数余子式 $A_{11}=d, A_{12}=-c, A_{21}=-b, A_{22}=a$，所以矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

对于 2 阶矩阵，用**主对角线对换，副对角线变号**即可求出伴随矩阵.

例如，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

定义 2.8 设 A 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB=BA=E(\text{单位矩阵}) \tag{2.3}$$

成立，则称 A 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵.

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，且 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

定义 2.9 对 $m\times n$ 矩阵，下列三种变换

(1) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行(列)；

(2) 互换矩阵某两行(列)的位置；

(3) 把某行(列)的 k 倍加至另一行(列)；

称为是矩阵的**初等行(列)变换**，统称为矩阵的**初等变换**.

定义 2.10 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A\cong B$.

定义 2.11 单位矩阵 E 经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**.

例如，3 阶单位矩阵作如下初等变换

$$E_{1,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E\ \text{一，二两行互换(或一，二两列互换)}$$