数学考研模拟考试试卷 1

数 学 一

考生注意：(1) 本试卷共三大题，23 小题，满分 150 分.
(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一								二						三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

(1) 设 $f(a)=0$，则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的充要条件是（　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right]$存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to -\infty} h\left[f\left(a-\frac{1}{h}\right)\right]$存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)}{\sin h}$ 存在

(2) 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$，$g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　）.

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶但不等价的无穷小

(3) 设抛物线 $y^2=2px$ 在与直线 $y=x$ 交点处的曲率半径 $R=5\sqrt{5}$，则此抛物线在这点处的切线方程是（　）.

(A) $x-2y+2=0$

(B) $x+2y-6=0$

(C) $2x-y-2=0$

(D) $2x+y-6=0$

(4) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty)$，则$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=$（　）.

(A) $\frac{1}{2}[f(x)+1]$

(B) $\frac{1}{2}[f(x)-1]$

(C) $\frac{1}{2}[1-f(x)]$

(D) $-\frac{1}{2}[f(x)+1]$

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r-1} = \boldsymbol{\alpha}_r + \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r + \boldsymbol{\alpha}_1$（ ）.

(A) r 为奇数时线性无关，r 为偶数时线性相关

(B) r 为奇数时线性相关，r 为偶数时线性无关

(C) 对任意的 r 都线性相关

(D) 对任意的 r 都线性无关

(6) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（ ）.

(A) 合同不相似　　(B) 相似不合同　　(C) 合同且相似　　(D) 不相似也不合同

(7) 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 X 和 Y 之间的关系为（ ）.

(A) 独立同分布　　(B) 独立不同分布

(C) 不独立但同分布　　(D) 不独立也不同分布

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则下列随机变量中服从 t 分布的是（ ）.

(A) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 / (n-1)}}$　　(B) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 / (n-1)}}$

(C) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 / (n-1)}}$　　(D) $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 / n}}$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

(9) $\lim\limits_{x \to 0^+}(e^{x^2} - 1)^{\sin x} =$ ________.

(10) 设 $z = x^y + f(\sqrt{x} - 1)$. 若当 $y = 1$ 时，$z = 2x$. 则 $\int \dfrac{1}{f(x)} dx =$ ________.

(11) 设 $I = \oint\limits_L e^{y^2} dx + x dy$，其中 L 是椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$. 则 $I =$ ________.

(12) 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{n^2} x^n (a > 0)$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$，则 a ________.

(13) $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = a$，$|\boldsymbol{B}| = b$，若 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{D}| =$ ________.

(14) 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,4;4,16;\dfrac{1}{4})$，$Z = X - Y$. 则 $\mathrm{Cov}(X,Y) =$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 10 分)已知曲线 $y=y(x)$ 是满足方程 $y'-y=\cos x-\sin x$ 的有界函数. 求曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴在$[0,\pi]$内所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(16)(本题满分 10 分)已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}$ 收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{k^2+n^2}\right)$ 收敛.

(17)(本题满分 10 分)设积分 $\int_L[f'(x)+2f(x)+e^x]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,且 $f(0)=0, f'(0)=1$,试计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^x]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 的值.

(18)(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可微，且 $f(1)=3\int_{1/3}^{2/3}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

(19)(本题满分 10 分)有一半径为 R，高为 h 的均匀直圆柱面(面密度为 1). 求它对底面中心一单位质点的引力.

(20)（本题满分 11 分）设 A、B 均为 n 阶矩阵，且 $E-AB$ 可逆，证明：$E-BA$ 可逆.

(21)（本题满分 11 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$r(A)=n-1$，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $A_{11}\neq 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}\neq 0$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的非零特征值及对应的特征向量.

(22)（本题满分 11 分）已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-2x}, & x>0,2<y<6\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求(1) $P\{X\geqslant 3Y-2\}$.

(2) $Z=3X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$$

(1) 分别求关于 x 的二次方程 $3x^2-Xx+3=0$ 有二重根的概率 α 和无实根的概率 β.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来知总体 X 的简单随机样本，求未知参数 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_L$.

(3) $\hat{\sigma}_L$ 是否是 σ 的无偏估计量？为什么？

(4) $\hat{\sigma}_L$ 是否是 σ 的一致估计量？为什么？

数学一 卷1解答与评分参考

一、选择题

(1) (D). 选项(A)、(C) 最多只能保证右导数或左导数存在，故不能选；而(B) 与 $f(a)$ 的值无关，故只有(D) 正确，选(D).

注：(A)、(C) 可用反例：$f(x)=|x-a|$，显然在 a 点不可导，且 $f(a)=0$，但 $\lim\limits_{h\to+\infty} n\left|\frac{1}{h}\right|=1$；$\lim\limits_{h\to-\infty} h\left|\frac{1}{h}\right|=-1$ 存在. 对(B) 可令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a\\ 0, & x=a\end{cases}$，则 $f(a)$ 在 $x=a$ 点不连续，自然不可导，但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=0$ 存在.

(2) (A). 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x x\ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{[1-\cos(\sin x^2)]2x\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{2[1-\cos(\sin x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{\sin^2 x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4x^3}=\infty$$

选(A).

(3) (A). 抛物线写作 $x=\dfrac{y^2}{2p}$，当 $x=y$ 时得 $x=y=2p$. 这时 $x'=\dfrac{y}{p}\Big|_{y=2p}=2.\ x''=\dfrac{1}{p}$，于是在$(2p,2p)$ 点的曲率半径为 $R=5\sqrt{5}p=5\sqrt{5}$，故 $p=1$. 抛物线方程是 $y^2=2x$. 点是$(2,2)$，这时 $y'=\dfrac{1}{2}$，故切线为 $x-2y+2=0$，选(A).

(4) (B). $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，故$\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x^2}-1)=\dfrac{1}{2}[f(x)-1]$.

(5) (A). 从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 变换矩阵的行列式为(r 阶)：

$$\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{r+1}$$

故 r 为奇数时，两向量组等价；r 为偶数时，行列式为 0，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的秩小于 r. 故 r 为奇数时线性无关；为偶数时线性相关. 选(A).

(6) (C). 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}$，且$(\boldsymbol{E}_{13})^{-1}=\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{E}_{13}^{\mathrm{T}}$，所以应选(C).

(7) (C). 当 $|x|\leqslant 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

即
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同样可解得
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y|\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以 X、Y 不独立,但同分布,故应选(C).

(8)(C). 生成 t 分布时,分子必须服从 $N(0,1)$ 分布,必须有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,所以(B)不能选. 根号内的服从 χ^2 分布的随机变量必须除以它相应的自由度,但(A)中 $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 不服从 χ^2 分布,所以不能选(A),(D)中虽上两条都满足,但分子和分母的随机变量不一定独立,所以也不能选,只有选(C),显然 $\overline{X}$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 相互独立.

二、填空题

(9) $\underline{\quad 1\quad}$. $(e^{x^2}-1)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(e^{x^2}-1)}\sim e^{x\ln(e^{x^2}-1)}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(e^{x^2}-1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(e^{x^2}-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}-1)\dfrac{-1}{x^2}}=0$,故所求极限值为 1.

(10) $\underline{-\dfrac{1}{1+x}+C}$. 由 $y=1,z=2x$ 得 $2x=x+f(\sqrt{x}-1)$,故 $f(\sqrt{x}-1)=x$. 令 $\sqrt{x}-1=t,x=(1+t)^2,f(t)=(1+t)^2$.

故 $\displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}=\int(1+x)^{-2}dx=-\frac{1}{1+x}+C.$

(11) $\underline{\pi/2}$. 由格林公式 $I=\displaystyle\iint\limits_{4x^2+y^2\leqslant 1}(1-2ye^{y^2})dxdy$

而 $2ye^{y^2}$ 关于 y 的奇函数,积分为 0,因此 $I=\dfrac{\pi}{2}$(椭圆面积).

(12) $\underline{<1}$,因为 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}}=\dfrac{1}{a^{2n+1}}$,当且仅当 $a<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty$,所以 $a<1$.

(13) $\underline{(-1)^{mn}ab}$. 由 $|\boldsymbol{D}|=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab$

(14) $\underline{\quad 2\quad}$. $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)=DX-\rho_{X,Y}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=4-\dfrac{1}{4}\cdot 2\cdot 4=2.$

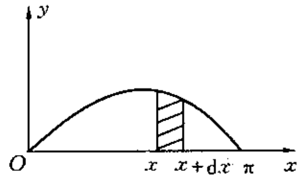
三、解答题

(15) 解　方程所对应齐次方程 $y'-y=0$ 的通解是 $y^*=Ce^x$,非齐次方程的一个特解是 $\sin x$. 故

此方程的通解是　$y=Ce^x+\sin x.$　(4 分)

由 y 有界知 $C=0$，从而 $y(x)=\sin x$.　　(6 分)

在$(0,\pi)$内任取 x 和 $x+dx$(如图). 则所求体积可视为图中阴影部分绕 y 轴旋转体体积的叠加. 故



$$dV = 2\pi x \cdot \sin x dx.$$　　(8 分)

于是 $V = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \xlongequal{令\pi - x = t} 2\pi\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin t dt$

$$= \pi^2\int_0^{\pi}\sin t dt = 2\pi^2$$　　(10 分)

(16) 证　先考虑和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n}{k^2+n^2} = \frac{C_n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2/n^2+1}\cdot\frac{1}{n}$

$$< \frac{C_n}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{C_n}{n}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{C_n}{n}\frac{\pi}{4}.$$　　(5 分)

而由 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4}\frac{C_n}{n} < M$

故 $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{n^2+k^2}) < \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{4}\frac{C_i}{i} < M$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_n}{n^2+k^2})$ 收敛.　　(10 分)

(17) 解　由与路径无关条件知

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = e^x$$　　(3 分)

容易看出此方程的一个特解是 $f^*(x) = -\frac{1}{2}e^x$，故得 $f(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$，

由 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=1$ 得 $C_1 = \frac{2}{3}$，$C_2 = -\frac{1}{6}$，从而

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x$$　　(7 分)

这时 $$f'(1) = \frac{4}{3}e^2 + \frac{1}{6}e^{-1} - \frac{e}{2}$$

而 $$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^x]ydx + f'(x)dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)}f''(x)ydx + f'(x)dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,1)}dyf'(x) = yf'(x)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = f'(1) = \frac{4}{3}e^2 + \frac{1}{6}e^{-1} - \frac{e}{2}$$　　(10 分)

(18) 解　由 $\frac{f(x)}{x}$ 连续，由积分中值定理知，存在 $\eta \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，使 $f(1) = \frac{f(\eta)}{\eta}$.　(3 分)

在$[\eta,1]$上，令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$，则 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件.　　(7 分)

故存在 $\xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$，使 $F'(\xi) = 0$. 即 $\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$.

即 $$\xi f'(\xi) = f(\xi).$$　　(10 分)

(19) 解　取质点所在点为原点，柱面对称轴为 z 轴，则柱面 Σ 方程为

$x^2 + y^2 = R^2$，$0 \leqslant z \leqslant h$.　　(2 分)

设所求力 $\boldsymbol{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$. 知 $F_x = F_y = 0$. 只要求 F_z 在 Σ 上任意一点(x,y,z)及含此点面积微元 dS. 得

$$dF = \frac{GdS}{x^2+y^2+z^2}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\};$$

故 $dF_z = \frac{GzdS}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. (6 分)

由对称性，只须算 Σ 在第一卦限 Σ_1 上的积分，Σ_1 在 yOz 上投影是 $D: 0 \leqslant y \leqslant h; 0 \leqslant z \leqslant h$. $dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$.

故 $F_z = 4G\iint\limits_D \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dzdy = 2G\pi R(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}})$.

$\therefore F = \{0,0,2G\pi R(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}})\}$. (10 分)

(20) 证 由 $E-AB$ 可逆知存在 n 阶矩阵 C 使 $C(E-AB)=(E-AB)C=E$，由此可得 $C-E=ABC=CAB$ (3 分)

于是 $E = E-BA+BA = E-BA+B[C-(C-E)]A$ (5 分)

$= E-BA+B(C-ABC)A = E-BA+B(E-AB)CA$ (7 分)

$= E-BA+(B-BAB)CA = E-BA+(E-BA)BCA$

$= (E-BA)(E+BCA)$

故 $E-BA$ 可逆. (11 分)

(21) 解 由 $r(A)=n-1$ 知 $r(A^*)=1$，所以零为 A^* 的特征值，而由 $A^*x=0$ 的基础解系中有 $n-1$ 个解向量，即属于零特征值有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，知零至少为 $n-1$ 重特征值，再由 n 个特征值之和等于 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$，且 $\sum_{i=1}^n A_{ii} \neq 0$ 知 A^* 的非零特征值为 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$.

(3 分)

由 $r(A^*)=1$ 及 $A_{11}\neq 0$ 知 A^* 的第 1 列 $(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T$ 是 A^* 的 n 个列向量的一个极大无关组，从而存在数 $k_2,\cdots,k_n$ 使

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & k_2A_{11} & \cdots & k_nA_{11} \\ A_{12} & k_2A_{12} & \cdots & k_nA_{12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & k_2A_{1n} & \cdots & k_nA_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}(1\quad k_2\quad \cdots\quad k_n) \qquad (7\text{ 分})$$

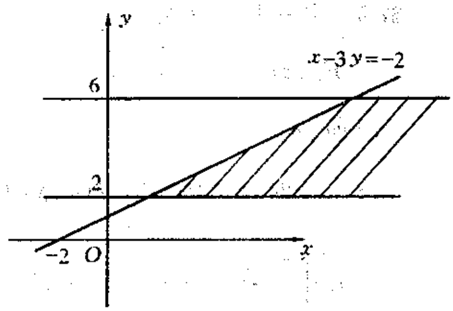
由此得 $\sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11}+k_2A_{12}+\cdots+k_nA_{1n}$. 又

$$A^*\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}(1\ k_2\ \cdots\ k_n)\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}(A_{11}+k_2A_{12}+\cdots+k_nA_{1n}) = (\sum_{i=1}^n A_{ii})\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}$$

从而 $(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T$（它不是零向量）是 A^* 的对应于非零特征值 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$ 的特征向量，其全部特征向量为

$C(A_{11}\ A_{12}\ \cdots\ A_{1n})^T (C\neq 0)$. (11 分)

（22）解



（1）$P\{X \geqslant 3Y-2\} = P\{X-3Y \geqslant -2\}$

$$= \iint\limits_{x-3y\geqslant -2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_2^6 \mathrm{d}y \int_{3y-2}^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^6 \frac{1}{4}(-\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{3y-2}^{+\infty}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(-\mathrm{e}^{-2(3y-2)})\Big|_2^6$$

$$= \frac{1}{24}(\mathrm{e}^{-8}-\mathrm{e}^{-32})$$ （4 分）

（2）解 1　因为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}\cdot\dfrac{1}{4}, & x>0,2<y<6\\ 0, & 其它\end{cases}$$

易证 X、Y 相互独立，而且 X 服从指数为 2 的指数分布，Y 服从区间 $(2,6)$ 上的均匀分布.

令 $T=3X$，显然 $t=3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且导数恒大于零，反函数为 $x=\dfrac{t}{3}$，所以 T 的概率密度为

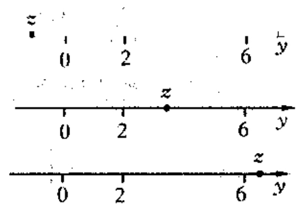
$$f_T(t)=\begin{cases}f_X\left(\dfrac{t}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{t}{3}\right)', & t>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}, & t>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由于 X、Y 独立，所以 T 和 Y 独立. 因此 $Z=T+Y$ 的概率密度可用公式计算

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_2^6 f_T(z-y)\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y$$

注意

$$f_T(z-y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}, & y<z\\ 0, & 其它\end{cases}$$



当 $z<2$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_2^6 0\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y=0$

当 $2\leqslant z<6$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_2^z \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y+\int_z^6 0\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y$

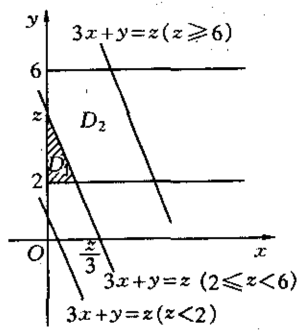
$$=\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

当 $z\geqslant 6$ 时，$f_Z(z)=\displaystyle\int_2^6 \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)}\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$

即

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<2\\ \dfrac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & 2\leqslant z<6\\ \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & z\geqslant 6\end{cases}$$ （11 分）

解 2　用一般方法解



$$F_Z(z)=P\{3X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{3x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z<2$ 时，$F_Z=0$　　　　(2 分)

当 $2\leqslant z<6$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_2^z\mathrm{d}y\int_0^{\frac{z-y}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_2^z\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}(z-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

当 $z\geqslant 6$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^6\mathrm{d}y\int_0^{\frac{z-y}{3}}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=\int_2^6\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-y)})\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(4-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)})$$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<2\\ \frac{1}{4}(z-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & 2\leqslant z<6\\ \frac{1}{4}(4-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-6)}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(z-2)}), & z\geqslant 6\end{cases}$$

在 $f_Z(z)$ 的连续点上用 $f_Z(z)=F'_Z(z)$，即得 $f_Z(z)$ 表达式同解一的结果.　　　　(11 分)

(23) 解　(1) $\alpha=P\{$有二重根$\}=P\{X^2-4\cdot 3^2=0\}=P\{|X|=6\}=0$

$\beta=P\{$无实根$\}=P\{X^2-4\cdot 3^2<0\}=P\{-6<X<6\}$

$$=\int_{-6}^{6}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\int_0^6\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}})\Big|_0^6=1-\mathrm{e}^{-\frac{6}{\sigma}}$$　　　　(5 分)

(2) $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

得　$\hat{\sigma}_L=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$　　　　(8 分)

所以，最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_L=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

(3) $E|X_i|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}=\sigma$. 所以，$E\hat{\sigma}_L=E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E|X_i|=\sigma$，故 $\hat{\sigma}_L$ 是 σ 的无偏估计量.

(4) 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，所以 $|X_1|,|X_2|,\cdots,|X_n|$ 也独立同分布，又 $E|X_i|=\sigma$ 存在，故由辛钦大数定律可得 $\hat{\sigma}_L=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$ 依概率收敛到 $E|X_i|=\sigma$，因此，$\hat{\sigma}_L$ 是 σ 的一致估计量.　　　　(11 分)