

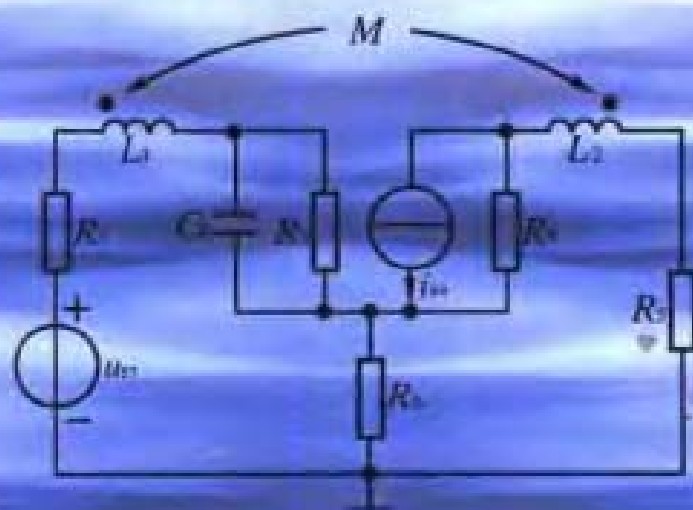
新世纪考研精品系列

电 路

考研精要与典型题解析

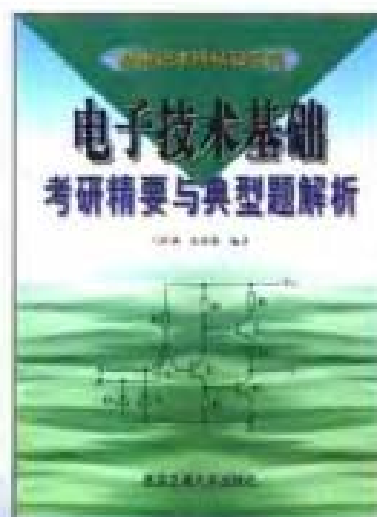
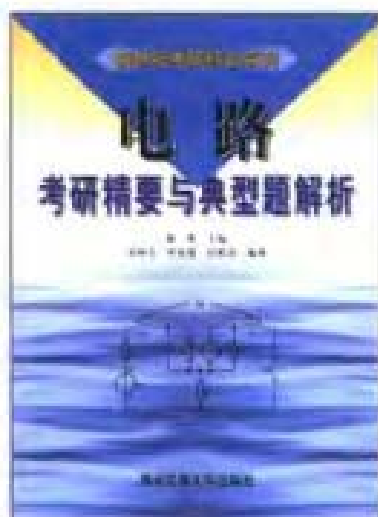
陈 燕 主编

刘补生 罗先觉 应柏青 编著

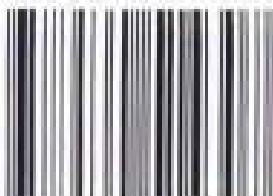


西安交通大学出版社

□责任编辑 / 任振国 □封面设计 / 阎 亮



ISBN 7-5605-1430-8



9 787560 514307 >



ISBN7-5605-1430-8/TM · 51

定价: 28.00 元

新世纪考研精品系列

电 路

考研精要与典型题解析

陈 燕 主编
刘补生 罗先觉 应柏青 编著

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书以教育部制订的“高等工科院校电路、电路分析课程基本要求”为依据,参阅了国内出版的电路、电路分析最新教材,并大量收集、研究了各院校近年的电路、电路分析课程考研试题后而编写。本书从应试出发,全面总结、归纳了电路课程的基本内容、基本概念、重点、难点、各种分析和计算方法,以及这些概念和方法在解题中的应用。每一章均选有典型题作例题,给出解题思路和解题方法;每章末还有阶段测试题,并给出答案。全书最后选编了四套考研电路模拟试题和近五年西安交通大学研究生入学考试电路试题,并给出参考答案。

本书可作为报考相关专业硕士研究生的主要复习参考书,也可作为在校大学生学习电路课程的辅导教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电路考研精要与典型题解析/陈燕主编;刘补生等编.
西安:西安交通大学出版社,2002.4
ISBN 7-5605-1430-8

I. 电… II. ①陈…②刘… III. 电路理论-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 022577 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)
陕西宝石兰印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:18.125 字数:438 千字
2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷
印数:0 001~8 000 定价:28.00 元

发行科电话:(029)2668357,2667874

前 言

随着经济建设的快速发展和科教兴国战略的实施,社会对高素质专业人材的需要更加迫切。时代赋予了我们更多的机遇,同时也向我们提出了新的挑战。大批即将毕业的大学生和已在科研、教学、生产第一线工作数年的工程技术人员及青年教职工将继续学业深造,把攻读硕士学位研究生作为新的追求。为了满足报考相关专业硕士研究生人员进行系统复习的需要,也为在校大学生学习电路时能有一本系统的学习指导书,特编写了《电路考研精要与典型题解析》一书。

本书以教育部制订的“高等工科院校电路、电路分析课程基本要求”为依据,内容与邱关源教授主编的《电路》(第四版)同步,同时兼顾国内其它统编教材及其它重点院校的优秀教材。作者在大量收集、研究了各院校近年的电路、电路分析课程考研试题后,积多年教学和考研辅导之经验,从应试出发,归纳了电路课程的基本内容、基本概念、重点、难点、各种分析和计算方法,以及这些概念和方法在解题中的应用。本书按电路的基本概念与电阻电路分析、正弦稳态电路、动态电路、电路方程的矩阵形式和状态方程、二端口网络五大章编写,每章内容包括理论提要和典型题解析两大部分。理论提要部分尽可能简明扼要,以便读者在较短的时间内掌握最基本的概念;典型题的选取既注重基本要求,又注意典型与新颖的相互渗透。在典型题解析过程中,有分析、有总结,便于读者循序渐进,提高解决综合问题的能力,并进一步达到得心应手、融会贯通的境界。每章末有阶段测试题,用于读者自我检测。全书最后选编了四套考研电路模拟试题和近五年西安交通大学研究生入学考试电路试题,可以用来检验读者自身综合应用基本概念和应试的能力。

本书由西安交通大学陈燕、刘补生、罗先觉、应柏青共同编写,由陈燕统稿。在编写过程中得到了西安交通大学电工电子教学中心主任马西奎教授的大力支持,电工原理教研室全体同仁给予了极大的帮助和关注,在此一并表示真诚的谢意。

本书虽是编者竭力之作,但由于水平有限,书中若有错误和疏漏,敬请读者批评指正。

编 者

2002年3月

目 录

第1章 电路的基本概念与电阻电路分析

1.1 电路的基本概念和基本定律	(1)
1.1.1 理论提要	(1)
1.1.2 典型题解析	(3)
1.2 线性电阻电路的一般分析和电路定理	(19)
1.2.1 理论提要	(19)
1.2.2 典型题解析	(21)
1.3 具有理想运算放大器的电阻电路	(46)
1.3.1 理论提要	(46)
1.3.2 典型题解析	(48)
1.4 非线性电阻电路	(58)
1.4.1 理论提要	(58)
1.4.2 典型题解析	(62)
1.5 阶段测试题	(69)
1.6 阶段测试题答案	(76)

第2章 正弦稳态电路

2.1 正弦稳态电路分析	(78)
2.1.1 理论提要	(78)
2.1.2 典型题解析	(87)
2.2 含耦合电感的电路	(104)
2.2.1 理论提要	(104)
2.2.2 典型题解析	(109)
2.3 三相电路	(120)
2.3.1 理论提要	(120)
2.3.2 典型题解析	(124)
2.4 非正弦周期电流电路	(133)
2.4.1 理论提要	(133)
2.4.2 典型题解析	(135)
2.5 阶段测试题	(144)
2.6 阶段测试题答案	(146)

第3章 动态电路

3.1 一阶电路与二阶电路	(148)
3.1.1 理论提要	(148)
3.1.2 典型题解析	(150)
3.2 拉普拉斯变换	(171)
3.2.1 理论提要	(171)
3.2.2 典型题解析	(174)
3.3 阶段测试题	(190)
3.4 阶段测试题答案	(194)

第4章 电路方程的矩阵形式和状态方程

4.1 理论提要	(195)
4.1.1 图的基本定义	(195)
4.1.2 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵	(195)
4.1.3 电路方程的矩阵形式	(196)
4.1.4 状态方程	(198)
4.2 典型题解析	(200)
4.3 阶段测试题	(209)
4.4 阶段测试题答案	(211)

第5章 二端口网络

5.1 理论提要	(213)
5.1.1 二端口	(213)
5.1.2 二端口的方程和参数	(213)
5.1.3 二端口的连接	(215)
5.1.4 回转器和负阻抗变换器	(216)
5.2 典型题解析	(217)
5.3 阶段测试题	(228)
5.4 阶段测试题答案	(231)

附录1 研究生入学考试模拟试题

研究生入学考试模拟试题(一)	(233)
研究生入学考试模拟试题(二)	(237)
研究生入学考试模拟试题(三)	(242)
研究生入学考试模拟试题(四)	(248)

附录2 研究生入学考试模拟试题答案

模拟试题答案(一)	(253)
模拟试题答案(二)	(254)

模拟试题答案(三).....	(255)
模拟试题答案(四).....	(256)

附录3 西安交通大学近年研究生入学考试试题

1998 年西安交通大学研究生入学考试试题	(258)
1999 年西安交通大学研究生入学考试试题	(262)
2000 年西安交通大学研究生入学考试试题	(266)
2001 年西安交通大学研究生入学考试试题	(269)
2002 年西安交通大学研究生入学考试试题	(272)

附录4 西安交通大学近年研究生入学考试试题答案

1998 年电路试题答案	(275)
1999 年电路试题答案	(276)
2000 年电路试题答案	(278)
2001 年电路试题答案	(279)
2002 年电路试题答案	(279)

参考文献

第 1 章 电路的基本概念与电阻电路分析

1.1 电路的基本概念和基本定律

1.1.1 理论提要

1. 电路模型

实际电路是由电路器件和电路部件连接而成。主要功能有两方面,其一是进行能量的传输、分配与转换;其二是实现信息的传递与处理。实际的电路器件、部件虽然种类繁多,但在电磁性质方面却有许多共同的地方,因此,为了进一步研究实际电路的特性和功能,通常将实际电路器件用理想化的电路元件等效表示。我们把理想电路元件称为实际电路器件的模型,主要有电阻、电感、电容和电源等。

由理想电路元件或其组合模拟实际电路器件建立的模型称为电路模型,通常电路分析都是针对电路模型进行的。

2. 电路分析基本变量及参考方向

电压 u , 电流 i 是电路分析的基本变量,功率和能量在电路的分析和计算中也是十分重要的。在直流电路中,电压、电流和功率分别用大写字母 U, I, P 表示。

一个电路(又称为网络),特别是复杂电路,有时很难判断电流、电压的真实方向。为了计算方便,事先假设一个方向,这个人为假设的方向称为参考方向。按参考方向计算,计算结果若为正值,表示参考方向与实际方向相同,若为负值,表示参考方向与实际方向相反。如果电流的参考方向与电压的参考方向相同,称为关联参考方向,当两者不一致时,则称为非关联参考方向。

3. 电路元件的电压、电流关系

(1) 耗能元件电阻 R

取关联参考方向,线性电阻元件两端电压 u_R 与通过它的电流 i 的关系满足欧姆定律,表示为

$$u_R = Ri_R \quad \text{或} \quad i_R = Gu_R$$

功率为

$$p_R = u_R i_R \geq 0$$

(2) 储能元件电感 L 、电容 C

取关联参考方向,线性电感元件 L 两端的电压 u_L 与通过它的电流 i_L 的关系为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

或

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt$$

交换能量的功率

$$p_L = u_L i_L$$

储存的磁场能量

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \geq 0$$

取关联方向,线性电容元件 C 两端的电压 u_C 与电流 i_C 的关系为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

或

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$$

交换能量的功率

$$p_C = u_C i_C$$

储存的电场能量

$$W_C = \frac{1}{2} C u_C^2 \geq 0$$

(3) 独立电源元件

理想电压源 u_s : u_s 为给定的时间函数。

理想电流源 i_s : i_s 为给定的时间函数。

(4) 受控电源

受控电源是一种双口元件,又称非独立电源。受控源的电压或受控源的电流受电路中某部分的电压或电流控制。有四种受控源,分别是:

电压控制电压源(VCVS) $u = \mu u_1$

电压控制电流源(VCCS) $i = g u_1$

电流控制电压源(CCVS) $u = r i_1$

电流控制电流源(CCCS) $i = \beta i_1$

其中 u_1, i_1 为控制量, u, i 为被控制量, μ, g, r, β 为控制系数。这些系数为常数时,受控源为线性受控源。

4. 基尔霍夫定律

电路中每个元件两端的电压与其电流必须满足的关系称为元件的组成关系或电压电流关系,简称 VCR 约束。元件相互连接给支路电流之间和支路电压之间带来的约束关系,有时称为“拓扑”约束,这类约束由基尔霍夫定律体现。

(1) 基尔霍夫电流定律(KCL)

在集总电路中,任何时刻,对任一结点,所有流出结点的支路电流的代数和恒等于零。若流出结点的电流前面取“+”号,流入结点的电流前面取“-”号,则对任一结点有

$$\sum i = 0$$

(2) 基尔霍夫电压定律(KVL)

在集总电路中,任何时刻,沿任一回路,所有支路电压的代数和恒等于零。指定回路绕行方向,凡支路电压的参考方向与回路的绕行方向一致者,该电压前面取“+”号,支路电压参考

方向与回路绕行方向相反者取“-”号。则对任一回路有

$$\sum u = 0$$

5. 电阻电路的等效变换

对于无源电阻网络,可以先通过电阻串联、并联或是星形联接与三角形联接的等效变换求出其等效电阻,然后应用欧姆定律和电流、电压分配关系求电路中各物理量。

对于有源电阻网络,可以通过电压源和电流源的等效变换来简化电路的计算。

6. 输入电阻

输入电阻是指不含独立源的一端口的端口电压 u 与端口电流 i 的比值,即 $R_{in} = \frac{u}{i}$ 。

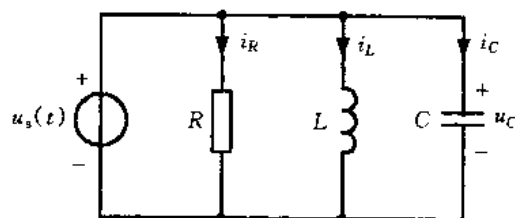
端口的输入电阻与端口的等效电阻是相等的。从概念上说,输入电阻是不含独立电源的一端口的端电压与端电流之比值,等效电阻则是用来等效代替此一端口的电阻。一端口的等效电阻可以通过计算输入电阻来求得。

求输入电阻的一般方法称为电压-电流法,即在端口加以电压源 u_s ,然后求出端口电流 i ,或在端口加以电流源 i_s ,然后求出端口电压 u ,则输入电阻 $R_{in} = \frac{u_s}{i}$ 或 $R_{in} = \frac{u}{i_s}$ 。

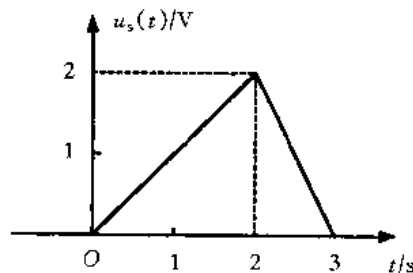
1.1.2 典型题解析

例 1.1.1 电路如例图 1.1.1(a)所示,已知电源 $u_s(t)$ 的波形如例图 1.1.1(b),电阻 $R = 2 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$ 求:

- (1) 电流 i_R , i_L , i_C , 并画出它们的波形。
- (2) $t = 1 \text{ s}$ 时各元件的功率和能量。



(a)



(b)

例图 1.1.1

解 (1) 根据已知 $u_s(t)$ 的波形写出其函数表示式为

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{V} & t < 0 \\ t & \text{V} & 0 \leq t < 2 \text{ s} \\ 2(3 - t) & \text{V} & 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ 0 & \text{V} & t \geq 3 \text{ s} \end{cases}$$

根据电阻元件的 VCR 有

$$u_R = Ri_R$$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_s(t)}{R}$$

将 $R=2\Omega$ 代入上式,有

$$i_R = \begin{cases} 0 & \text{A} & t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{A} & 0 \leq t < 2 \text{ s} \\ 3-t & \text{A} & 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ 0 & \text{A} & t \geq 3 \text{ s} \end{cases}$$

根据电感元件的 VCR 有

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{而} \quad u_L = u_s(t)$$

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\xi) d\xi$$

将 $L=0.5 \text{ H}$ 代入上式,求上述积分有

$$i_L = \begin{cases} 0 & \text{A} & t < 0 \\ t^2 & \text{A} & 0 \leq t < 2 \text{ s} \quad \text{且} \quad i(2) = 4 \text{ A} \\ -2t^2 + 12t - 12 & \text{A} & 2 \leq t < 3 \text{ s} \quad \text{且} \quad i(3) = 6 \text{ A} \\ 6 & \text{A} & t \geq 3 \text{ s} \end{cases}$$

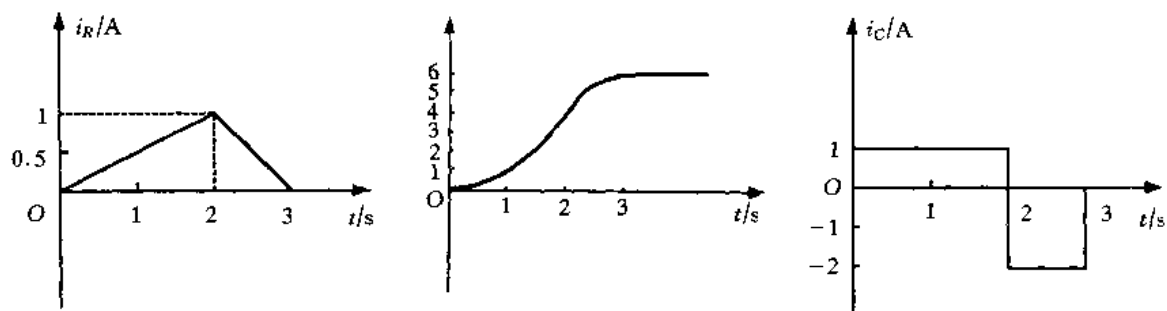
根据电容元件的 VCR 有

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{而} \quad u_C = u_s(t)$$

将 $C=1 \text{ F}$ 代入上式,有

$$i_C = \begin{cases} 0 & \text{A} & t < 0 \\ 1 & \text{A} & 0 \leq t < 2 \text{ s} \\ -2 & \text{A} & 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ 0 & \text{A} & t \geq 3 \text{ s} \end{cases}$$

它们的波形如例图 1.1.2 所示。



例图 1.1.2

(2) $t=1 \text{ s}$ 时

$$p_R = u_R(1)i_R(1) = 1 \times 0.5 = 0.5 \text{ W}$$

$$p_L = u_L(1)i_L(1) = 1 \times 1 = 1 \text{ W}$$

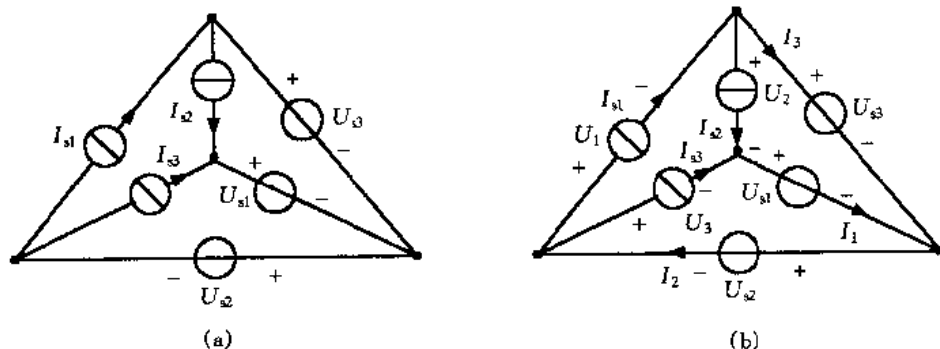
$$p_C = u_C(1)i_C(1) = 1 \times 1 = 1 \text{ W}$$

$$W_R = i^2(1) \times R = 0.5^2 \times 2 = 0.5 \text{ J}$$

$$W_L = \frac{1}{2} Li_L^2(1) = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 1 = 0.25 \text{ J}$$

$$W_C = \frac{1}{2} Cu_C^2(1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0.5 \text{ J}$$

例 1.1.2 已知电路如例图 1.1.3(a)所示,且已知 $U_{s1} = U_{s2} = U_{s3} = 2 \text{ V}$, $I_{s1} = I_{s2} = I_{s3} = 2 \text{ A}$,求各电源的功率,并说明是吸收功率还是发出功率。



例图 1.1.3

解 题中已知各电源的大小和方向,要求各电源的功率,关键是要求出在设定的参考方向下各电压源的电流和各电流源两端的电压,再根据指定的电压和电流的参考方向和所得的功率值判断功率的吸收和发出。

设电压源 U_{s1}, U_{s2}, U_{s3} 中的电流分别为 I_1, I_2, I_3 , 参考方向如例图 1.1.3(b)所示。

设电流源 I_{s1}, I_{s2} 和 I_{s3} 两端的电压分别为 U_1, U_2, U_3 , 参考方向如例图 1.1.3(b)所示。

$$I_1 = I_{s2} + I_{s3} = 4 \text{ A}$$

$$P_{U_{s1}} = U_{s1} I_1 = 2 \times 4 = 8 \text{ W} > 0$$

因为 U_{s1} 和 I_1 为关联方向,乘积大于零,所以,吸收功率 8 W。

$$I_2 = I_{s1} + I_{s3} = 4 \text{ A}$$

$$P_{U_{s2}} = U_{s2} I_2 = 2 \times 4 = 8 \text{ W} > 0$$

因为 U_{s2} 和 I_2 为关联方向,乘积大于零,所以,吸收功率 8 W。

$$I_3 = I_{s1} - I_{s2} = 0$$

$$P_{U_{s3}} = U_{s3} I_3 = 0$$

$$U_1 = -U_{s2} - U_{s3} = -2 - 2 = -4 \text{ V}$$

$$P_{I_{s1}} = U_1 I_{s1} = (-4) \times 2 = -8 \text{ W} < 0$$

因为 U_1 和 I_{s1} 为关联方向,乘积小于零,所以,发出功率 8 W。

$$U_2 = U_{s3} - U_{s1} = 2 - 2 = 0$$

$$P_{I_{s2}} = 0$$

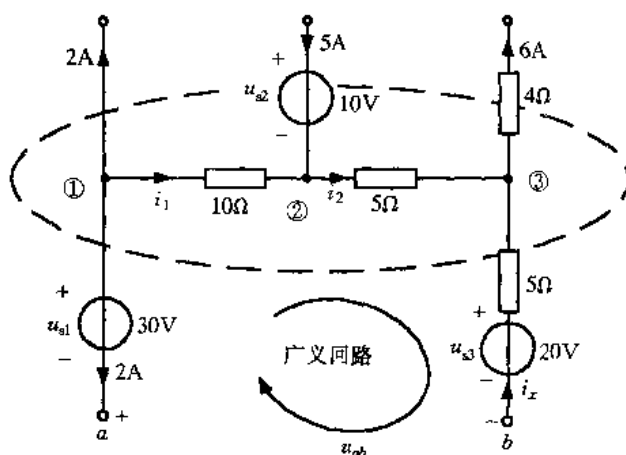
$$U_3 = -U_{s2} - U_{s1} = -2 - 2 = -4 \text{ V}$$

$$P_{I_{s3}} = U_3 I_{s3} = (-4) \times 2 = -8 \text{ W} < 0$$

因为 U_3 和 I_{s3} 为关联方向,乘积小于零,所以,发出功率 8 W。

若选非关联的参考方向,也可以得到相同的结果。通过此题还可以看出,电路中发出的功率等于吸收的功率,功率是守恒的。

例 1.1.3 例图 1.1.4 为某电路中的一部分,试确定其中的 i_x , u_{ab} 。



例图 1.1.4

解 求 i_x 。根据 KCL,可按下列步骤求得

对结点① $i_1 = -(2+2) = -4 \text{ A}$

对结点② $i_2 = i_1 + 5 = -4 + 5 = 1 \text{ A}$

对结点③ $i_x = 6 - i_2 = 6 - 1 = 5 \text{ A}$

如果取广义结点如图中虚线所示,则根据 KCL 可直接求得

$$i_x = 2 + 2 + 6 - 5 = 5 \text{ A}$$

求 u_{ab} 时可以设想 a, b 两点间有一条虚拟的支路,该支路两端的电压为 u_{ab} 。这样由结点 a 经过结点①,②,③到结点 b 就构成了一个闭合回路,如图中所示,这个回路有时称为广义回路,对广义回路应用 KVL,可得

$$-u_{s1} + 10i_1 + 5i_2 - 5i_x + u_{s3} - u_{ab} = 0$$

$$u_{ab} = -30 + 10 \times (-4) + 5 \times (1) - 5 \times 5 + 20 = -70 \text{ V}$$

例 1.1.4 例图 1.1.5 所示为某电路的部分电路,求电流 I 、电压 U 、电阻 R 。

解 取广义结点如例图 1.1.5(b) 中虚线所示,根据 KCL 得

$$I = 5 + 1 - 4 = 2 \text{ A}$$

设电流 I_1, I_2, I_R 方向如图示
则

$$I_1 = 4 + 6 = 10 \text{ A}$$

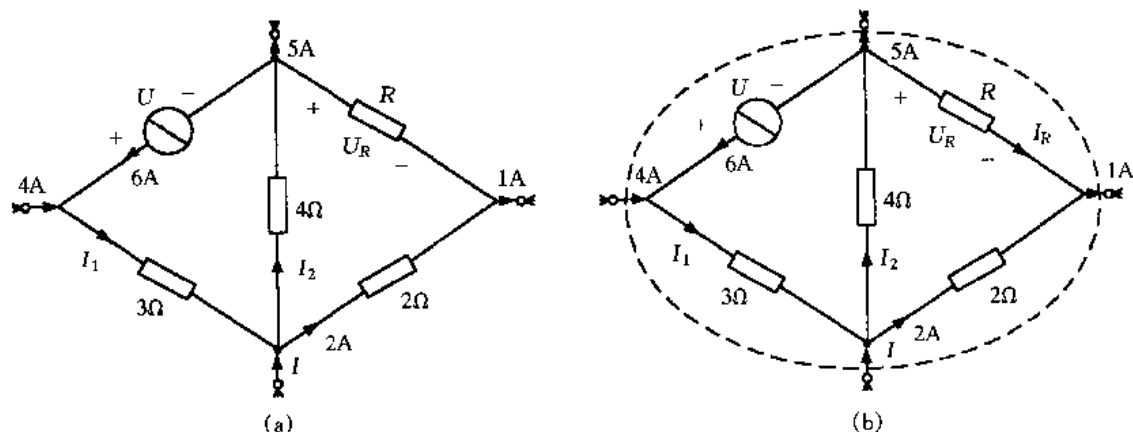
$$I_2 = I_1 + I - 2 = 10 + 2 - 2 = 10 \text{ A}$$

$$I_R = 1 - 2 = -1 \text{ A}$$

$$U_R = -4 \times I_2 + 2 \times 2 = -4 \times 10 + 4 = -36 \text{ V}$$

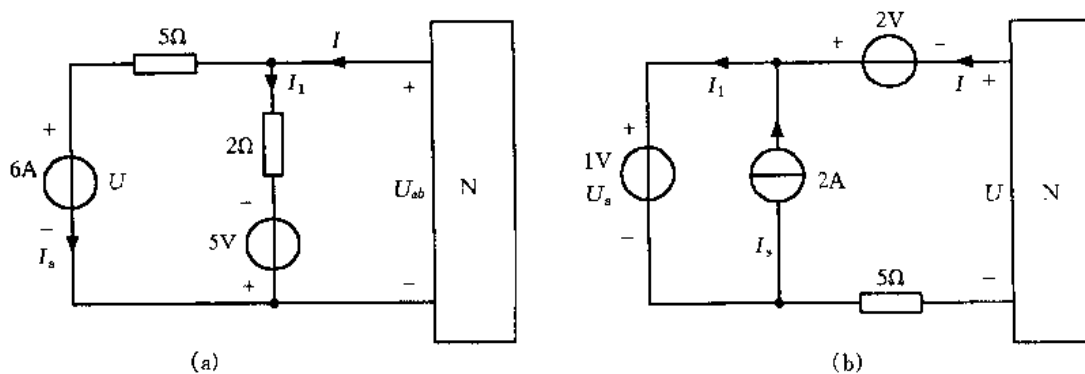
$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{-36}{-1} = 36 \Omega$$

$$U = 3 \times I_1 + 4 \times I_2 = 3 \times 10 + 4 \times 10 = 70 \text{ V}$$



例图 1.1.5

例 1.1.5 电路如例图 1.1.6 所示, (1) 已知在例图 1.1.6(a) 中电流 $I = 1\text{ A}$, 求电压 U_{ab} , 电流源 I_s 的功率。(2) 在例图 1.1.6(b) 中, 电压 $U = 4\text{ V}$, 求电流 I , 电压源 U_s 的功率。



例图 1.1.6

解 (1) 在图(a)中设 2Ω 与 5 V 电压源串联支路的电流为 I_1

$$I_1 = I - I_s = 1 - 6 = -5\text{ A}$$

$$U_{ab} = 2 \times I_1 - 5 = 2 \times (-5) - 5 = -15\text{ V}$$

设电流源 I_s 两端电压为 U

$$U = -5I_s + U_{ab} = -5 \times 6 + (-15) = -45\text{ V}$$

电流源 I_s 的功率

$$P = UI_s = (-45) \times 6 = -270\text{ W} < 0$$

电流源的电流、电压为关联方向, 乘积小于零, 所以电流源发出功率 270 W

(2) 在图(b)中已知 $U = 4\text{ V}$

$$U = -2 + 1 + 5 \times I$$

$$I = 1\text{ A}$$

设电压源的电流为 I_1

$$I_1 = I_s + I = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

电压源 U_s 的功率

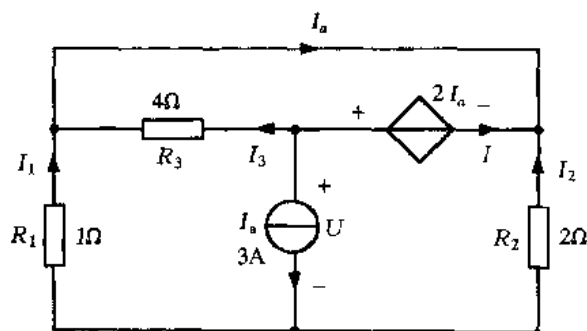
$$P = U_s I_1 = 1 \times 3 = 3 \text{ W} > 0$$

电压源的电压、电流为关联方向,乘积大于零,所以电压源吸收功率 3 W。

例 1.1.6 已知电路和参数如图 1.1.7 所示。试求电流源和受控源的功率。

解 设电流源两端电压为 U , 受控源支路电流为 I , 电阻 R_1, R_2, R_3 支路电流分别为 I_1, I_2 和 I_3 。

由于电流 I_a 支路是一条短路线, 所以电阻 R_1, R_2 为并联联接, R_3 与受控电压源亦是并联。



例图 1.1.7

$$I_1 = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \times \frac{2}{1+2} = 2 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{2I_a}{R_3} = \frac{2I_a}{4} = 0.5 I_a$$

$$\text{而 } I_1 = I_a - I_3$$

$$2 = I_a - 0.5 I_a$$

$$I_a = 4 \text{ A}$$

$$I_3 = 0.5 I_a = 2 \text{ A}$$

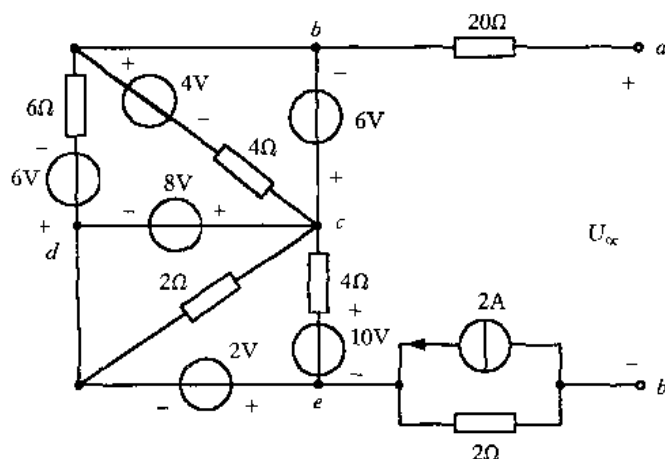
$$U = R_3 I_3 - R_1 I_1 = 4 \times 2 - 1 \times 2 = 6 \text{ V}$$

$$I = -(I_3 + I_s) = -(2 + 3) = -5 \text{ A}$$

电流源的功率 $P = UI_s = 6 \times 3 = 18 \text{ W} > 0$, 吸收功率。

受控源的功率 $P = 2I_a I = 2 \times 4 \times (-5) = -40 \text{ W} < 0$, 发出功率。

例 1.1.7 求例图 1.1.8 所示电路的开路电压 U_{oc} 。



例图 1.1.8

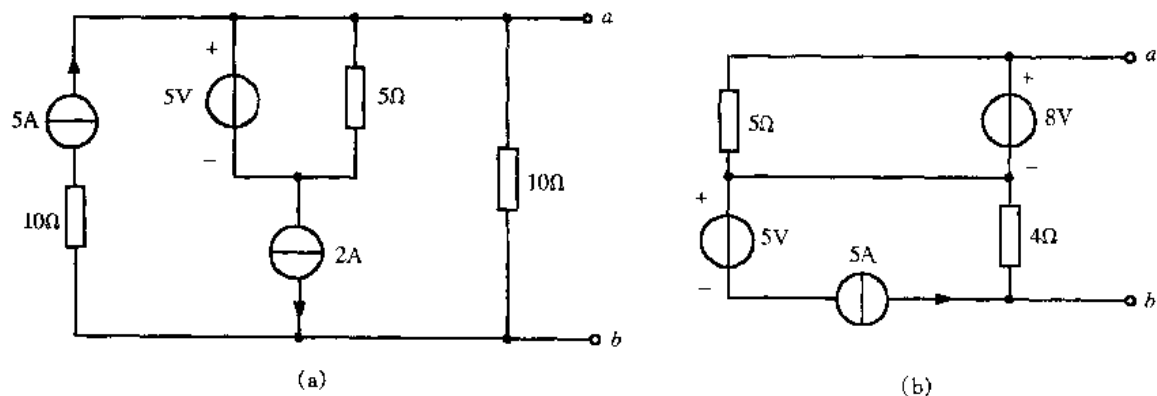
解 题目看似复杂,但只要掌握两点:一是求端口开路电压时,端口处电流为零;二是利用电压源,电流源的性质,即任何支路与理想电压源并联,对外等效为该理想电压源,任何支路与

理想电流源串联,对外等效为理想电流源。根据以上两点,电压 $U_{oc} = U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{eb}$, 其中

$$U_{ab} = 0 \quad U_{bc} = -6 \text{ V} \quad U_{cd} = 8 \text{ V} \quad U_{de} = -2 \text{ V} \quad U_{eb} = 2 \times 2 = 4 \text{ V}$$

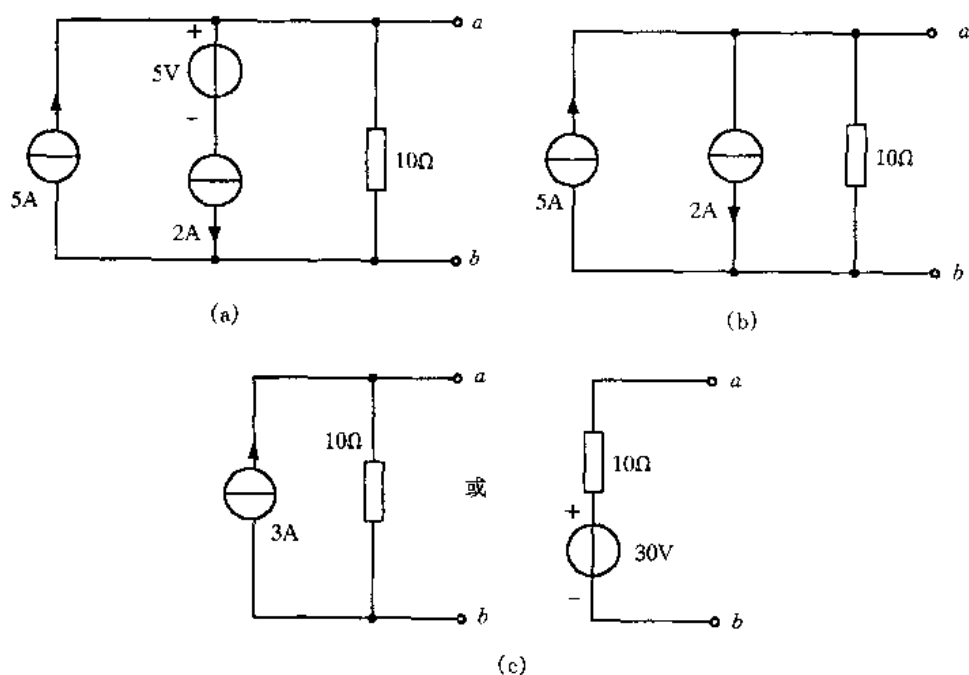
所以 $U_{oc} = 0 + (-6) + 8 + (-2) + 4 = 4 \text{ V}$

例 1.1.8 试将例图 1.1.9(a),(b)所示电路分别简化为关于 ab 端的等效电源模型。



例图 1.1.9

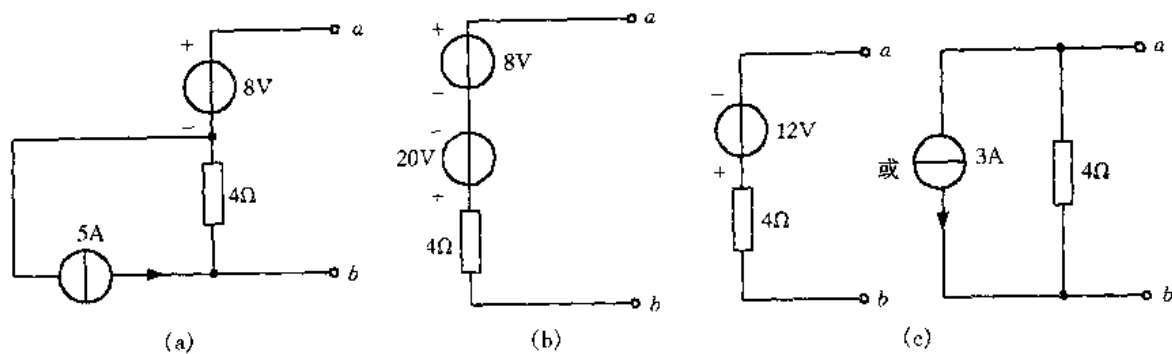
解 任何元件或支路与理想电压源并联,对外等效为理想电压源;任何元件或支路与理想电流源串联,对外等效为理想电流源。例图 1.1.9(a)电路化简过程如例图 1.1.10(a),(b),(c)所示。例图 1.1.9(b)电路化简过程如例图 1.1.11(a),(b),(c)所示。



例图 1.1.10

例 1.1.9 已知电路如例图 1.1.12 所示,试用电源的等效变换求电流 I 。

解 将 3 A 独立电流源和 2 Ω 电阻的并联组合等效变换为电压源和电阻的串联组合;将



例图 1.1.11

受控源和 2Ω 电阻的并联组合等效变换为受控电压源和电阻的串联组合。 1 A 独立电流源和 8Ω 电阻的并联组合不做等效变换, 因为 8Ω 电阻支路的电流是受控电流源控制量所在支路, 在电路的等效变换中, 一般不变换受控源控制量所在支路。等效化简后的电路如例图 1.1.13 所示。

在结点 1 应用 KCL, 有

$$I_1 = 1 - I$$

对图示回路应用 KVL, 有

$$2I_1 + 6 + 2I_1 + 4I - 8I = 0 \quad \text{得}$$

$$I = 1.25\text{ A}$$

例 1.1.10 电路如例图 1.1.14 所示, 试求电压 U , 电流 I 。

解 将受控电压源与电阻的串联等效变换为受控电流源与电阻的并联, 电路如例图 1.1.15 所示。

$$\text{电流 } I = \frac{U}{6}$$

2Ω 电阻支路电流为 $I_1 = \frac{U}{2}$

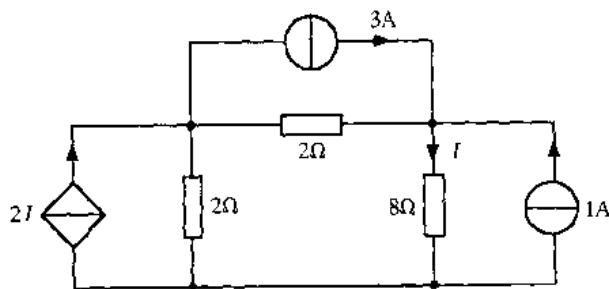
对结点 1 列 KCL 方程

$$-2U + I_1 + 10 + I - 2I = 0$$

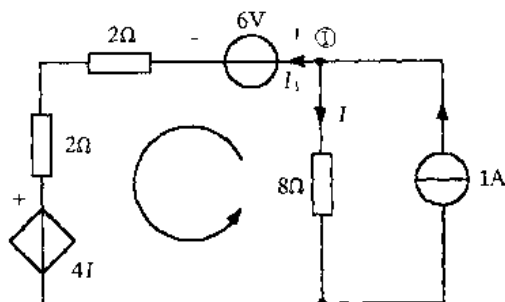
将 $I = \frac{U}{6}$, $I_1 = \frac{U}{2}$ 代入上式, 解得

$$U = 6\text{ V}$$

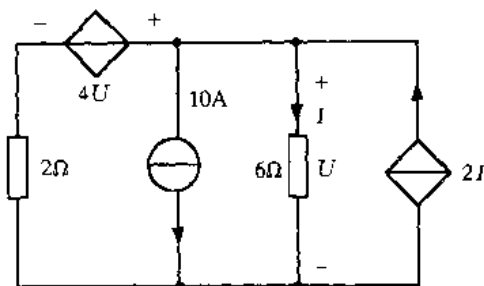
$$I = \frac{U}{6} = \frac{6}{6} = 1\text{ A}$$



例图 1.1.12



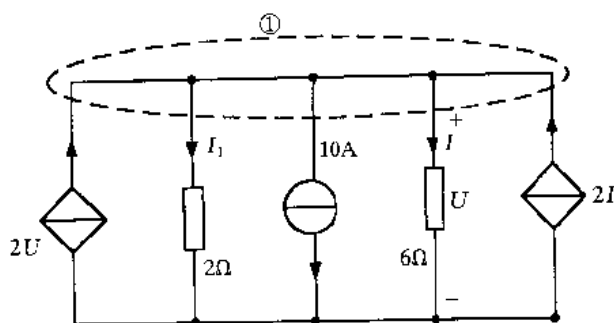
例图 1.1.13



例图 1.1.14

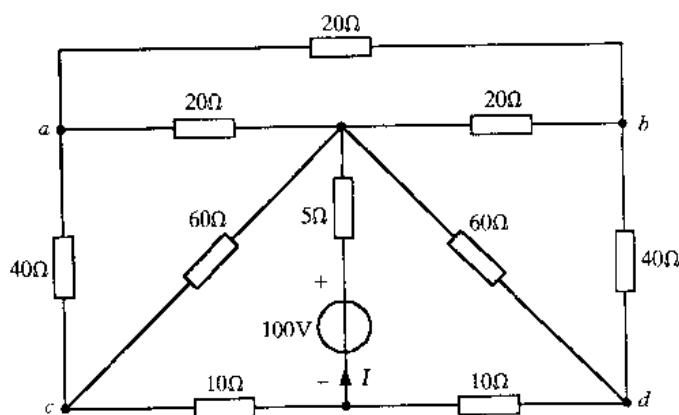
例 1.1.11 电路如例图 1.1.16 所示,试求电流 I 。

解 这是一个平衡对称网络,结点 a 与 b ,结点 c 与 d 等电位。电路中若两结点等电位,把两结点用导线连接,则连接线上无电流,对电路无影响,这样就可把复杂电阻网络化为串并联电阻联接,使问题分析得以简化。分别连接 ab , cd , 将电阻进行串、并联等效,如例图 1.1.17(a), (b)所示,求得电流 I

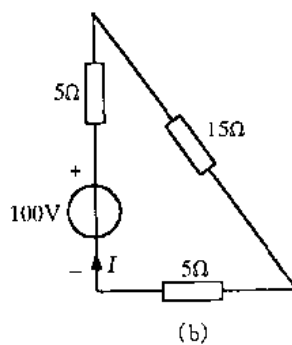
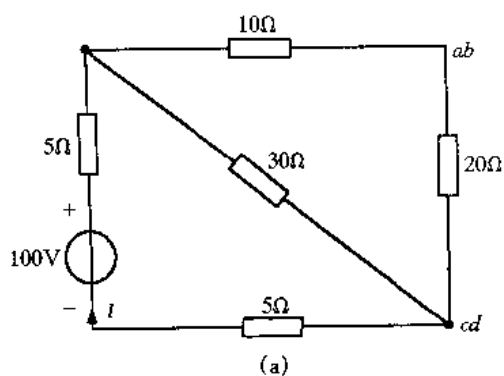


例图 1.1.15

$$I = \frac{100}{5 + 5 + 15} = 4 \text{ A}$$



例图 1.1.16



例图 1.1.17

例 1.1.12 求例图 1.1.18 所示电路中的电压 U 。

解 为求出电流源两端的电压,应求电流源左侧的等效电阻 R_{ab} 。在进行电阻的等效变换过程中,相应结点上的电阻有串、并联关系的,用串、并联公式求出其等效电阻,而未进行等效变换的电阻还必须联在该结点上,不能在变换过程中将其丢失。观察已知电路图,两个 24Ω

电阻一端连在结点 d 上,另一端通过短接线连在结点 c 上,所以是并联关系,等效电阻为 $12\ \Omega$,电路变形为例图 1.1.19(a)。再将 Y 形联接的 3 个 $12\ \Omega$ 电阻变成 Δ 形联接,其中 $R_{\Delta} = 3R_Y = 3 \times 12 = 36\ \Omega$,得到例图 1.1.19(b),再应用串并联等效变换,得

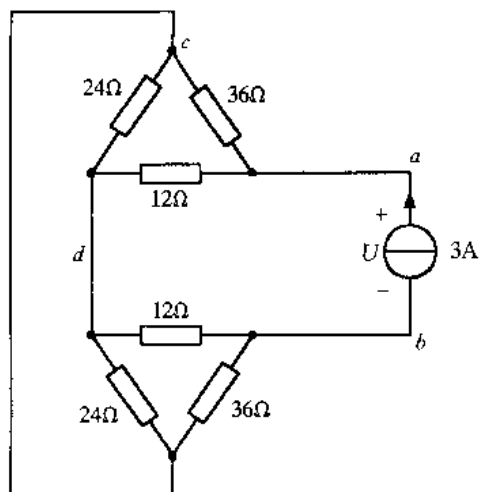
$$R_{ab} = 18\ \Omega$$

电流源两端电压

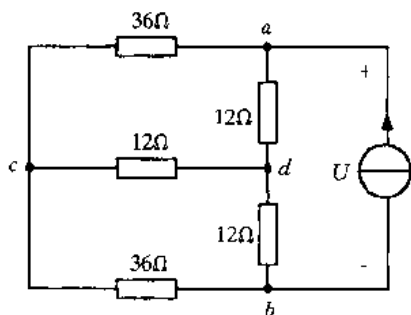
$$U = 18 \times 3 = 54\ \text{V}$$

例 1.1.13 例图 1.1.20(a)所示电路中,电阻 R 相同,均为 $1\ \Omega$ 。例图 1.1.20(b)所示电路中电阻 $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$ 。试分别求端口 ab 的等效电阻 R_{ab} 。

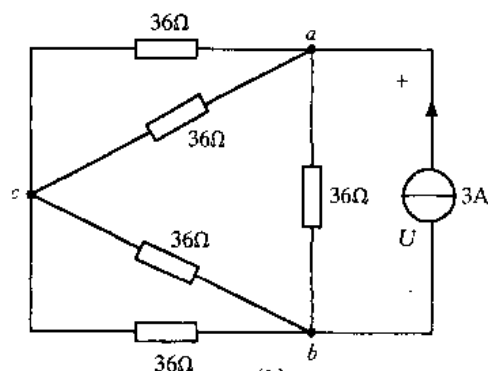
解 对于例图 1.1.20(a)所示电路,由于是



例图 1.1.18

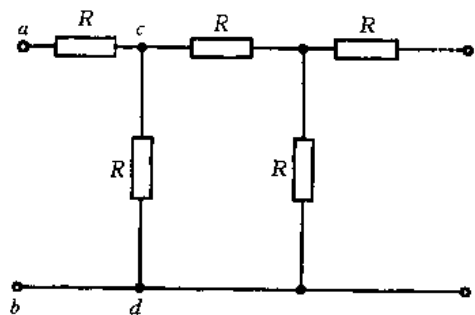


(a)

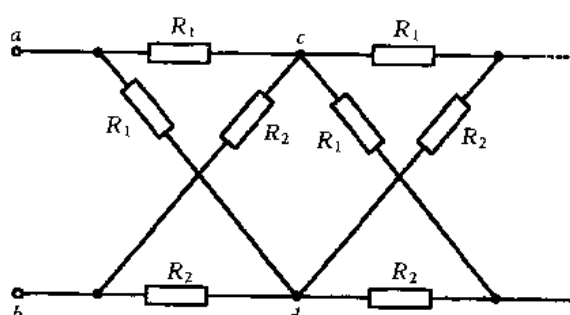


(b)

例图 1.1.19



(a)



(b)

例图 1.1.20

无限长链形网络,所以从首端 ab 看进去的等效电阻为 R_{ab} ,首端去掉一个链形环节从 cd 看进去的等效电阻 R_{cd} 仍和 R_{ab} 相等,电路等效为例图 1.1.21(a)有

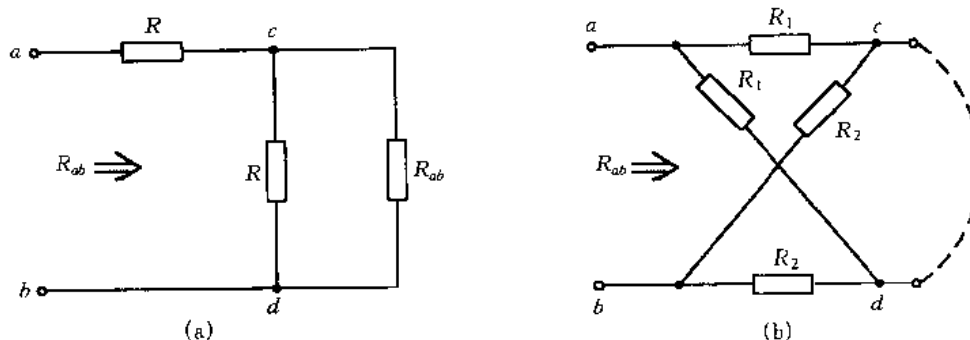
$$R_{ab} = R + \frac{RR_{ab}}{R + R_{ab}}$$

代入 $R = 1 \Omega$, 解得

$$R_{ab} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Omega$$

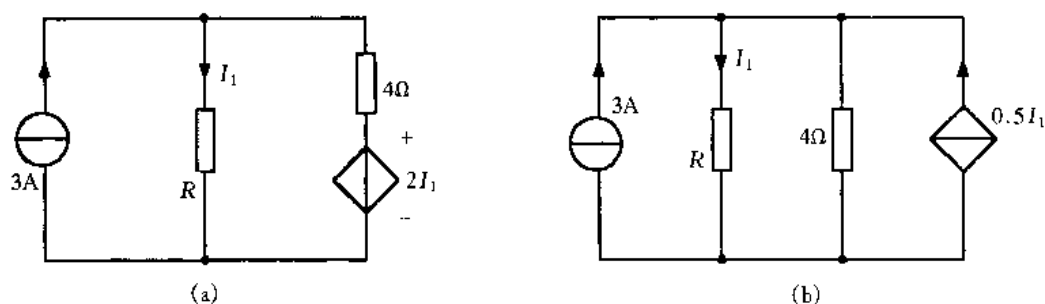
对于例图 1.1.20(b) 所示电路, 可以看出组成无限长链形网络的每个环节是一个 X 形电路或称桥形电路, 由于桥形电路中的电阻 R_1, R_2 满足电桥平衡条件, 所以电路中的结点 c, d 等电位。将 c, d 结点短接或将 c, d 结点与右边无限长链形环节断开对电路无影响, 因此例图 1.1.20(b) 可以等效为例图 1.1.21(b), 由此求得等效电阻 R_{ab} 。

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_1}{R_1 + R_1} + \frac{R_2 R_2}{R_2 + R_2} = \frac{1 \times 1}{1 + 1} + \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1.5 \Omega$$



例图 1.1.21

例 1.1.14 例图 1.1.22(a) 所示电路, 已知电阻 R 消耗的功率为 18 W , 求电阻 R 的值。



例图 1.1.22

解 首先将受控电压源与电阻的串联组合等效变换为受控电流源与电阻的并联组合, 如例图 1.1.22(b) 所示, 根据分流关系有

$$I_1 = (3 + 0.5I_1) \times \frac{4}{R + 4}$$

$$I_1 = \frac{12}{R + 2}$$

已知电阻消耗的功率为 18 W

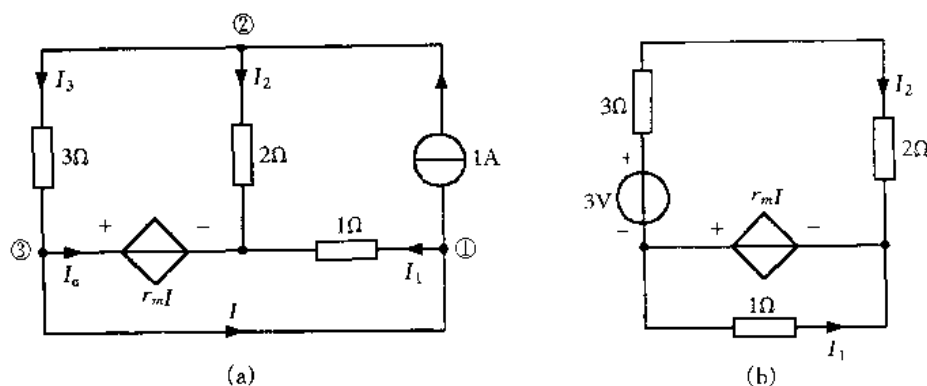
$$P = I_1^2 R$$

$$18 = \left(\frac{12}{R+2} \right)^2 \times R$$

解得

$$R = 2 \Omega$$

例 1.1.15 电路如例图 1.1.23(a)所示,要使电流 $I_a = 0$,试确定受控源控制系数 r_m 和电流 I 。



例图 1.1.23

解 若要使 $I_a = 0$,应写出 I_a 的表达式再令其等于零,就可以找出各参数之间的关系。

设 1Ω 电阻支路电流为 I_1 , 2Ω 电阻支路电流为 I_2 , 3Ω 电阻支路电流为 I_3 ,则计算 I_1, I_2 的电路如例图 1.1.23(b)所示。

$$I_1 = \frac{r_m I}{1} = r_m I$$

$$I_2 = \frac{3 + r_m I}{5}$$

求出 I_1, I_2 后回到例图 1.1.23(a),在结点①应用 KCL

$$I = 1 + I_1$$

$$I = 1 + r_m I$$

$$I = \frac{1}{1 - r_m}$$

在结点②应用 KCL

$$I_3 = 1 - I_2 = 1 - \frac{3 + r_m I}{5} = \frac{2 - r_m I}{5}$$

在结点③应用 KCL

$$I_a = I_3 - I$$

若使 $I_a = 0$ 有

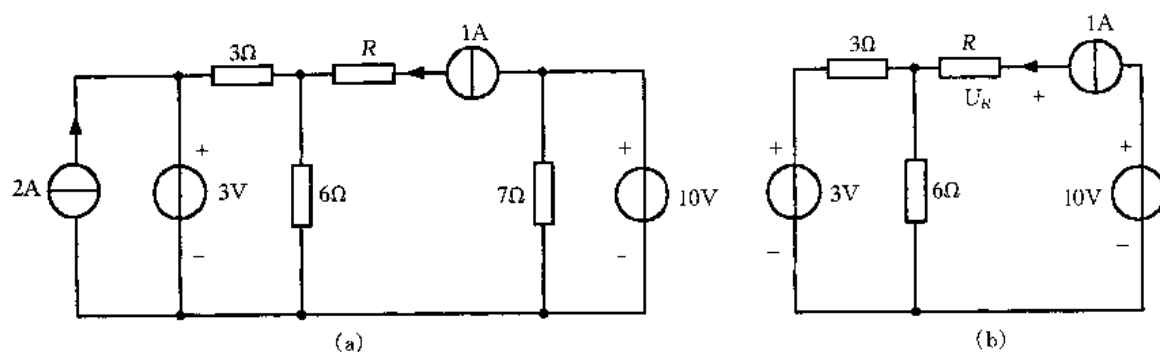
$$0 = I_3 - I$$

$$0 = \frac{2 - r_m I}{5} - I$$

解得

$$r_m = -1 \Omega$$

例 1.1.16 例图 1.1.24(a)所示电路中,已知 1 A 电流源发出功率为 1 W,试求电阻 R 的值。



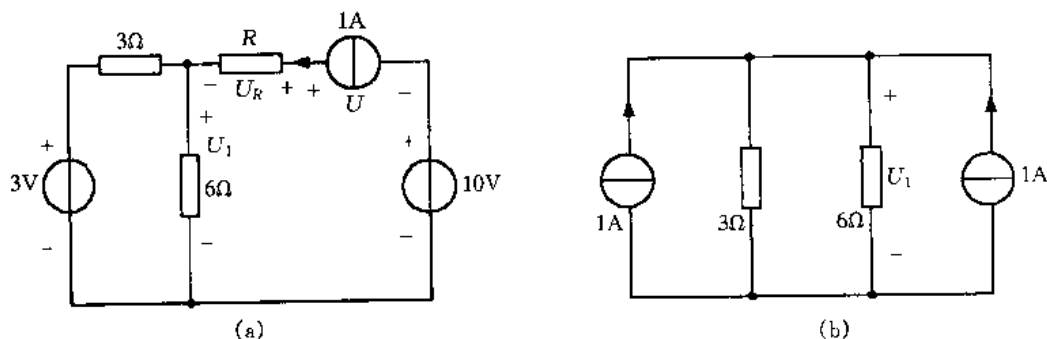
例图 1.1.24

解 要求解电阻 R 的值,需要知道电阻两端的电压。设电阻两端电压为 U_R ,在计算 U_R 时,2 A 电流源与 3 V 电压源并联,等效为 3 V 电压源;7 Ω 电阻与 10 V 电压源并联,等效为 10 V 电压源,电路如例图 1.1.24(b)所示。

如果能计算出 6 Ω 电阻两端的电压 U_1 ,就可以进一步求出 U_R 。为此将 3 V 电压源与 3 Ω 电阻串联支路等效为 1 A 电流源与 3 Ω 电阻的并联;在计算 6 Ω 电阻两端电压时,与 1 A 电流源串联的电阻 R 和 10 V 电压源支路等效为 1 A 电流源,电路如例图 1.1.25(b)所示,计算得

$$U_1 = (1+1) \times \frac{3 \times 6}{3+6} = 4 \text{ V}$$

求出电压 U_1 后,再利用例图 1.1.25(a)计算电阻电压 U_R 。



例图 1.1.25

由于 1 A 电流源发出功率为 1 W,设 1 A 电流源两端电压为 U ,方向如图示,则

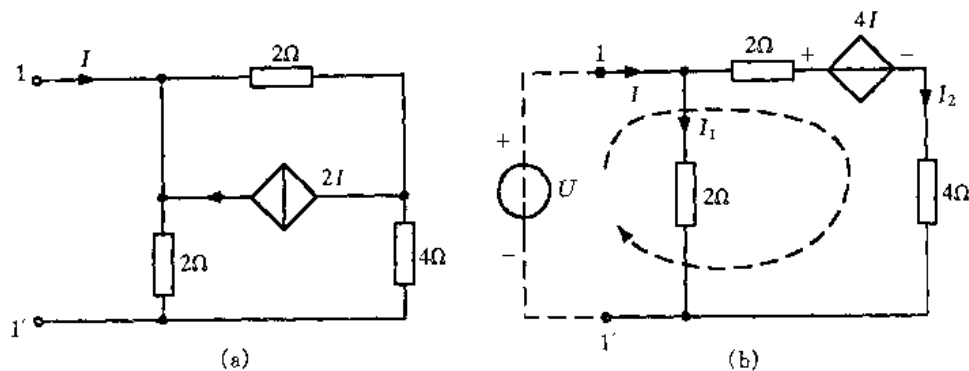
$$P = UI$$

$$U = \frac{P}{I} = \frac{1}{1} = 1 \text{ V}$$

$$U_R = 1 + 10 - 4 = 7 \text{ V}$$

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{7}{1} = 7 \text{ Ω}$$

例 1.1.17 电路如例图 1.1.26(a)所示,求端口 1-1' 的输入电阻。



例图 1.1.26

解 在端口 1-1' 处加电压 U , 求出 I , 再根据 $R_m = \frac{U}{I}$, 求出输入电阻。

将受控电流源与电阻的并联组合等效变换为受控电压源与电阻的串联组合, 并设两支路电流分别为 I_1, I_2 。

$$I_1 = \frac{U}{2}$$

$$I_2 = I - I_1 = I - \frac{U}{2}$$

对图示回路列 KVL 方程

$$U = (2 + 4)I_2 + 4I$$

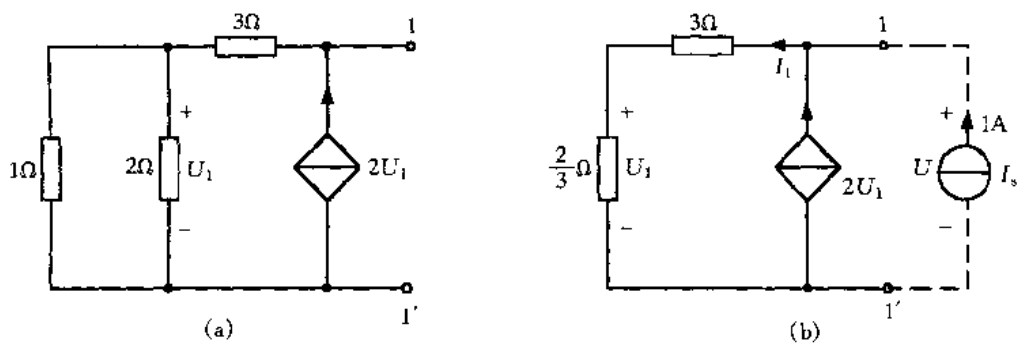
$$U = 6 \times \left(I - \frac{U}{2} \right) + 4I$$

$$4U = 10I$$

$$R_m = \frac{U}{I} = \frac{10}{4} = 2.5 \Omega$$

即端口的输入电阻为 2.5Ω 。

例 1.1.18 求例图 1.1.27(a) 所示端口 1-1' 的输入电阻。



例图 1.1.27

解 由于输入电阻是端口电压与端口电流的比值, 因此, 也可以在端口施加一定数值的电压源或电流源。

本题在端口处施加电流值为 1 A 的电流源 I_s , 只要求出 1 A 电流源两端的电压, 输入电阻就可求得。

将 $1\ \Omega$ 电阻与 $2\ \Omega$ 电阻并联, 并联电阻两端的电压即为受控源的控制量 U_1 , 电路如例图 1.1.27(b) 所示。

设 $3\ \Omega$ 电阻支路电流为 I_1 , 在结点①处有

$$I_1 = 2U_1 + 1$$

而 $U_1 = \frac{2}{3}I_1$, 代入上式, 有

$$I_1 = 2 \times \frac{2}{3}I_1 + 1$$

解得 $I_1 = -3$

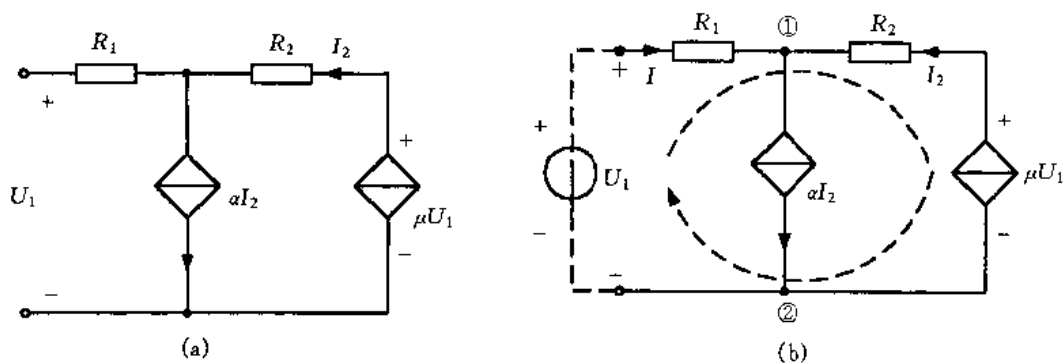
$$U_1 = \frac{2}{3}I_1 = -2$$

$$U = 3I_1 + U_1 = 3 \times (-3) + (-2) = -11\text{ V}$$

$$R_{in} = \frac{U}{I_s} = \frac{-11}{1} = -11\ \Omega$$

由此可见, 含有受控源的电路, 输入电阻可以是负值。

例 1.1.19 试求例图 1.1.28(a) 所示电路的输入电阻。



例图 1.1.28

解 设在端口施加电压源 U_1 , 端口处的电流为 I , 则输入电阻 $R_{in} = \frac{U_1}{I}$ 电路如例图 1.1.28(b) 所示。

因为在结点①处

$$I = \alpha I_2 - I_2 = (\alpha - 1)I_2$$

$$I_2 = \frac{I}{\alpha - 1}$$

在图示回路中

$$U_1 = R_1 I - R_2 I_2 + \mu U_1$$

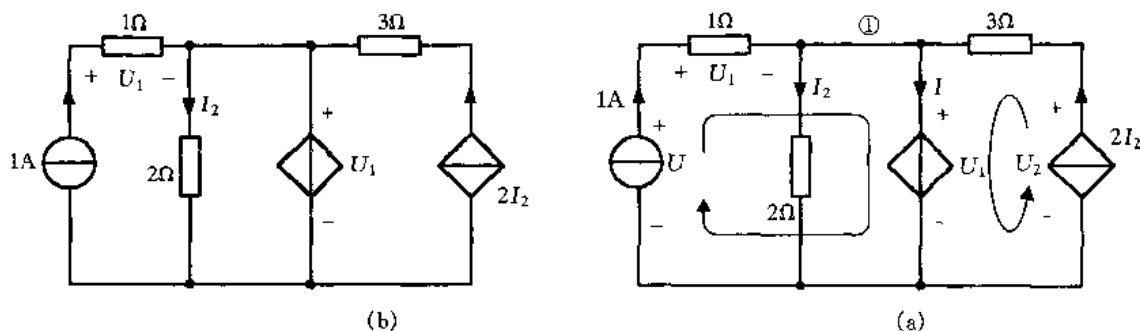
$$(1 - \mu)U_1 = \left(R_1 - \frac{R_2}{\alpha - 1}\right)I$$

$$R_{in} = \frac{R_1 - \frac{R_2}{\alpha - 1}}{1 - \mu}$$

整理后

$$R_{in} = \frac{(1-\alpha)R_1 + R_2}{(1-\alpha)(1-\mu)}$$

例 1.1.20 电路如例图 1.1.29(a)所示,试求电路中所有元件的功率,并验证功率平衡。



例图 1.1.29

解 设 1 A 电流源两端电压为 U , 受控电压源支路电流为 I , 受控电流源两端电压为 U_2 , 电路如例图 1.1.29(b)所示。

$$U_1 = 1 \times 1 = 1 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{2} = \frac{1}{2} \text{ A}$$

$$2I_2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ A}$$

在结点①处应用 KCL 有

$$I = 1 + 1 - 0.5 - 1.5 \text{ A}$$

在图示回路中

$$U_2 = 3 \times 2I_2 + U_1 = 3 \times 1 + 1 = 4 \text{ V}$$

$$U = 2U_1 = 2 \text{ V}$$

所以各元件的功率为

1 A 电流源 $P_{I_s} = UI_s = 2 \times 1 = 2 \text{ W} > 0$, 非关联方向, 发出功率

受控电压源 $P_1 = U_1 I = 1 \times 1.5 = 1.5 \text{ W} > 0$, 关联方向, 吸收功率

受控电流源 $P_2 = U_2 \times 2I_2 = 4 \times 1 = 4 \text{ W} > 0$, 非并联方向, 发出功率

三个电阻吸收的功率为

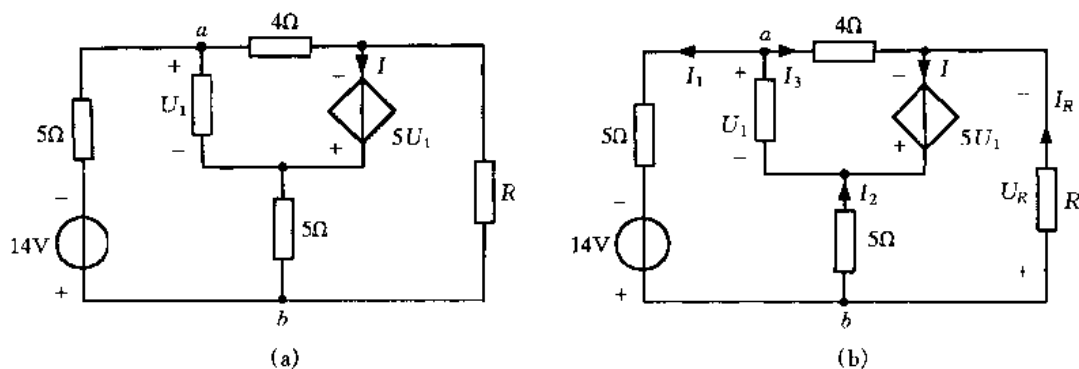
$$\begin{aligned} P_R &= I_s^2 \times 1 + (I_2)^2 \times 2 + (2I_2)^2 \times 3 \\ &= 1^2 \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 + 1^2 \times 3 \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 3 = 4.5 \text{ W} \end{aligned}$$

吸收的功率 $P = P_1 + P_R = 1.5 + 4.5 = 6 \text{ W}$

发出的功率 $P = P_{I_s} + P_2 = 2 + 4 = 6 \text{ W}$

由此可见, 电路中发出的功率等于吸收的功率, 即电路的功率平衡。

例 1.1.21 电路如例图 1.1.30(a)所示, 已知 $U_1 = 2 \text{ V}$, a, b 两点等电位, 求电阻 R 的值和流过受控源的电流 I 。



例图 1.1.30

解 设各支路电流如例图 1.1.30(b)所示,因为 a, b 点等电位,可把 a, b 点短接,求得电流

$$I_1 = \frac{14}{5} = 2.8 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_1 + 5U_1}{4} = \frac{6U_1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

$$I_R = I_1 - I_2 = 2.8 - 0.4 = 2.4 \text{ A}$$

电阻 R 两端电压

$$U_R = U_1 + 5U_1 = 6U_1 = 6 \times 2 = 12 \text{ V}$$

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{12}{2.4} = 5 \Omega$$

受控源电流

$$I = I_3 + I_R = 3 + 2.4 = 5.4 \text{ A}$$

1.2 线性电阻电路的一般分析和电路定理

1.2.1 理论提要

求解电路可以应用一般分析法,也可以应用电路定理。所谓一般分析法是指不要求改变电路结构,而是选择合适的电路变量,根据电路的基本定律 KCL 和 KVL 以及元件的电压、电流关系 VCR 建立足够的电路方程,分析求解电路的方法。运用电路定理分析和求解电路也是行之有效的重要方法。

1. 电阻电路的一般分析法

(1) 支路分析法

首先假设各支路电流的参考方向,以支路电流为求解对象,应用基尔霍夫两个定律列出方程组求解的方法,称为支路电流法。

(2) 回路电流法

首先假设各独立回路电流的参考方向,以独立回路电流为求解对象,应用基尔霍夫电压定律列出方程组求解的方法,称为回路电流法。它适用于平面或非平面电路。

如果在平面电路中,以网孔电流为求解对象,应用基尔霍夫电压定律列出方程组求解,称为网孔电流法。

(3) 结点电压法

首先选择电路的参考结点,令参考结点电位为零。以结点电位为求解对象,应用基尔霍夫电流定律列出方程组求解的方法称为结点电压法。

2. 电路定理

(1) 叠加定理

叠加定理可以表述为:线性电阻电路中,任一电压或电流都是电路中各个独立电源单独作用时,在该处产生的电压或电流的代数和。当电路中存在受控源时,叠加定理仍然适用。使用叠加定理时应注意以下几点:

① 叠加定理只适用于线性电路,不适用于非线性电路。

② 在各电源单独作用时,不作用的电压源置零,原电压源处用短路代替;不作用的电流源置零,原电流源处用开路代替。电路中所有电阻都不予更动,受控源仍保留在各分电路中。

③ 计算各独立源单独作用时,电路中的电流、电压参考方向可以取与原电路中的参考方向相同,叠加取和时,注意是代数和。

④ 用叠加后的电压、电流计算功率。

(2) 替代定理

替代定理可以表述为:给定一个线性电阻电路,其中第 k 支路的电压 u_k 和电流 i_k 为已知,那么此支路就可以用一个电压等于 u_k 的电压源 u_s ,或一个电流等于 i_k 的电流源 i_s 替代,替代后电路中全部电压和电流均保持原值。替代定理可以推广到非线性电路。

(3) 戴维宁定理和诺顿定理

戴维宁定理可以表述为:一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口,对外电路来说,可以用一个电压源和电阻的串联组合等效替代,此电压源的电压等于一端口的开路电压,电阻等于一端口的全部独立电源置零后的输入电阻。

诺顿定理可以表述为:一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口,对外电路来说,可以用一个电流源和电导的并联组合等效替代,电流源的电流等于该一端口的短路电流,电导等于一端口的全部独立源置零后的输入电导。

戴维宁定理和诺顿定理又称为等效电源定理,只适用于线性电路,不适用于非线性电路。在使用中还应注意,含源一端口网络与外电路之间应该无任何耦合。

求解开路电压 u_{oc} 时,应注意一端口端口处电流为零;求解短路电流 i_{sc} 时应注意一端口端口处电压为零。

等效电路中的电阻 R_{eq} 或 G_{eq} 等于一端口的全部独立源置零后的输入电阻,求法有以下几种。

① 对于不含受控源的一端口网络,在独立源全部置零后采用串、并联或Y形与△形等效变换求得等效电阻。

② 对于含有受控源的一端口网络,在独立源全部置零后采用外加电源法,找出端口电压 u 与端口电流 i 的关系, $R_{eq} = \frac{u}{i}$ 。

③ 求出含源一端口网络的开路电压 u_{oc} 和短路电流 i_{sc} ,其等效电阻为开路电压和短路电

流的比值,称为开路短路法,即 $R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$ 。

如果含源一端口网络外接可调电阻 R ,当 $R = R_{eq}$ 时,电阻 R 可以从一端口网络获得最大功率,该最大功率: $P_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$,此即为最大功率传输定理在电阻电路中的表述。

(4) 特勒根定理

特勒根定理可以表述为:两个具有相同拓扑结构的电路 N 和 \hat{N} ,若按同样的顺序指定它们的支路电流和支路电压,并有相同的关联参考方向,如分别设为

$$N: \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & \cdots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_k & \cdots \end{pmatrix} \quad \hat{N}: \begin{pmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 & \cdots & \hat{i}_k & \cdots \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & \cdots & \hat{u}_k & \cdots \end{pmatrix}$$

则任一时刻,有

$$\sum u_k i_k = 0 \quad (1-2-1)$$

$$\sum u_k \hat{i}_k = 0 \quad (1-2-2)$$

$$\sum \hat{u}_k i_k = 0 \quad (1-2-3)$$

式(1-2-1)是特勒根定理第一种形式,它表明任何一个电路的全部支路吸收的功率之和为零,是功率守恒原理的体现。

式(1-2-2),(1-2-3)是特勒根定理第二种形式,它表明在两个具有相同拓扑结构的电路中,一个电路的支路电压和另一个电路的支路电流,或者是同一电路在不同时刻的相应支路电压和支路电流所必须遵循的数学关系,由于仍具有功率之和的形式,有时又称为“拟功率定理”。

特勒根定理对任何具有线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。

(5) 互易定理

互易定理可以表述为:对一个仅含线性电阻的电路,在单一激励下产生响应,当激励和响应互换位置时,其比值保持不变。

激励和响应可能是电压或电流,所以互易定理有三种不同形式。需要指出,互易定理只适用于线性电路,不适用于非线性电路,且在激励与响应互换位置时,电路其余结构不能发生变化。

1.2.2 典型题解析

例 1.2.1 电路如例图 1.2.1 所示,试用支路电流作为未知量列写求解电路所需的独立方程组。

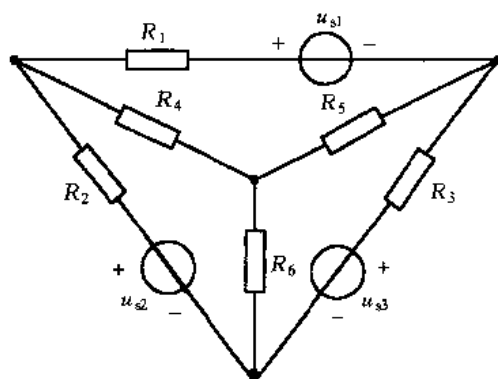
解 设各支路电流 $i_1 \sim i_6$, 结点①,②,③,④,回路 I, II, III, 电路如例图 1.2.2 所示。

以结点④为参考结点,应用 KCL 列结点①,②,③的电流方程。

$$\text{结点①} \quad i_1 - i_2 + i_4 = 0 \quad (1)$$

$$\text{结点②} \quad -i_1 - i_3 + i_5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{结点③} \quad -i_4 - i_5 + i_6 = 0 \quad (3)$$



例图 1.2.1

选定回路绕行方向,应用 KVL 列出回路 I, II, III 的回路电压方程。

$$\text{回路 I} \quad R_1 i_1 - R_4 i_4 + R_5 i_5 = -u_{s1} \quad (4)$$

$$\text{回路 II} \quad R_2 i_2 + R_4 i_4 + R_6 i_6 = u_{s2} \quad (5)$$

$$\text{回路 III} \quad R_3 i_3 + R_5 i_5 + R_6 i_6 = u_{s3} \quad (6)$$

方程组(1)~(6)即为求解电路所需的方程组。从所得结果可以看出,用支路电流法求解电路所必需的方程个数较多,计算量大。为减少求解的方程数,多采用回路(网孔法)或结点法。

例 1.2.2 对于例 1.2.1 所示电路,试用回路电流作未知量列写求解电路所需的独立方程。

解 本题选取网孔作为独立回路,如例图 1.2.3 所示,网孔电流分别为 i_1, i_2, i_3 。

对网孔应用 KVL 列方程

回路 I

$$(R_1 + R_4 + R_5)i_1 - R_4 i_2 - R_5 i_3 = -u_{s1}$$

回路 II

$$-R_4 i_1 + (R_2 + R_4 + R_6)i_2 - R_6 i_3 = u_{s2}$$

回路 III

$$-R_5 i_1 - R_6 i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 = -u_{s3}$$

从所得方程组可以看出,若选网孔为独立回路,网孔电流的绕行方向取一致的情况下,回路中自电阻的电压在相应回路中取正号,而互电阻上的电压在相应回路中取负号。而方程中电压源前的正、负号由电压源的方向与回路绕行方向相反或一致而决定。

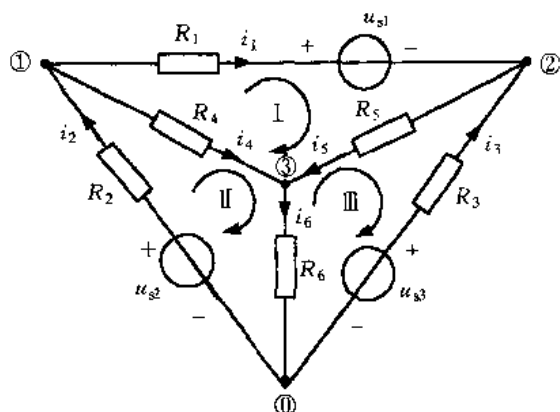
例 1.2.3 对于例 1.2.1 所示电路,试用结点电压法列写求解电路所需的独立方程。

解 指定参考结点,设其它结点的电压为 u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} 。对结点列出用结点电压表示的电流方程。如例图 1.2.4 所示。

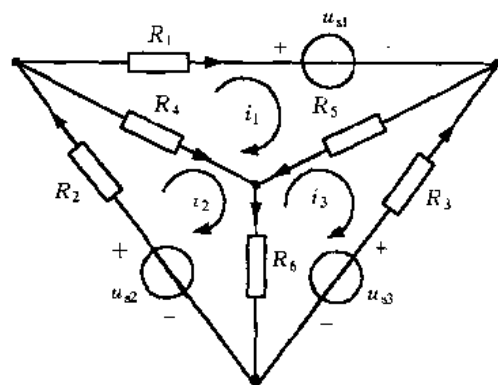
$$\text{结点①} \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} - \frac{1}{R_1}u_{n2} - \frac{1}{R_4}u_{n3} = \frac{u_{s1}}{R_1} + \frac{u_{s2}}{R_2}$$

$$\text{结点②} \quad -\frac{1}{R_1}u_{n1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)u_{n2} - \frac{1}{R_5}u_{n3} = -\frac{u_{s1}}{R_1} + \frac{u_{s3}}{R_3}$$

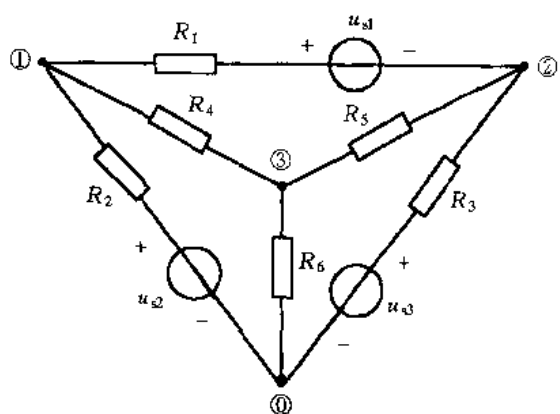
$$\text{结点③} \quad -\frac{1}{R_4}u_{n1} - \frac{1}{R_5}u_{n2} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)u_{n3} = 0$$



例图 1.2.2



例图 1.2.3

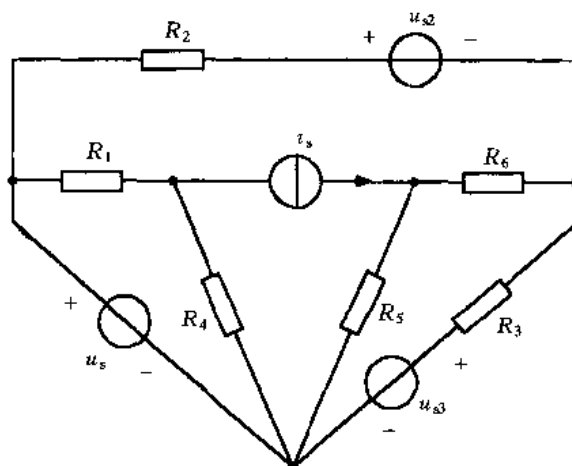


例图 1.2.4

从所得方程组可以看出,选定参考结点,在各结点的方程中,自电导中的电流在相应结点方程中取正号,互电导的电流在相应结点方程中取负号。至于电压源引起的电流,视电压源的方向是指向结点还是离开结点而在方程式右边相应取正号或负号。

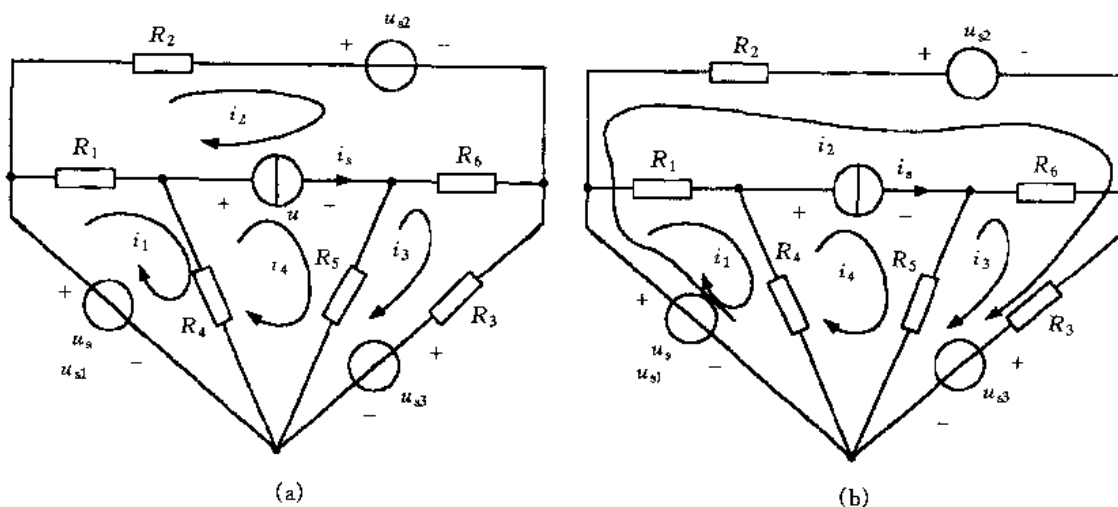
例 1.2.4 试用回路电流法列出例图 1.2.5 所示电路的方程。

解 题目中电流源 i_s 称为无伴电流源,因为没有与之并联的电阻,在应用回路法时,对无伴电流源通常有两种处理方法。①仍选网孔为独立回路,增设电流源两端电压为辅助变量,由于电流源电流为已知,可增加一个与电流源支路有关的两个网孔电流的约束方程。②在选取独立回路时,只让一个回路电流流过该电流源,则该回路电流为已知,即就等于电流源电流 i_s ,该回路方程则不必列出。下面分别用两种方法列出图示电路的电路方程。



例图 1.2.5

(1) 选网孔为独立回路,设电流源两端电压为 u ,如例图 1.2.6(a)所示。



例图 1.2.6

列出回路方程为

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4)i_1 - R_1i_2 - R_4i_4 &= u_s \\ -R_1i_1 + (R_1 + R_2 + R_6)i_2 - R_6i_3 &= u - u_{s2} \\ -R_6i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 - R_5i_4 &= -u_{s3} \\ -R_4i_1 - R_5i_3 + (R_4 + R_5)i_4 &= -u \\ i_s &= i_4 - i_2 \end{aligned}$$

方程中有四个网孔电流和一个电流源两端电压共五个电路变量,方程组中独立方程为五个,正

是求解电路所需要的独立方程。

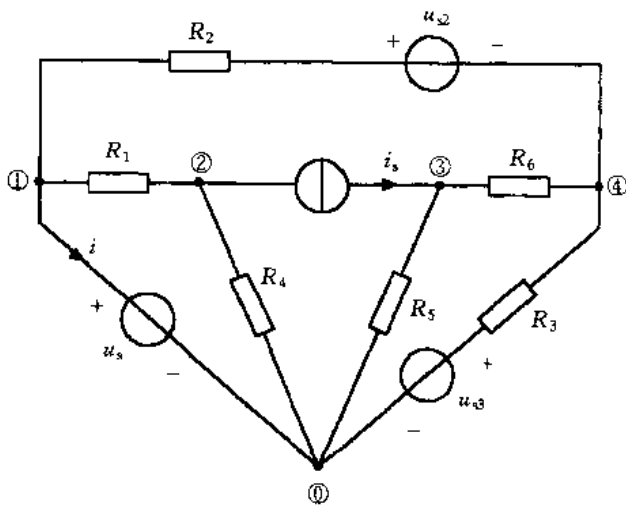
(2) 选回路如例图 1.2.6(b) 所示, 由于电流源支路只有回路电流 i_4 流过, 所以有 $i_4 = i_s$, 可以不必再列该回路的方程, 但在列其它回路方程时, 不可忽略其回路电流在互阻上的电压, 且由于所选回路不是网孔, 所以互阻上的电压在相应回路中不一定取负号。列得的方程如下

$$\begin{aligned}(R_1 + R_4)i_1 - R_4i_4 &= u_s \\ (R_2 + R_3)i_2 + R_3i_3 &= u_s - u_{s2} - u_{s3} \\ R_3i_2 + (R_3 + R_5 + R_6)i_3 - R_5i_4 &= -u_{s3} \\ i_4 &= i_s\end{aligned}$$

求出各回路电流后, 如需求解各支路电流, 可假定各支路电流参考方向, 再根据回路电流与支路电流的关系, 进一步求得各支路电流。

例 1.2.5 试用结点法列出例 1.2.4 所示电路的方程。

解 题目中电压源 u_s 称为无伴电压源, 因为没有电阻与之串联。在应用结点法时对无伴电压源通常有两种处理方法。①选定参考结点后, 增设电压源电流为辅助变量, 由于电压源电压为已知, 则增加一个与电压源支路有关的两个结点电压的约束方程。②在选参考结点时, 使无伴电压源的一端为参考结点, 则无伴电压源所连的结点电压即为已知, 则该结点方程不必再列出。下面分别用两种处理方法列出所给电路的方程。



例图 1.2.7

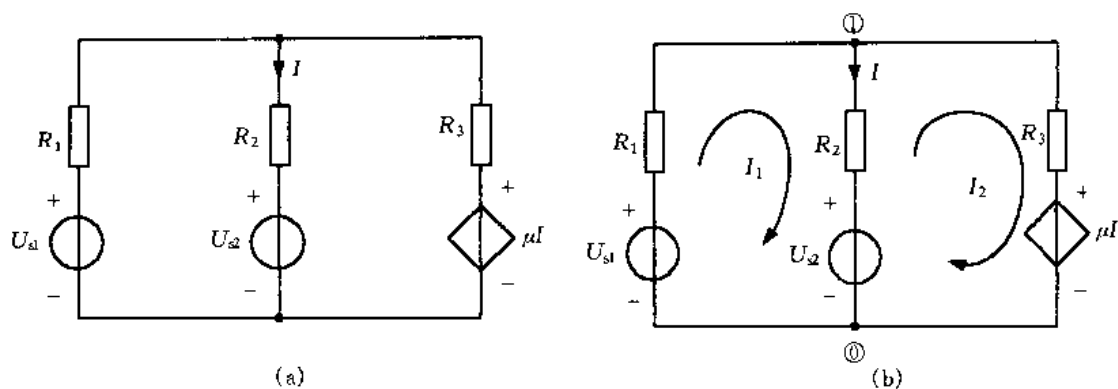
(1) 选定参考结点, 设电压源支路电流为 i , 电路如例图 1.2.7 所示。列得方程如下

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_{n1} - \frac{1}{R_1}u_{n2} - \frac{1}{R_2}u_{n4} &= \frac{u_{s2}}{R_2} - i \\ -\frac{1}{R_1}u_{n1} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n2} &= -i_s \\ \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)u_{n3} - \frac{1}{R_6}u_{n4} &= i_s \\ -\frac{1}{R_2}u_{n1} - \frac{1}{R_6}u_{n3} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}\right)u_{n4} &= \frac{u_{s3}}{R_3} - \frac{u_{s2}}{R_2} \\ u_{n1} &= u_s\end{aligned}$$

方程中有四个结点电压和一个电压源中的电流共五个电路变量, 方程组中独立方程为五个, 正是求解电路所需要的独立方程。

(2) 由于本题中无伴电压源所处的位置, 在方法(1)中选定的参考结点下, 结点①的结点电压 u_{n1} 为已知, 即 $u_{n1} = u_s$, 所以结点①的方程不必列出, 其余方程不变。

例 1.2.6 电路如例图 1.2.8(a) 所示, 试用(1)回路法, (2)结点法列出电路方程。



例图 1.2.8

解 电路含有受控源。在应用回路法(网孔法)、结点法求解电路时,如果电路中含有受控源,列方程时先将受控源当作独立源对待,再把控制量用回路电流或结点电压表示出来。

(1) 选网孔为独立回路,如例图 1.2.8(b)所示

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 &= U_{s1} - U_{s2} \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_2 &= U_{s2} - \mu I \\ I &= I_1 - I_2\end{aligned}$$

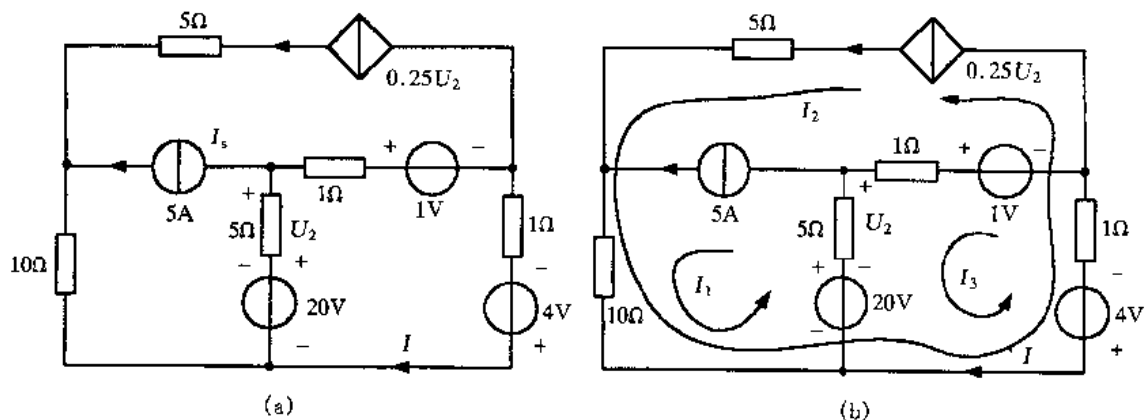
即所列得的回路方程。

(2) 选定参考结点,如例图 1.2.8(b)所示

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)U_{n1} &= \frac{U_{s1}}{R_1} + \frac{U_{s2}}{R_2} + \frac{\mu I}{R_3} \\ I &= \frac{U_{n1} - U_{s2}}{R_2}\end{aligned}$$

即所列得的结点方程。

例 1.2.7 试求例图 1.2.9(a)所示电路中电流 I 及受控源的功率。



例图 1.2.9

解 电路含有无伴独立电流源和无伴受控电流源,因此选网孔如例图 1.2.9(b)所示,只须列一个回路方程

$$I_1 = 5 \text{ A}$$

$$I_2 = 0.25 U_2$$

$$(1 + 1 + 5) I_3 - 5 \times I_1 + 0.25 U_2 \times 1 = -20 - 4 + 1$$

$$7 I_3 - 25 + 0.25 U_2 = -23$$

$$U_2 = (I_3 - 5) \times 5$$

代入上式解得

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

$$I = -(I_3 + I_2) = -(1 + 0.25 U_2)$$

$$= -[1 + 0.25 \times (I_3 - 5) \times 5]$$

$$= -(1 - 5) = 4 \text{ A}$$

例 1.2.8 试用结点法求图 1.2.10 所

示电路中的结点电压 U_{n1} , U_{n2} , 电流 I 。

解 结点电压方程为

$$\left(\frac{1}{0.5} + 1\right) U_{n1} - U_{n2} = 5$$

$$-U_{n1} + \left(\frac{1}{3} + 1\right) U_{n2} = \frac{U_1}{3} - 4$$

$$U_1 = U_{n1}$$

整理为

$$3U_{n1} - U_{n2} = 5$$

$$U_{n1} - U_{n2} = 3$$

解得

$$U_{n1} = 1 \text{ V}$$

$$U_{n2} = -2 \text{ V}$$

$$\text{电流 } I = \frac{U_{n1} - U_{n2}}{1} = 3 \text{ A}$$

例 1.2.9 电路如例图 1.2.11 所示, 求受控电压源的功率。

解 要求受控电压源的功率必须求得受控电压源的电流和受控电压源两端的电压。可应用网孔电流法也可应用结点电压法求解, 现应用结点电压法。列出结点方程

$$(2 + 2 + 2) U_{n1} - 2 U_{n2} = -10 \times 2$$

$$U_{n2} = 2 I_2$$

$$I_2 = 2 \times U_{n1}$$

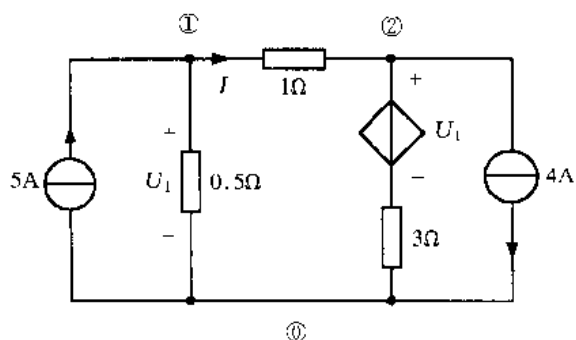
$$\text{整理为 } 6 U_{n1} - 2 \times 2 \times 2 U_{n1} = -20$$

$$\text{解得 } U_{n1} = 10 \text{ V}$$

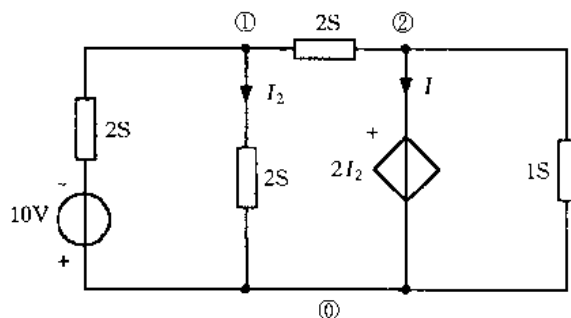
$$U_{n2} = 2 I_2 = 2 \times 2 U_{n1} = 40 \text{ V}$$

设受控源支路电流为 I

$$\begin{aligned} I &= (U_{n1} - U_{n2}) \times 2 - U_{n2} \times 1 \\ &= (10 - 40) \times 2 - 40 \times 1 = -100 \text{ A} \end{aligned}$$



例图 1.2.10



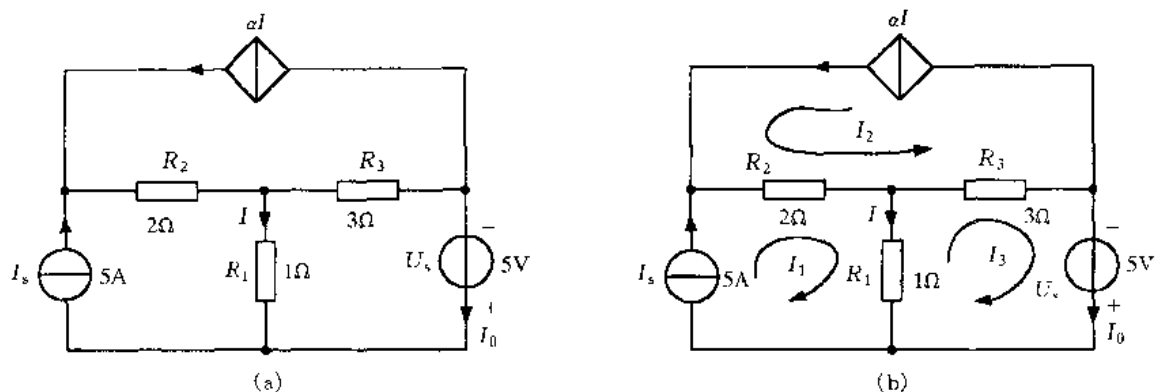
例图 1.2.11

受控源功率

$$P = UI = 2I_2 I = U_{n2} I = 40 \times (-100) = -4000 \text{ W} < 0 \quad (\text{关联方向})$$

受控源发出功率 4 000 W。

例 1.2.10 例图 1.2.10(a)所示电路,已知 5 V 电压源 U_s 支路电流 I_0 为 10 A,试确定受控电流源的控制系数 α 。



例图 1.2.12

解 图示电路有两个无伴电流源,因此选如例图 1.2.12(b)所示的网孔,可知 $I_1 = I_s = 5 \text{ A}$, $I_2 = \alpha I$,只需列网孔 3 的方程为

$$(R_1 + R_3)I_3 - R_1I_1 + R_3I_2 = U_s$$

将 $I_1 = I_s = 5$, $I_2 = \alpha I = \alpha(I_1 - I_3)$ 及各参数代入上式,解得

$$I_3 = \frac{10 - 15\alpha}{4 - 3\alpha}$$

又因为 $I_3 = I_0 = 10 \text{ A}$

解得

$$\alpha = 2$$

所以受控电流源控制系数 α 为 2。

例 1.2.11 电路如例图 1.2.13(a)所示,试求电压源的电流 I 和电流源的电压 U 。

解 要求解电流 I 和电压 U ,可用网孔法、结点法,也可以应用叠加定理。现采用叠加定理求解。

6 V 电压源单独作用时,6 A 电流源所在处用开路代替。这时电压源中的电流为 $I^{(1)}$,电流源的电压为 $U^{(1)}$,电路如例图 1.2.13(b)所示。

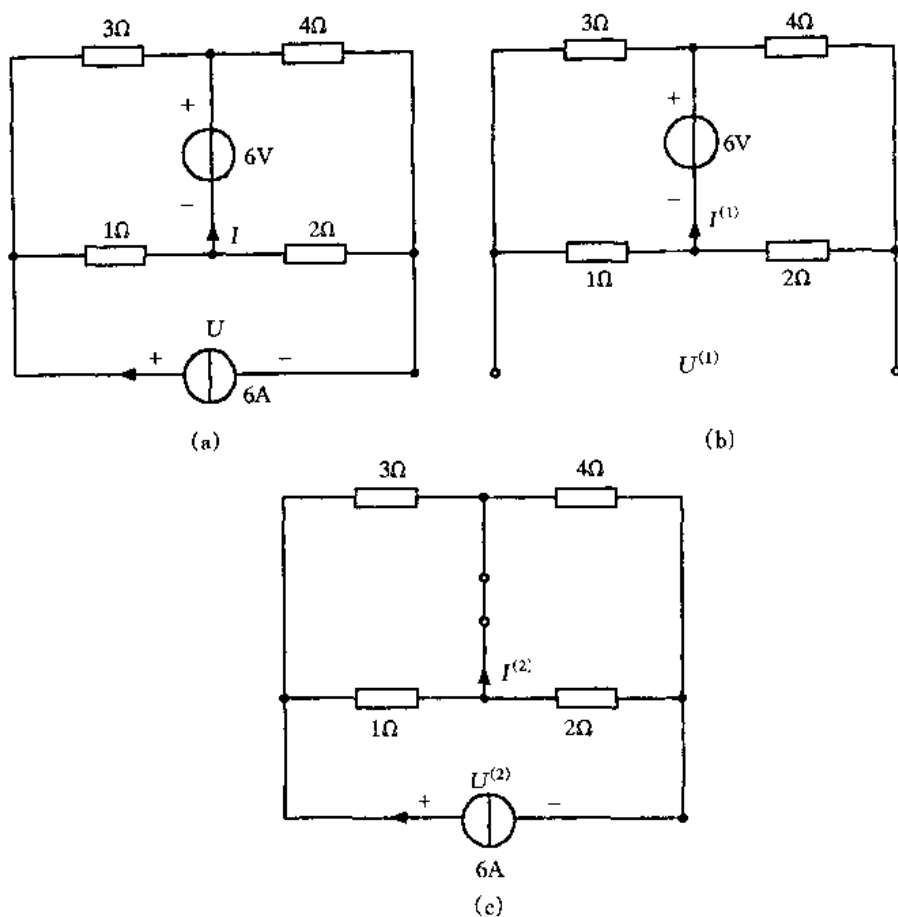
$$I^{(1)} = \frac{6}{3+1} + \frac{6}{4+2} = 2.5 \text{ A}$$

$$U^{(1)} = \frac{6}{3+1} \times 1 - \frac{6}{4+2} \times 2 = -0.5 \text{ V}$$

6 A 电流源作用,6 V 电压源所在处用短路代替,这时电压源中的电流为 $I^{(2)}$,电流源两端电压为 $U^{(2)}$,电路如例图 1.2.13(c)所示。用分流公式得

$$I^{(2)} = 6 \times \frac{2}{4+2} - 6 \times \frac{1}{3+1} = 0.5 \text{ A}$$

$$U^{(2)} = 6 \times \left(\frac{1 \times 3}{1+3} + \frac{4 \times 2}{4+2} \right) = 12.5 \text{ V}$$



例图 1.2.13

得

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 2.5 + 0.5 = 3 \text{ A}$$

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} = -0.5 + 12.5 = 12 \text{ V}$$

例 1.2.12 求例图 1.2.14(a)所示电路中的电流 I 和电压 U 。

解 本题仍应用叠加定理求解,应注意的是电路中含有受控源,在各独立源单独作用时,受控源应保留在原位置。

10 V 电压源单独作用,5 A 电流源所在处用开路代替,如例图 1.2.14(b)所示。

$$(2 + 1)I^{(1)} = 10 - 2I^{(1)}$$

$$I^{(1)} = 2 \text{ A}$$

$$U^{(1)} = -2I^{(1)} + 10 = -4 + 10 = 6 \text{ V}$$

5 A 电流源单独作用,10 V 电压源所在处用短路代替,如例图 1.2.14(c)所示回路。

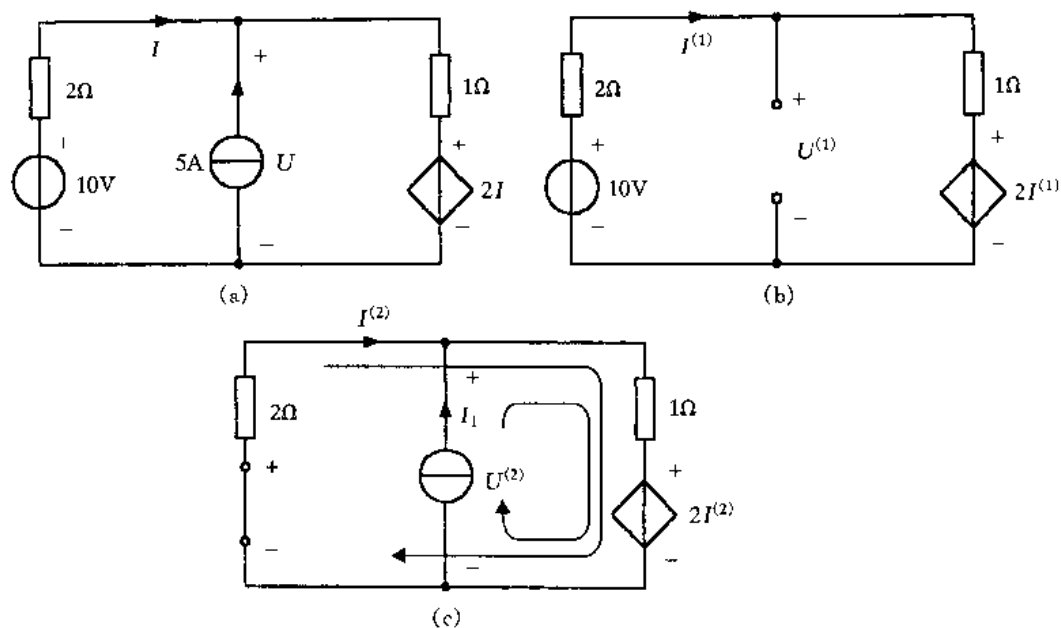
$$I_1 = 5 \text{ A}$$

$$(2 + 1)I^{(2)} + 1 \times I_1 = -2I^{(2)}$$

解得

$$I^{(2)} = -1 \text{ A}$$

$$U^{(2)} = -I^{(2)} \times 2 = -(-1 \times 2) = 2 \text{ V}$$



例图 1.2.14

电流 I 和电压 U 分别为

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 2 - 1 = 1 \text{ A}$$

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} = 6 + 2 = 8 \text{ V}$$

例 1.2.13 例图 1.2.15 所示电路中 N 是无源线性网络。当 $U_s = 40 \text{ V}$, $I_s = 0$ 时 $U_{ab} = -20 \text{ V}$; 当 $U_s = 20 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$ 时 $U_{ab} = 0$, 求当 $U_s = -60 \text{ V}$, $I_s = 12 \text{ A}$ 时电压 $U_{ab} = ?$

解 图示线性电路满足叠加定理, 电压 U_{ab} 应是电压源 U_s 和电流源 I_s 共同作用产生的, 可表示为

$$U_{ab} = K_1 U_s + K_2 I_s$$

根据已知条件 $U_s = 40 \text{ V}$ $I_s = 0$ $U_{ab} = -20 \text{ V}$

$$U_s = 20 \text{ V} \quad I_s = 2 \text{ A} \quad U_{ab} = 0$$

有方程 $-20 = K_1 \times 40 + K_2 \times 0$

$$0 = K_1 \times 20 + K_2 \times 2$$

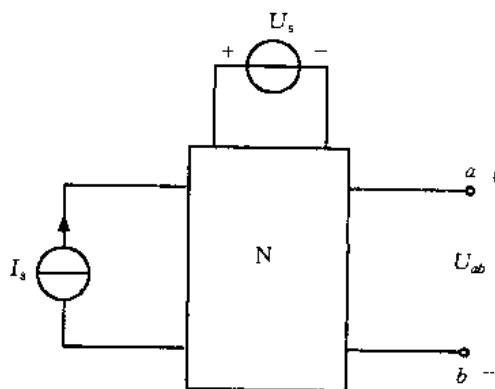
解得

$$K_1 = -\frac{1}{2}$$

$$K_2 = 5$$

所以, 当 $U_s = -60 \text{ V}$, $I_s = 12 \text{ A}$ 时

$$U_{ab} = -\frac{1}{2} \times (-60) + 5 \times 12 = 90 \text{ V}$$



例图 1.2.15

例 1.2.14 例图 1.2.16 所示电路是 - 线性电阻电路, 已知

(1) 当 $U_{s1} = 0 \text{ V}$, $U_{s2} = 0$ 时 $U = 1 \text{ V}$

(2) 当 $U_{s1} = 1 \text{ V}$, $U_{s2} = 0$ 时 $U = 2 \text{ V}$

(3) 当 $U_{s1} = 0 \text{ V}$, $U_{s2} = 1 \text{ V}$ 时

$$U = -1 \text{ V}$$

试给出 U_{s1} 和 U_{s2} 为任意值时电压 U 的表达式。

解 从所给条件(1)可知, 当 $U_{s1} = 0$, $U_{s2} = 0$ 时 $U = 1 \text{ V}$ 说明网络 N 是一个含有独立源的线性网络。根据线性电路满足叠加定理, 电压 U 是由电压源 U_{s1} , U_{s2} 和网络内电源共同作用产生, 可表示为

$$U = K_1 U_{s1} + K_2 U_{s2} + b$$

根据所给三组条件得如下方程

$$1 = K_1 \times 0 + K_2 \times 0 + b$$

$$2 = K_1 \times 1 + K_2 \times 0 + b$$

$$-1 = K_1 \times 0 + K_2 \times 1 + b$$

解得

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = -2$$

$$b = 1$$

所以, 当 U_{s1} 和 U_{s2} 为任意值时电压 U 的表达式为

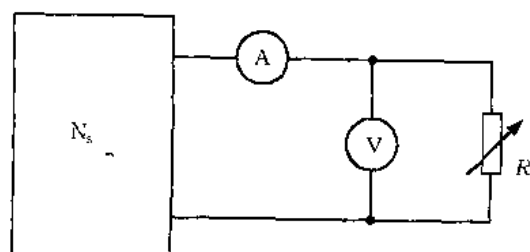
$$U = U_{s1} - 2U_{s2} + 1 \text{ V}$$

例 1.2.15 例图 1.2.17(a) 所示线性电路中, 调节电阻 R 两次, 分别得到电表的读数如下:

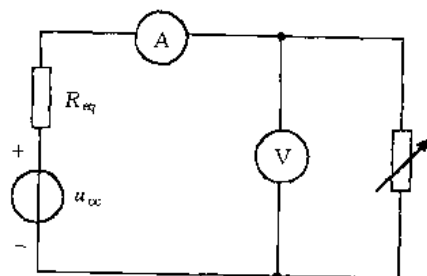
第一次: $\textcircled{A} = 2 \text{ A}$ $\textcircled{V} = 20 \text{ V}$

第二次: $\textcircled{A} = 4 \text{ A}$ $\textcircled{V} = 10 \text{ V}$

根据上述电表的读数, 给出一端口电路 N_s 的等效电路。



(a)



(b)

例图 1.2.17

解 设一端口 N_s 的戴维宁等效电路为 u_{oc} 和 R_{eq} 串联, 如例图 1.2.17(b) 所示。

根据电表的读数有 $\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_1} = 2$

$$\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_2} = 4$$

$$2R_1 = 20$$

$$4R_2 = 10$$

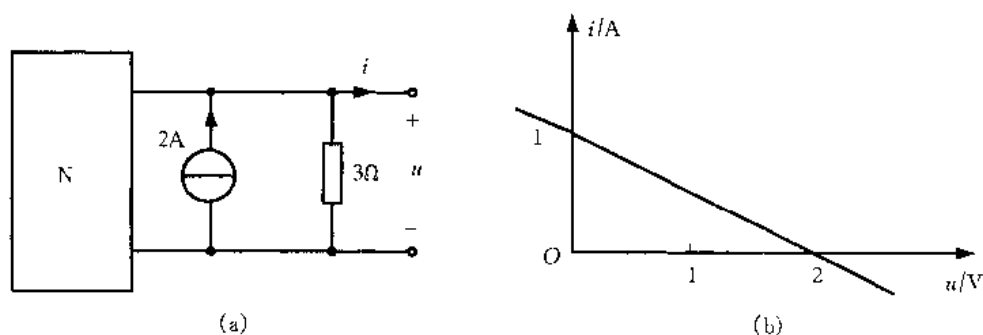
解得

$$R_{eq} = 5 \Omega$$

$$u_{oc} = 30 \text{ V}$$

该一端口网络 N_s 的戴维宁等效电路中 $R_{eq} = 5 \Omega$, u_{oc} 为 30 V。

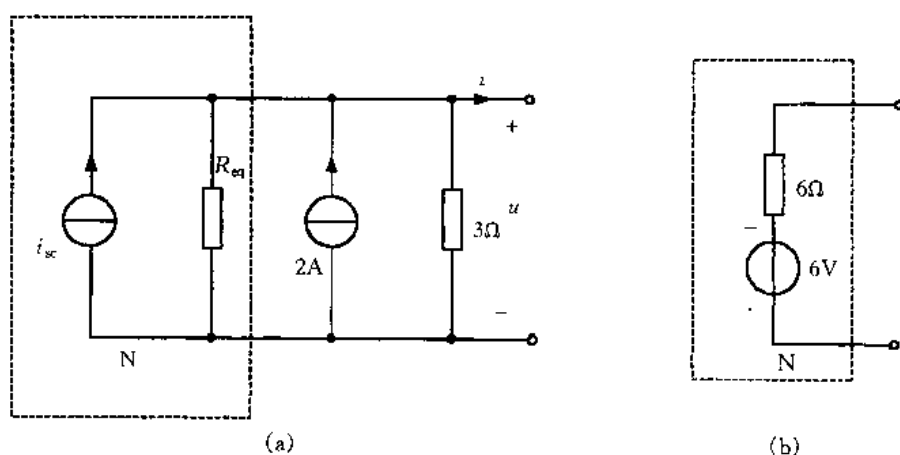
例 1.2.16 试求例图 1.2.18(a) 所示电路中 N 的戴维宁等效电路。已知端口 1-1' 的伏安特性如例图 1.2.18(b) 所示。



例图 1.2.18

解 先将网络 N 用诺顿等效电路来替代, 求出 i_{sc} 和 R_{eq} , 就可以求得相应的戴维宁等效电路, 电路如例图 1.2.19(a)。应用 KCL 有

$$i = i_{sc} + 2 - \frac{u}{R_{eq}} - \frac{u}{3}$$



例图 1.2.19

根据伏安特性曲线

$$u=0 \quad i=1$$

$$u=2 \quad i=0$$

代入上述方程解得

$$i_{sc} = -1 \text{ A}$$

$$R_{eq} = 6 \Omega$$

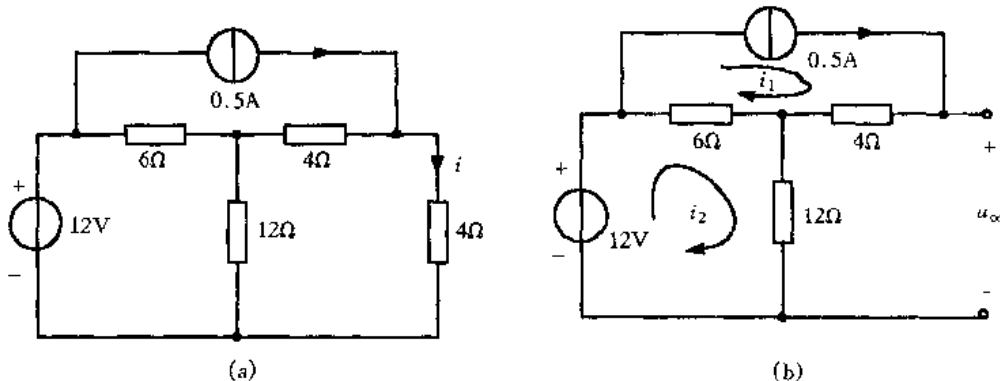
戴维宁等效电路中

$$u_{oc} = -6 \text{ V}$$

$$R_{eq} = 6 \Omega$$

网络 N 的戴维宁等效电路如例图 1.2.19(b)所示。

例 1.2.17 试用戴维宁定理求例图 1.2.20(a)所示电路中的电流 i 。



例图 1.2.20

解 首先移去待求支路,移去待求支路后其余为一端口网络。

求一端口网络的开路电压,电路简单时可用串、并联分流分压或电源等效变换求得。如果电路较复杂,可用叠加定理、网孔法、结点法求得。本题用网孔法,设网孔电流如例图 1.2.20(b)所示。列出方程

$$(6+12)i_2 - 6i_1 = 12$$

$$i_1 = 0.5$$

解得

$$i_2 = \frac{5}{6} \text{ A}$$

$$u_{oc} = 4i_1 + 12i_2 = 4 \times 0.5 + 12 \times \frac{5}{6} = 12 \text{ V}$$

求等效电阻 R_{eq} 时,将独立电源置零,即电压源所在处用短路代替,电流源所在处用开路代替,从端口看的等效电阻即为 R_{eq}

$$R_{eq} = 4 + \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 8 \Omega$$

求出戴维宁等效电路后,将待求支路接上求出电流 i

$$i = \frac{u_{oc}}{R_{eq} + 4} = \frac{12}{8 + 4} = 1 \text{ A}$$

例 1.2.18 试用戴维宁定理求例图 1.2.21 所示电路中通过 10Ω 电阻的电流 I 。

解 将 10Ω 电阻从电路中移去,求一端口网络的开路电压,由于端口开路,电流 I 为零,受控电流源 $4I$ 为零,受控电流所在处开路,将 1 A 电流源与 20Ω 电阻的并联组合等效变换为

电压源与电阻的串联组合。电路如例图 1.2.22 (a) 所示。

$$U_{oc} = 20 + 10 = 30 \text{ V}$$

用开路电压、短路电流法求等效电阻 R_{eq} ，为此先求端口短路电流 I_{sc} ，电路如例图 1.2.22 (b) 所示，列出图示回路方程

$$20I_1 + 6 \times (I_1 + 4I_1) = -10 - 20$$

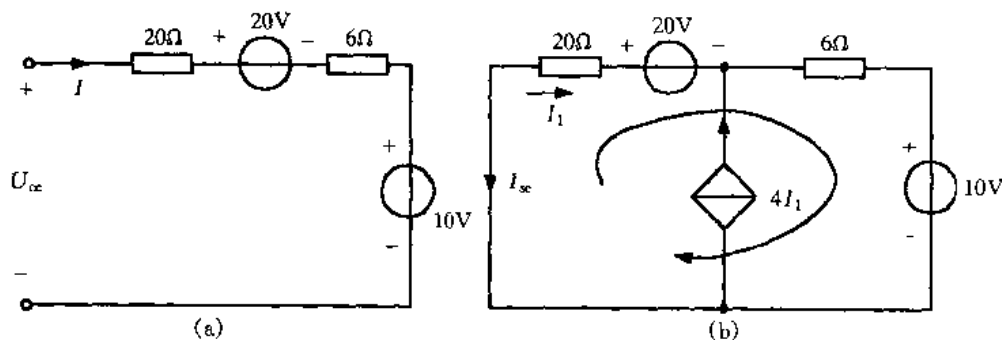
$$I_1 = \frac{-30}{50} = -0.6 \text{ A}$$

$$I_{sc} = -I_1 = 0.6 \text{ A}$$

所以等效电阻 $R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{30}{0.6} = 50 \Omega$

将 10Ω 电阻支路接入，求得电流

$$I = -\frac{30}{50 + 10} = -0.5 \text{ A}$$



例图 1.2.22

例 1.2.19 求例图 1.2.23 所示电路的诺顿等效电路。

解 将端口 $1-1'$ 短路，如例图 1.2.24 (a) 所示。应用叠加定理。

$$I_{sc}^{(1)} = I_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

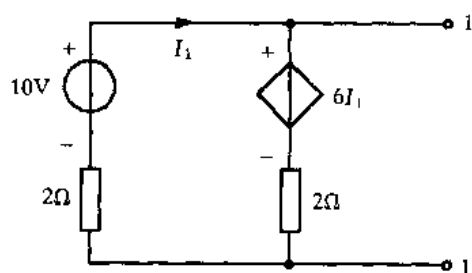
$$I_{sc}^{(2)} = \frac{6I_1}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ A}$$

$$I_{sc} = I_{sc}^{(1)} + I_{sc}^{(2)} = 5 + \frac{6 \times 5}{2} = 5 + 15 = 20 \text{ A}$$

用外施电源法求等效电阻 R_{eq} ，在端口 $1-1'$ 施加电压源，电路内独立源置零，电路如例图 1.2.24 (b) 所示。

$$I_t = -\frac{U}{2}$$

$$U = 6I_1 + 2I_2$$



例图 1.2.23

$$I_2 = 2 U$$

在结点 1 处应用 KVL

$$I = I_2 - I_1$$

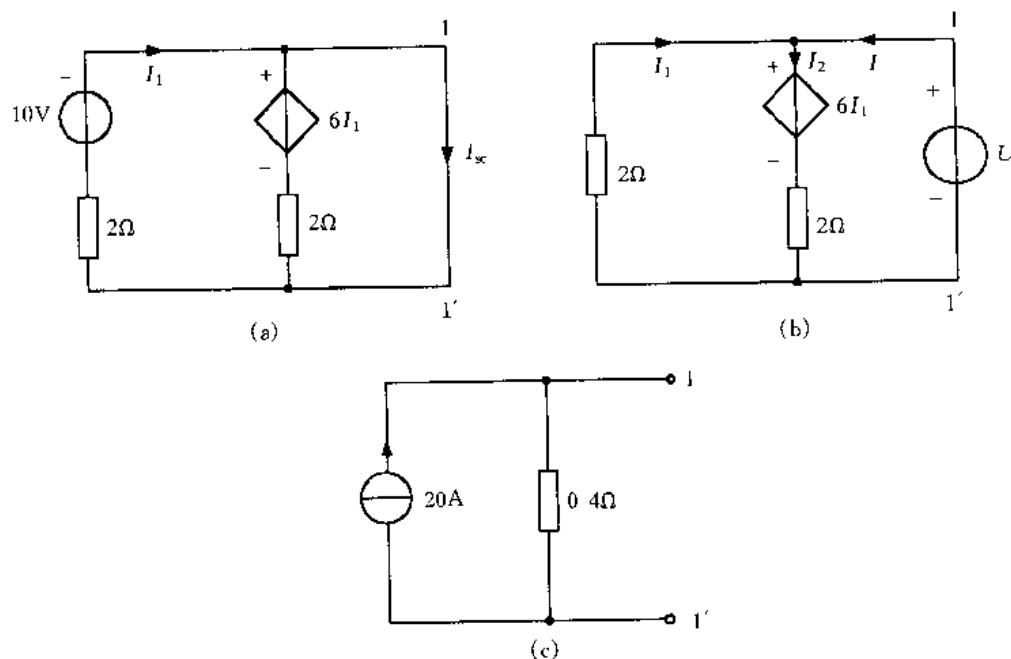
$$I = 2U - \left(-\frac{U}{2}\right)$$

$$I = 2.5 U$$

等效电阻

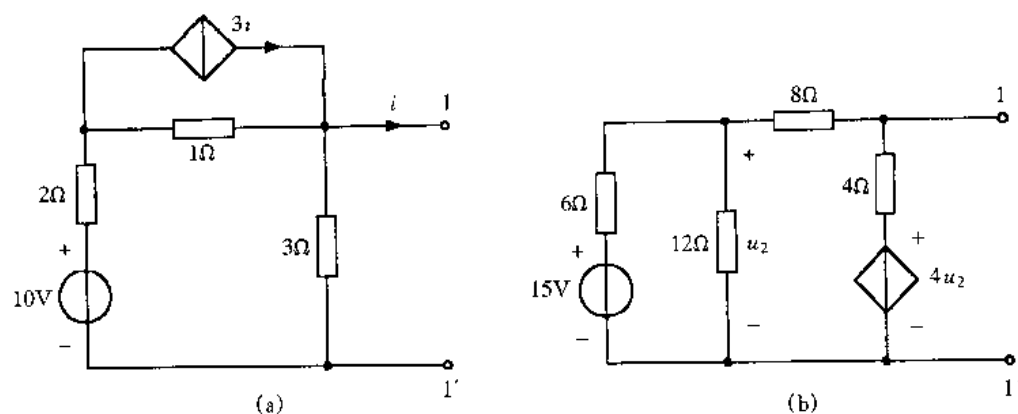
$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 0.4 \Omega$$

所得诺顿等效电路如例图 1.2.24(c)所示。



例图 1.2.24

例 1.2.20 求例图 1.2.25(a), (b)所示一端口的戴维宁或诺顿等效电路。



例图 1.2.25

解 对于例图 1.2.25(a)所示电路,求开路电压时,由于 $i = 0$,所以受控电流源等于零,受控电流源所在处开路,开路电压很方便地求得

$$u_{oc} = \frac{10}{2+1+3} \times 3 = 5 \text{ V}$$

求等效电阻时的电路如例图 1.2.26(a),端口外施电压 u ,求 u 所产生的电流 i , $R_{eq} = \frac{u}{-i}$ 。将受控电流源化为受控电压源,设 3Ω 电阻支路的电流为 i_1 ,则

$$i_1 = \frac{u}{3}; \quad i_2 = -\left(i + \frac{u}{3}\right)$$

列出图示回路方程

$$(2+1)i_2 + 3i = u$$

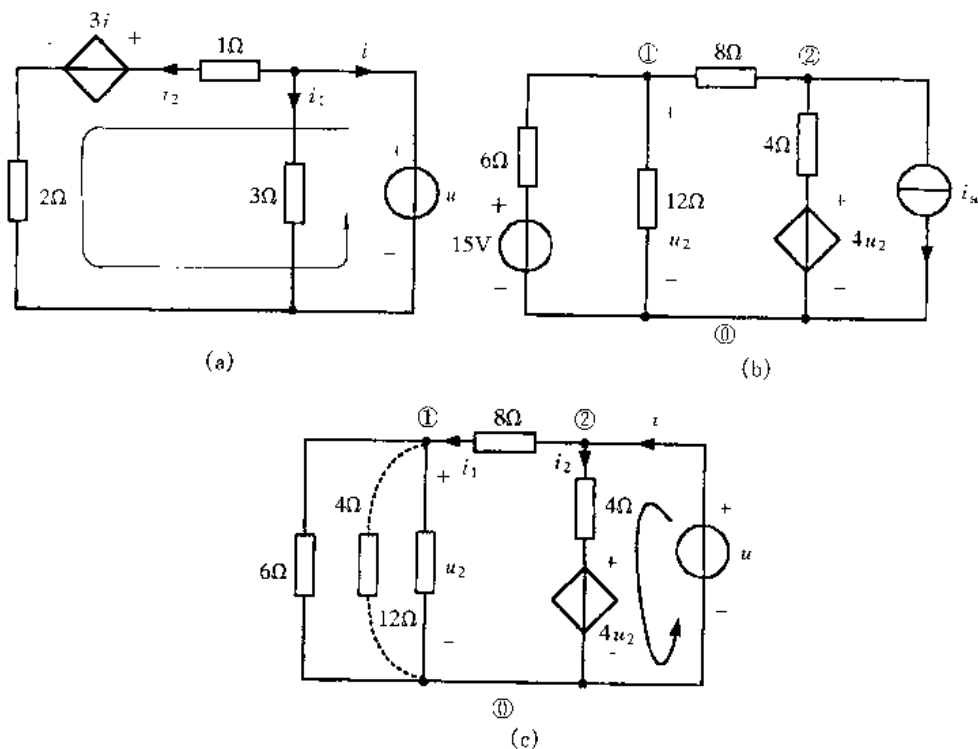
$$-3\left(i + \frac{u}{3}\right) + 3i = u$$

$$2u = 0$$

$$u = 0$$

由于 $u = 0$, 所以 $R_{eq} = \frac{u}{i} = 0$

例图 1.2.25(a)所示电路的戴维宁等效电路为一理想电压源,无诺顿等效电路。



例图 1.2.26

对于例图 1.2.25(b)所示电路,无法求得端口 1-1' 开路电压,转而求 1-1' 端口短路电流 i_{sc} ,将短路电流 i_{sc} 用电流值为 i_{sc} 的电流源等效替代,电路如例图 1.2.26(b)所示,列出结点电压方程为

$$u_{n2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) u_{n1} = \frac{15}{6}$$

解得

$$u_{n1} = \frac{20}{3} \text{ V}$$

$$u_2 = u_{n1}$$

短路电流 i_{sc} 是电压 u_{n1} 和受控源 $4u_2$ 共同作用产生, 所以

$$i_{sc} = \frac{u_{n1}}{8} + \frac{4u_2}{4} = \frac{20}{3 \times 8} + 4 \times \frac{20}{3 \times 4} = 7.5 \text{ A}$$

求等效电阻的电路如例图 1.2.26(c), 在端口外施电压源 u , 将网络内 15 V 电压源置零, 等效

电阻 $R_{eq} = \frac{u}{i}$ 。

$$i_1 = \frac{u}{12}$$

$$i_2 = i - \frac{u}{12}$$

列出回路方程

$$u = 4i_2 + 4u_2$$

将 $u_2 = \frac{u}{12} \times 4 = \frac{u}{3}$ 代入上式

$$u = 4\left(i - \frac{u}{12}\right) + 4 \times \frac{u}{3}$$

有 $4i = 0$

$$i = 0$$

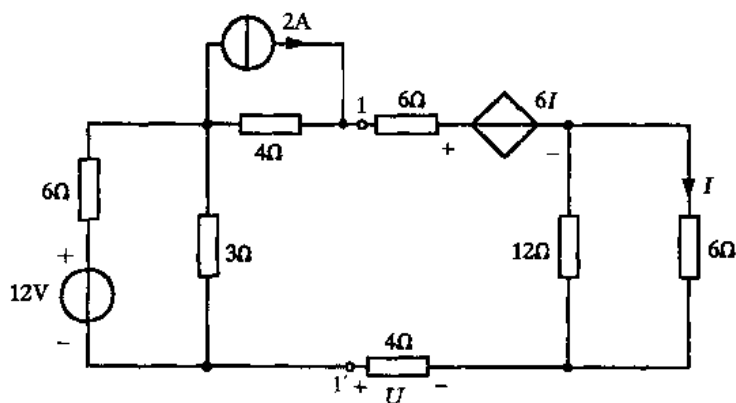
等效电阻

$$R_{eq} = \frac{u}{i} \rightarrow \infty$$

$$G_{eq} = 0$$

所以例图 1.2.25(b)所示电路为一理想电流源。有时还会遇到含源一端口网络的等效电路为一纯电阻的情况, 这些都是有源一端口网络等效电路中的特殊情况。

例 1.2.21 电路如例图 1.2.27 所示, 试用戴维宁定理计算 4Ω 电阻两端的电压 U 。



例图 1.2.27

解 分别求 $1-1'$ 端口左边和 $1-1'$ 端口右边的戴维宁等效电路, 电路如例图 1.2.28(a)所

示。求得 $1-1'$ 端口左边电路的开路电压和等效电阻为

$$u_{oc1} = 4 \times 2 + \frac{12}{6+3} \times 3 = 12 \text{ V}$$

$$R_{eq1} = \frac{6 \times 3}{6+3} + 4 = 6 \Omega$$

因为 $1-1'$ 端口右边为无源网络, 所以 $u_{oc2} = 0$, 求 R_{eq2} 的等效电路如例图 1.2.28(b) 所示。

$$U = 6I' + 6I + 6I = 6I' + 12I$$

而

$$I = I' \frac{12}{12+6}$$

代入上式, 得

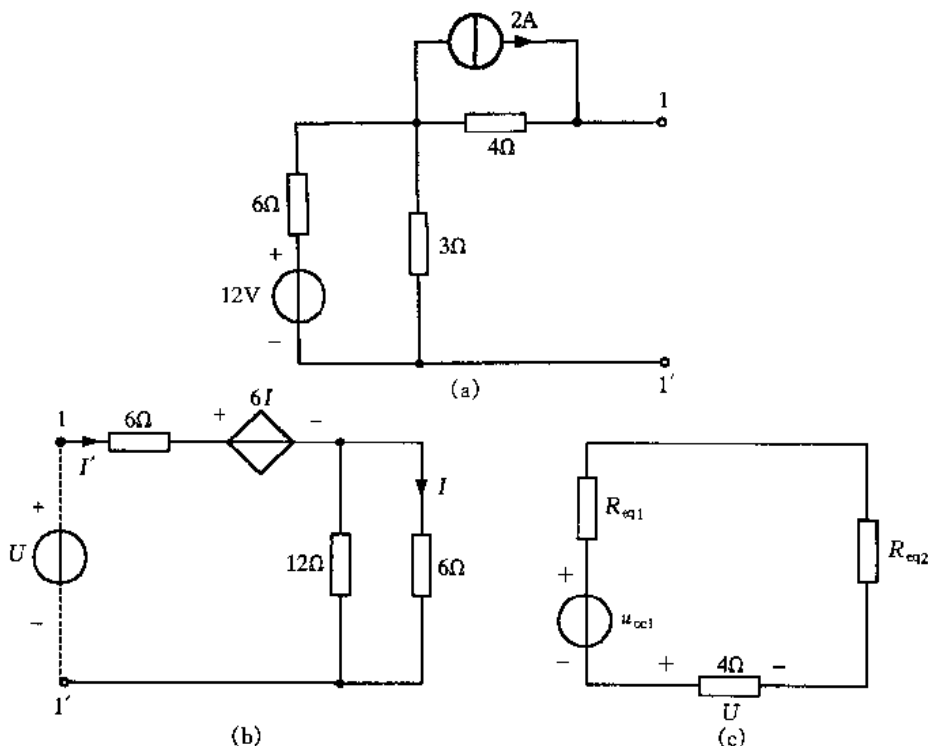
$$U = 14I'$$

$$R_{eq2} = \frac{U}{I'} = 14 \Omega$$

将待求支路接上, 如例图 1.2.28(c) 所示。

得

$$U = \frac{-12}{6+4+14} \times 4 = -2 \text{ V}$$



例图 1.2.28

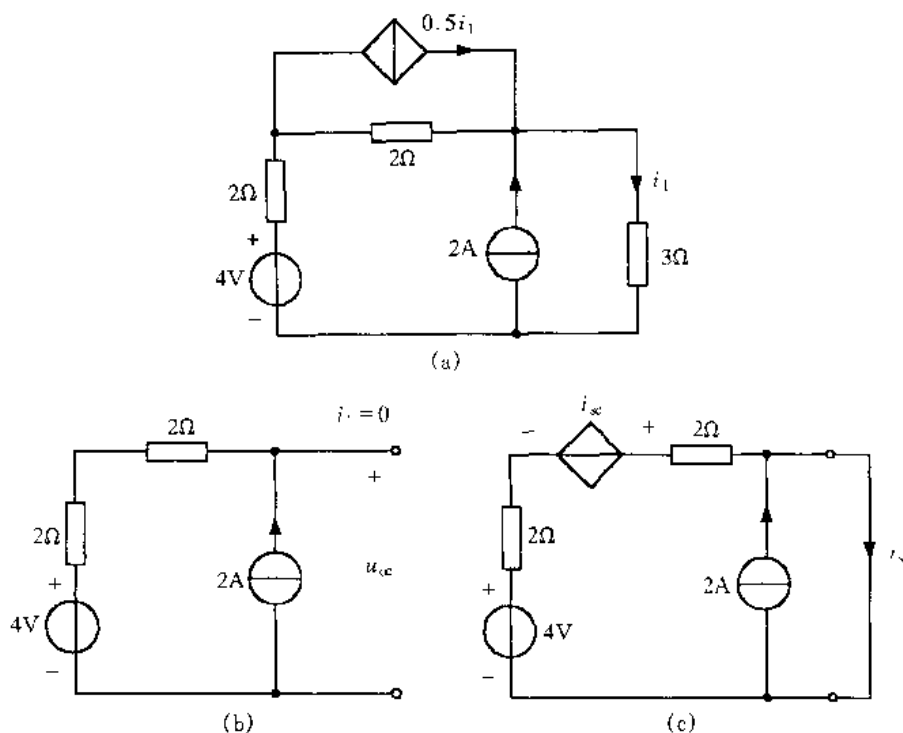
例 1.2.22 电路如例图 1.2.29(a) 所示, 试求电流 i_1 。

解 首先将 3Ω 电阻支路移去, 求移去 3Ω 电阻支路后一端口网络的戴维宁等效电路。

求 u_{oc} 时, 由于受控源的控制量 i_1 为端口电流, 因此 $i_1 = 0$, 受控源 $0.5i_1 = 0$, 所在处视为开路, 电路如例图 1.2.29(b) 所示。

$$u_{oc} = (2+2) \times 2 + 4 = 12 \text{ V}$$

求 i_{sc} 时, 将端口短路, 电路如例图 1.2.29(c) 所示, 将受控电流源等效变换为受控电压源,



例图 1.2.29

此时控制量为 $i_1 = i_{sc}$

$$i_{sc} = 2 + \frac{4 + i_{sc}}{2 + 2}$$

$$i_{sc} = 4 \text{ A}$$

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{12}{4} = 3 \Omega$$

将待求支路接上,求得

$$i_1 = \frac{u_{oc}}{R_{eq} + 3} = \frac{12}{3 + 3} = 2 \text{ A}$$

上述求解一端口电路的戴维宁等效电路的方法是分步求出开路电压和等效电阻。

求戴维宁等效电路还可以采用一步求解的方法,即根据替代定理将端口电压、电流用电压源 u 或电流源 i 来等效替代,直接求端口电压 u 和 i 的外特性, $u = f(i)$ 或 $i = g(u)$ 则 $u = u_{oc} - R_{eq}i$ 或 $i = i_{sc} - G_{eq}u$, 这样戴维宁等效电路中的 u_{oc} 和 R_{eq} , 诺顿等效电路中的 i_{sc} 和 G_{eq} 就可以一步求出。

对于例图 1.2.29(a)所示电路,根据替代定理,将端口上外接电路(本例为 3Ω 电阻支路)用一个理想电流源 i 替代,直接求外特性 $u = f(i)$, 电路如例图 1.2.30(a)所示。将受控电流源等效变换为受控电压源,按例图 1.2.30(b)所示,列电路网孔方程,有

$$u = (2 - i) \times (2 + 2) + i + 4$$

整理得

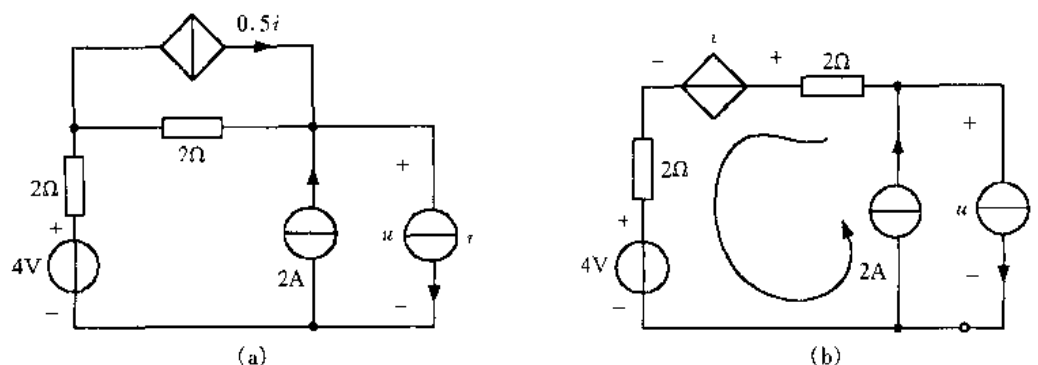
$$u = 12 - 3i$$

即

$$u_{oc} = 12 \text{ V} \quad R_{eq} = 3 \Omega$$

将 $3\ \Omega$ 电阻支路接上

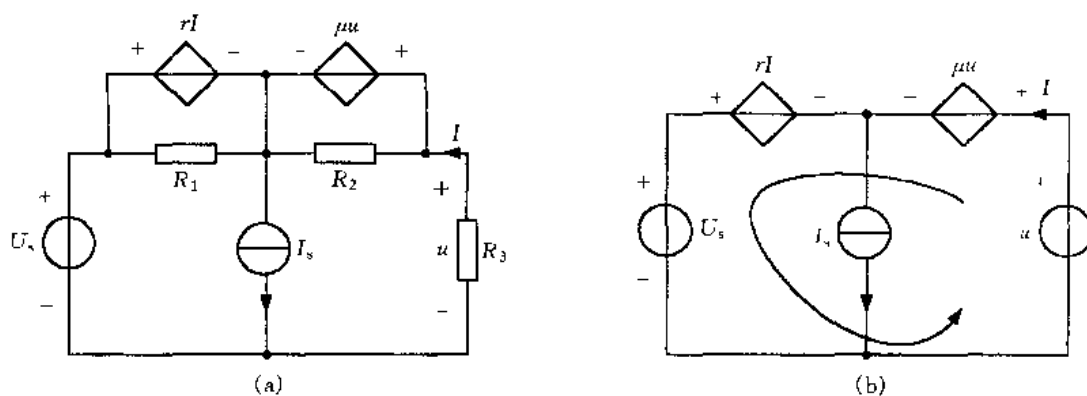
$$i_1 = \frac{u_{oc}}{R_{eq} + 3} = \frac{12}{3+3} = 2\ \text{A}$$



例图 1.2.30

例 1.2.23 求例图 1.2.31(a)所示电路中 R_3 电阻的功率。已知 $U_s = 2\ \text{V}$, $\mu = 0.5$, $r = 2\ \text{S}$, $I_s = 1\ \text{A}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$ 。

解 根据替代定理, 将 R_3 电阻支路用电压为 u 的电压源等效替代, 直接求外特性 $u = f(i)$, 电路如例图 1.2.31(b)所示, 其中与受控电压源并联的电阻 R_1 , R_2 在计算 $u = f(i)$ 时不必考虑。



例图 1.2.31

列出电路方程

$$u = \mu u - rI + u_s$$

代入所给参数

$$u = 0.5u - 2I + 2$$

$$u = 4 - 4I$$

所以电阻 R_3 支路以外的戴维宁等效电路中

$$u_{oc} = 4\ \text{V}$$

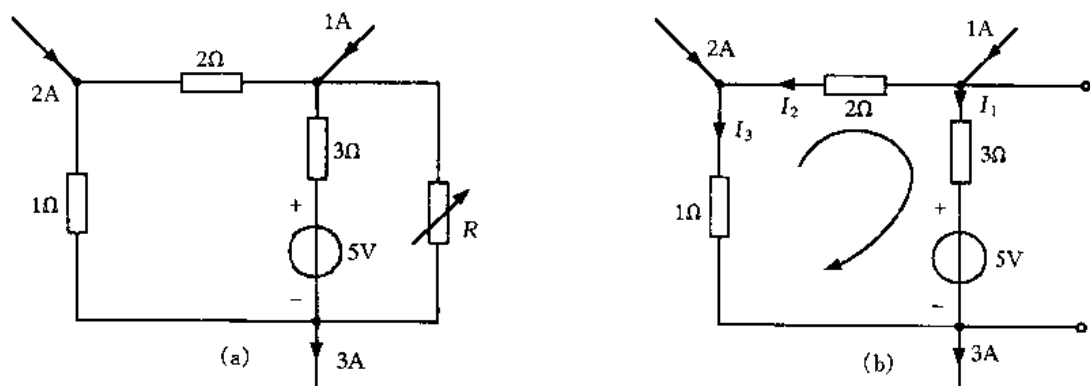
$$R_{eq} = -4\ \Omega$$

将电阻 R_3 支路接上, 求得

$$I = \frac{-u_{oc}}{-4+8} = -1\ \text{A}$$

$$P = I^2 R = (-1)^2 \times 8 = 8 \text{ W}$$

例 1.2.24 例图 1.2.32(a)所示电路中,电阻 R 可调节,试求 R 为何值时可获得最大功率,并求此最大功率。



例图 1.2.32

解 根据题中所给条件,将电阻 R 支路从电路中移去,如例图 1.2.32(b)所示,求电路中电流

$$I_1 + I_2 = 1$$

$$I_2 + 2 = I_3$$

$$3I_1 + 5 - 1 \times I_3 - 2I_2 = 0$$

解得 $I_1 = 0 \quad I_2 = 1 \quad I_3 = 3$

开路电压 $U_{\infty} = 3I_1 + 5 = 5 \text{ V} \quad R_{\text{eq}} = 1.5 \Omega$

当 $R = R_{\text{eq}}$ 时,即 $R = 1.5 \Omega$ 时获得最大功率,最大功率为

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\infty}^2}{4R_{\text{eq}}} = \frac{5^2}{4 \times 1.5} \approx 4.17 \text{ W}$$

例 1.2.25 电路如例图 1.2.33 所示,试求 $R = ?$ 时可获得最大功率? 该最大功率值为多少?

解 要求解电阻 R 的最大功率,首先要将电阻 R 支路从电路中移去,求出移去电阻 R 支路后一端口网络的开路电压 u_{∞} 和等效电阻 R_{eq} 。求 u_{∞} 的电路如例图 1.2.34(a)所示,列出网孔方程为

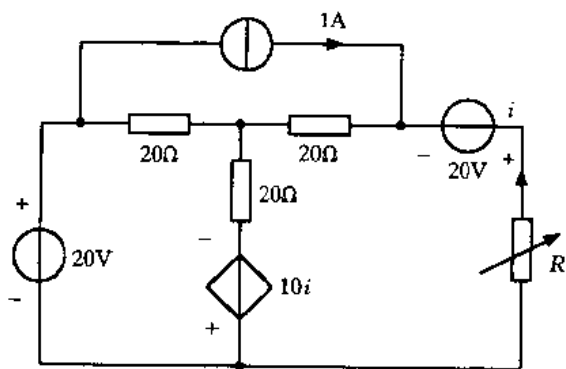
$$(20 + 20)i_1 - 20i_2 = 20$$

$$i_2 = 1 \text{ A}$$

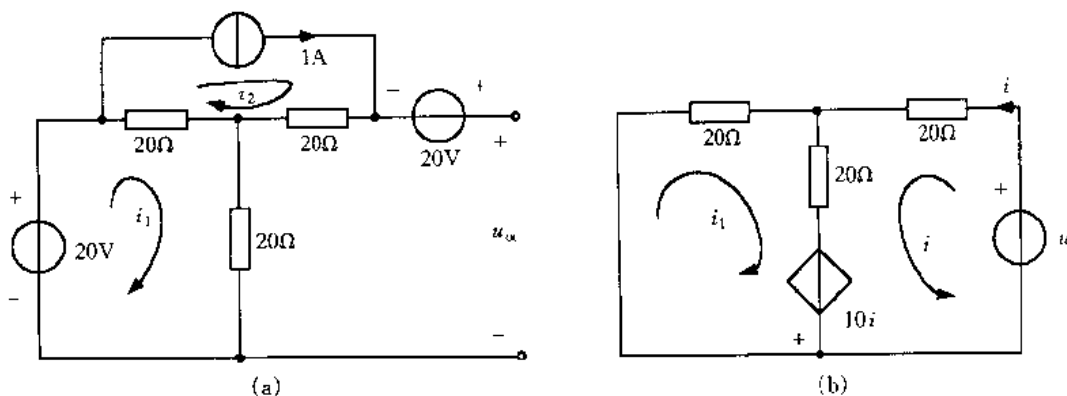
解得 $i_1 = 1 \text{ A}$

$$u_{\infty} = 20 + 20i_2 + 20i_1 = 60 \text{ V}$$

求等效电阻 R_{eq} 的电路如例图 1.2.34(b),将 20 V 和 1 A 独立电源置零,端口外施电压源 u 。



例图 1.2.33



例图 1.2.34

列出图示网孔方程

$$(20 + 20)i_1 + 20i = 10i$$

$$20i_1 + (20 + 20)i = u + 10i$$

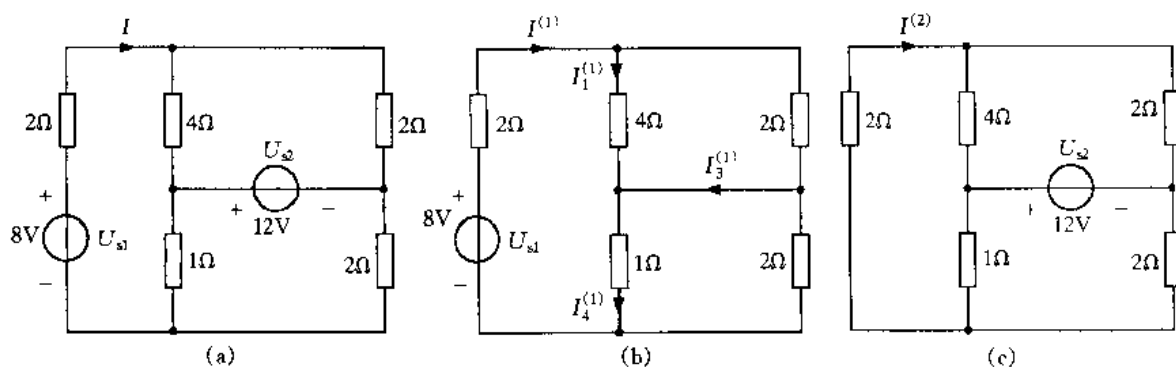
解得

$$5i = 2u \quad R_{eq} = \frac{u}{i} = 25 \Omega$$

当 $R = R_{eq} = 25 \Omega$ 时可获得最大功率, 最大功率 P_{max} 为

$$P_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 25} = 36 \text{ W}$$

例 1.2.26 求例图 1.2.35(a)所示电路的电流 I 。



例图 1.2.35

解 应用叠加定理和互易定理求解。

当电压源 U_{s1} 单独作用时, 电压源 U_{s2} 所在处用短路代替, 电路如例图 1.2.35(b)所示。

$$I^{(1)} = \frac{8}{2 + \frac{4 \times 2}{4 + 2} + \frac{1 \times 2}{1 + 2}} = 2 \text{ A}$$

$$I_1^{(1)} = I^{(1)} \frac{2}{4 + 2} = 2 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$I_4^{(1)} = I^{(1)} \frac{2}{1 + 2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ A}$$

$$I_3^{(1)} = I_4^{(1)} - I_1^{(1)} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

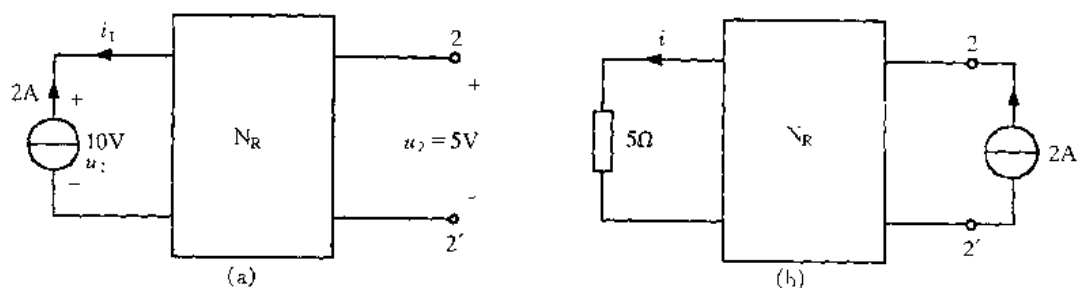
根据线性电路的互易定理可知,若把 U_{s1} 移至 I_3' 支路如例图 1.2.3(c) 所示,则 $I^{(2)} = I_3^{(1)} = \frac{2}{3} \text{ A}$,但现在 $U_{s2} = 12 \text{ V}$, 所以

$$I^{(2)} = \frac{12}{8} \times \frac{2}{3} = 1 \text{ A}$$

求得

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 2 + 1 = 3 \text{ A}$$

例 1.2.27 例图 1.2.36 所示电路中, N_R 为线性无源电阻网络,当输入端 1-1' 接 2 A 电流源时,测得输入端电压为 10 V ,输出端开路电压为 5 V ;若把电流源接在输出端,同时输入端跨接一个 5Ω 电阻,求流过 5Ω 电阻的电流 i 为多少?



例图 1.2.36

解 应用特勒根定理求解

在图(a)中 $u_1 = 10 \text{ V}$, $i_1 = -2 \text{ A}$, $u_2 = 5 \text{ V}$, $i_2 = 0$

在图(b)中 $\hat{u}_1 = 5\hat{i}_1$, $\hat{i}_1 = i$, \hat{u}_2 未知 $\hat{i}_2 = -2 \text{ A}$

根据特勒根定理有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = a_1 i_1 + a_2 i_2$$

代入已知条件

$$10\hat{i}_1 + 5 \times (-2) = 5\hat{i}_1 \times (-2) + a_2 \times 0$$

解得

$$\hat{i}_1 = 0.5 \text{ A}$$

$$i = \hat{i}_1 = 0.5 \text{ A}$$

例 1.2.28 例图 1.2.37(a) 与 (b) 中 N_R 为线性无源电阻网络,试求图(b)中的电压 u 。

解 根据题目所给条件,应用特勒根定理求解。

在图(a)中 $u_1 = 5i_1 + 5$, i_1 未知, $u_2 = 2 \times 6 = 12 \text{ V}$, $i_2 = 2 \text{ A}$

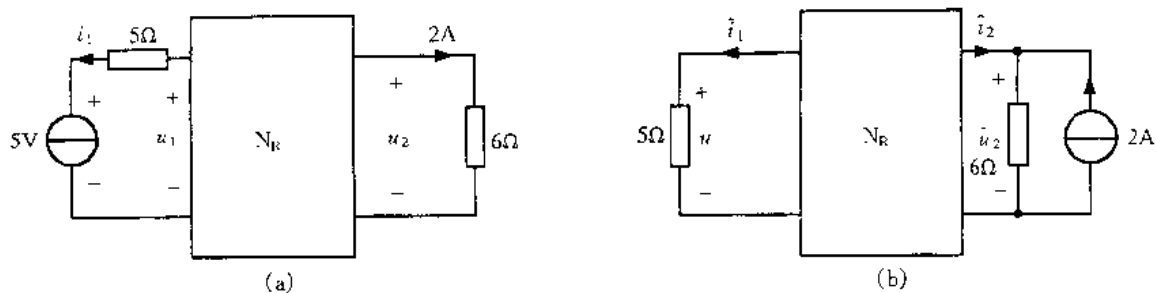
在图(b)中 $\hat{a}_1 = u = 5\hat{i}_1$, $\hat{i}_2 = \left(\frac{\hat{u}_2}{6} - 2\right)$, $\hat{u}_2 = 6\hat{i}_2 + 12$

根据特勒根定理有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = a_1 i_1 + a_2 i_2$$

代入已知条件

$$(5i_1 + 5)\hat{i}_1 + 12 \times \left(\frac{\hat{u}_2}{6} - 2\right) = 5\hat{i}_1 i_1 + a_2 \times 2$$



例图 1.2.37

解得

$$5\hat{i}_1 = 24$$

而

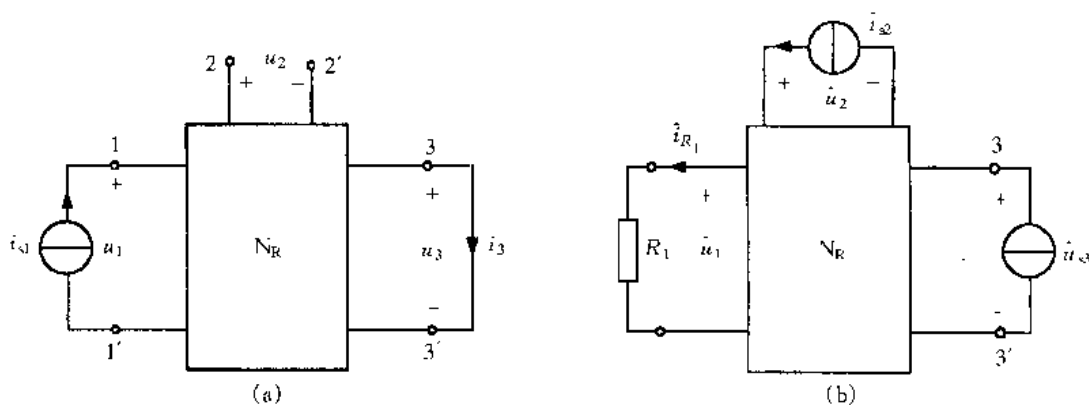
$$u = 5\hat{i}_1 = 24 \text{ V}$$

例 1.2.29 例图 1.2.38 所示电路:

图(a)中 $i_{s1} = 3 \text{ A}$ $u_1 = 6 \text{ V}$ $u_2 = 12 \text{ V}$ $i_3 = 1 \text{ A}$

图(b)中 $R_1 = 1 \Omega$ $\hat{i}_{s2} = 1.5 \text{ A}$ $\hat{u}_{s2} = 18 \text{ V}$

N_R 为无源电阻网络, 求图(b)中电流 \hat{i}_{R_1} 的值。



例图 1.2.38

解 根据题目所给条件有

$$u_1 = 6 \text{ V}, \quad i_1 = -3 \text{ A}, \quad u_2 = 12 \text{ V}, \quad i_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

$$\hat{u}_1 = R_1 \hat{i}_1, \quad \hat{i}_1 \text{ 未知}, \quad \hat{i}_2 = -1.5 \text{ A}, \quad \hat{u}_2 \text{ 未知}, \quad \hat{u}_3 = 18 \text{ V}, \quad \hat{i}_3 \text{ 未知}$$

根据特勒根定理有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \hat{u}_3 i_3$$

代入已知条件

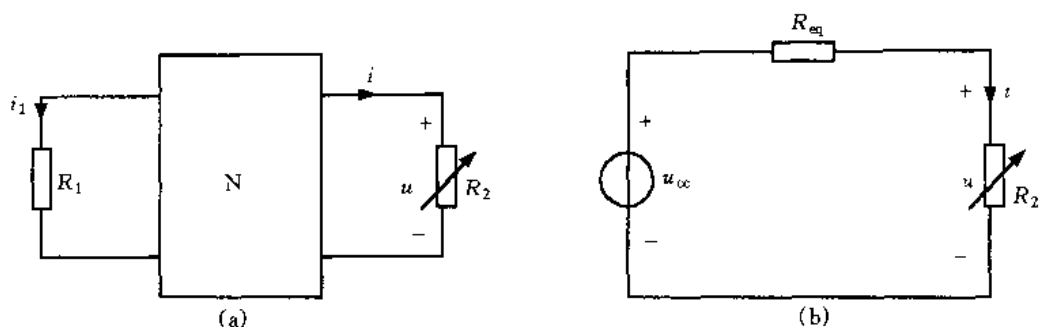
$$6\hat{i}_1 + 12 \times (-1.5) + 0 \times \hat{i}_3 = 1 \times (-3) + \hat{u}_2 \times 0 + 18 \times 1$$

解得

$$\hat{i}_1 = 4 \text{ A}$$

$$\hat{i}_{R_1} = \hat{i}_1 = 4 \text{ A}$$

例 1.2.30 电路如例图 1.2.39(a)所示, 当 $R_2 = 0$ 时, $i = i_{\infty}$, $i_1 = i'_1$; $R_2 = \infty$ 时, $u = u_{oc}$, $i_1 = i''_1$, 求 R_2 为任一值时的 i_1 。



例图 1.2.39

解 把 R_2 支路的电压 u 用电压值为 u 的电压源等效替代, 因此支路 R_1 的电流 i_1 应是网络内电源和电压 u 共同作用所产生。网络内电源可用开路电压表示, 也可用短路电流表示。所以当 $R_2=0$ 时, $i_1=i'$, i' 即网络内电源作用产生的电流分量。

在 R_2 为任意值时电流 i_1 为

$$i_1 = i'_1 + Ku$$

$$\text{当 } R_2 \rightarrow \infty \quad i''_1 = i'_1 + Ku_{oc} \quad K = \frac{i''_1 - i'_1}{u_{oc}}$$

根据所给条件, 从 R_2 两端以左的戴维宁等效电路为 u_{oc} 和 R_{eq} 串联, $R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$

$$u = \frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_2} R_2$$

将其代入 i_1 的表达式

$$i_1 = i'_1 + Ku$$

$$i_1 = i'_1 + \frac{i''_1 - i'_1}{u_{oc}} \cdot \frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_2} R_2 = i'_1 + \frac{i''_1 - i'_1}{R_{eq} + R_2} R_2$$

所以, 当 R_2 为任意值时, 电流 $i_1 = i'_1 + \frac{i''_1 - i'_1}{R_{eq} + R_2} R_2$

电路如例图 1.2.39(b) 所示。

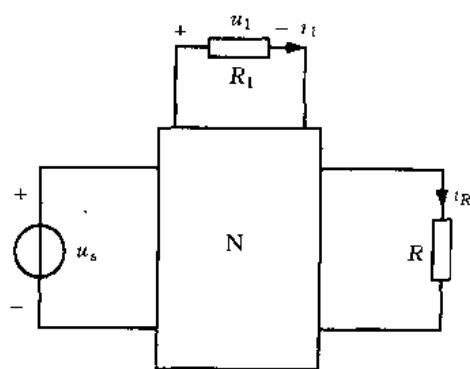
例 1.2.31 例图 1.2.40 所示电路中, N 为无源电阻网络。当 $u_s = 12 \text{ V}$, $R_1 = 0$ 时, $i_1 = 5 \text{ A}$, $i_R = 4 \text{ A}$; 当 $u_s = 18 \text{ V}$, $R_1 \rightarrow \infty$ 时, $u_1 = 15 \text{ V}$, $i_R = 1 \text{ A}$ 。试求 $u_s = 6 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$ 时, $i_R = ?$

解 根据 $u_s = 18 \text{ V}$, $R_1 \rightarrow \infty$ 时, $u_1 = 15 \text{ V}$ 可知, 此时 u_1 为电阻 R_1 两端的开路电压。据此可求出 $u_s = 12 \text{ V}$, $R_1 \rightarrow \infty$ 时, 电阻 R_1 两端的开路电压 u_{oc} , 即

$$18:12 = 15:u_{oc}$$

$$u_{oc} = \frac{12 \times 15}{18} = 10 \text{ V}$$

而 $u_s = 12 \text{ V}$ 时, $R_1 \rightarrow 0$, $i_1 = 5 \text{ A}$, i_1 即短路电流, 所以从电阻 R_1 两端看的戴维宁等效电路中



例图 1.2.40

等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u_{\infty}}{i_1} = \frac{10}{5} = 2 \Omega$$

当 $u_s = 6 \text{ V}$, $R_1 \rightarrow \infty$ 时 u_{∞} 可计算得

$$18:6 = 15:u_{\infty}$$

$$u_{\infty} = \frac{15 \times 6}{18} = 5 \text{ V}$$

$u_s = 6 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$ 时

$$u_1 = \frac{u_{\infty}}{R_{eq} + 3} \times 3 = \frac{5}{2 + 3} \times 3 = 3 \text{ V}$$

电阻 R 的电流是网络源 u_s 和电压 u_1 共同作用产生, 可表示为

$$i_R = K_1 u_s + K_2 u_1$$

将已知条件 $u_s = 12 \text{ V}$, $R = 0$ 即 $u_1 = 0$ 时, $i_R = 4 \text{ A}$

$u_s = 18 \text{ V}$, $u_1 = 15 \text{ V}$ 时, $i_R = 1$

代入上式, 有

$$\begin{cases} 4 = K_1 \times 12 + K_2 \times 0 \\ 1 = K_1 \times 18 + 15K_2 \end{cases}$$

解得

$$K_1 = \frac{1}{3}$$

$$K_2 = -\frac{1}{3}$$

当 $u_s = 6 \text{ V}$ $R = 3 \Omega$ 时, 已求得 $u_1 = 3 \text{ V}$

所以

$$i_R = K_1 \times 6 + K_2 \times 3 = \frac{1}{3} \times 6 - \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = 1 \text{ A}$$

例 1.2.32 电路如例图 1.2.41 所示, 网络 N 仅由电阻组成, 根据图(a)和图(b)的已知情况, 求图(c)中电流 I_1 和 I_2 。

解 求图(c)中电流 I_1 可应用叠加定理和互易定理, 也可应用特勒根定理。在应用特勒根定理时, 只要有些元件在几个电路图中未改变, 在选取要计算的支路时就不必把该元件包括在内, 这样支路就较简单, 如在本题中 4Ω 电阻和 5Ω 电阻。取支路如图所示。

对图(a)和图(c)用特勒根定理, 取支路 $1-1'$, $2-2'$ 。

图(a)中有 $u_1 = 20 \text{ V}$, $i_1 = -3 \text{ A}$, $u_2 = 0$, $i_2 = 1 \text{ A}$

图(c)中有 $u_1 = 20 \text{ V}$, \hat{i}_1 未知, $u_2 = 20 \text{ V}$, \hat{i}_2 未知

代入特勒根定理表达式

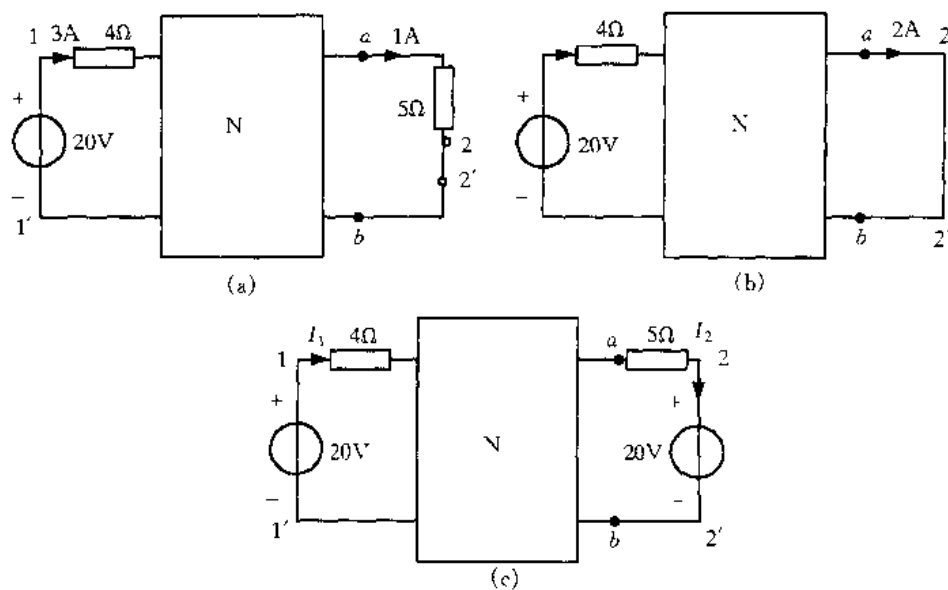
$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = a_1 i_1 + a_2 i_2$$

$$20 \hat{i}_1 + 0 \times \hat{i}_2 = 20 \times (-3) + 20 \times 1$$

$$\hat{i}_1 = -2 \text{ A}$$

图(c)中

$$I_1 = -\hat{i}_1 = 2 \text{ A}$$



例图 1.2.41

求 I_2 时可用戴维宁定理。设图(a)和图(b)中 a, b 左边的戴维宁等效电路为 u_{oc} 与 R_{eq} 串联。在图(a)中有 $u_{oc} - R_{eq} \times 1 = 5 \times 1$

在图(b)中有 $\frac{u_{oc}}{R_{eq}} = 2$

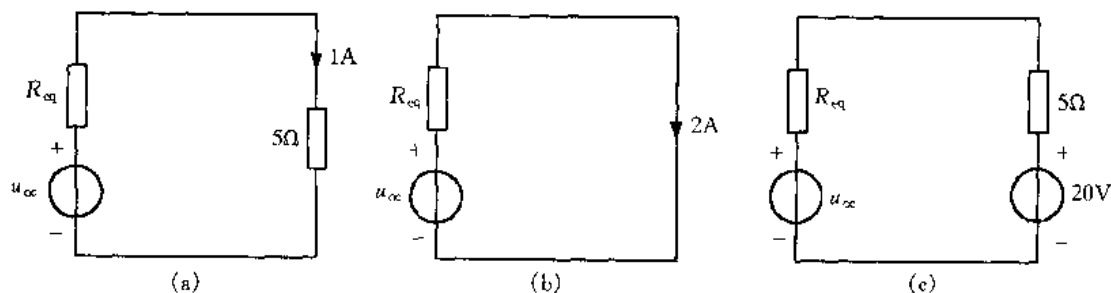
所以 $u_{oc} = 10 \text{ V}$ $R_{eq} = 5 \Omega$

将图(c)中 5Ω 与 20 V 电压源左边用求得的戴维宁等效电路替代,求得 I_2 。

$$I_2 = \frac{u_{oc} - 20}{R_{eq} + 5} = \frac{10 - 20}{5 + 5} = -1 \text{ A}$$

以上过程如例图 1.2.42(a), (b), (c) 所示。

求 I_2 还可以在求得例图 1.2.41(c) 中的 I_1 后, 再与(a)或(b)图用特勒根定理求 I_2 。



例图 1.2.42

1.3 具有理想运算放大器的电阻电路

1.3.1 理论提要

1. 运算放大器的电路模型

运算放大器(简称运放)是一种集成电路。一般放大器的作用是把输入电压放大一定倍数

后再输送出去,其输出电压与输入电压的比值称为电压放大倍数或电压增益。运放是一种电压增益很高(可达几万倍甚至更高)、高输入电阻、低输出电阻的放大器。

运放有6个主要的端子,其中倒向输入端(也称反相输入端)、非倒向输入端(或称同相输入端)、输出端相对于地的电压分别用 u^- , u^+ , u_o 表示。另外两个端子 E^+ , E^- 连接直流偏置电压, E^+ 端接正电压, E^- 端接负电压。在电路分析时,两个电源端往往不考虑,但应记得偏置电源是存在的。运放的电路图形符号如图 1.3.1 所示,其中 1.3.1(b) 为不考虑电源端的图形符号。

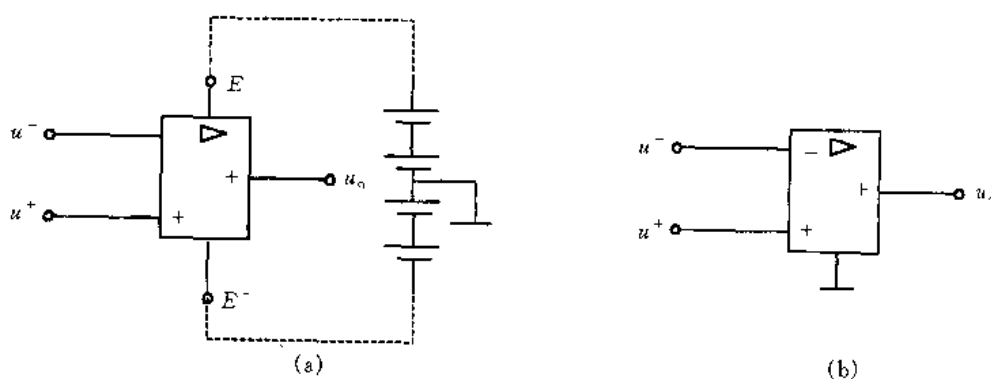


图 1.3.1 运放的图形符号

当在运放的非倒向输入端和倒向输入端分别同时加输入电压 u^+ 和 u^- , 则输出电压

$$u_o = A(u^+ - u^-) = Au_d$$

其中 $u_d = u^+ - u^-$, 称为差动输入电压; A 称为运放的电压放大倍数。运放的输出电压 u_o 与差动输入电压 u_d 之间的关系用图 1.3.2 近似地描述。在 $-\epsilon \leq u_d \leq \epsilon$ (ϵ 值很小) 范围内, u_o 与 u_d 的关系用通过原点的一段直线描述, 其斜率等于 A 。当 $|u_d| > \epsilon$ 时, 输出电压 u_o 趋于饱和, 用 $\pm U_{sat}$ 表示, U_{sat} 略低于直流偏置电压。

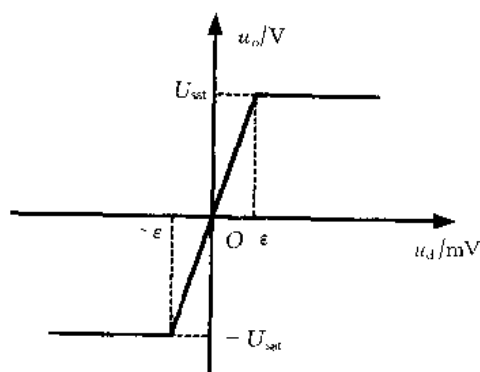


图 1.3.2 运放的 $u_o - u_d$ 特性

当把运放的工作范围限制在线性段, 即 $-U_{sat} < u_o < U_{sat}$, 运放的电路模型如图 1.3.3 所示。

其中电压控制电压源的电压为 $A(u^+ - u^-)$, R_{in} 为输入电阻, R_o 为输出电阻。实际运放的 R_{in} 值很高, 而 R_o 值很低。

在理想化情况下, 认为 $R_{in} \rightarrow \infty$, $R_o \rightarrow 0$, 电压放大倍数 $A \rightarrow \infty$, 则称运放是理想运放, 并在运放的图形符号中加“ ∞ ”以资说明, 否则用“ A ”表示。由于理想运放的输入电阻 $R_{in} = \infty$, 则流入每一输入端的电流均为零; 由于 u_o 为有限值, A 值为无限大, 则由式 $u_o = Au_d$

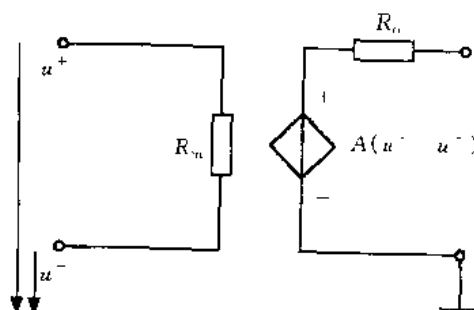


图 1.3.3 运放的电路模型

$= A(u^+ - u^-)$ 可知, $u_d = (u^+ - u^-) = 0$, 即 $u^+ = u^-$ 。如果把非倒向输入端(或倒向输入端)接地, 即有 $u^+ = 0$ (或 $u^- = 0$), 则在倒向输入端的电压 u^- (或非倒向输入端的电压 u^+) 就将强制为零值。

2. 含有理想运放电路的分析

含有理想运放电路的分析有一些特点, 按上面介绍的理想运放的性质, 我们有如下两条规则:

- (1) 倒向端和非倒向端的输入电流均为零, 可称之为“虚断(路)”;
- (2) 对于公共端(地), 倒向输入端的电压与非倒向输入端的电压相等, 可称之为“虚短(路)”。

当把非倒向端(或倒向端)接地, 倒向端的电压 u^- (或非倒向端的电压 u^+) 将为零值。此时, 将倒向端(或非倒向端)称之为“虚地”。

合理地运用这两条规则, 并与结点法相结合, 将使含有理想运放的电路的分析大为简化。需要注意, 在对理想运放输入端列写 KCL 方程时, 由于理想运放输入端电流为零, 故可将其视为“开路”。另外, 由于运放输出端的电流事先无法确定, 因此不宜对该结点列 KCL 方程。

1.3.2 典型题解析

例 1.3.1 例图 1.3.1 所示电路, 设 $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ 。求输出电压 u_o 与输入电压 u_i 之比。当 $u_i = 1 \text{ V}$ 时, 求输出电流 i_o 。

解 由规则(1)知 $i^- = 0$, 故

$$u^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_o = \frac{5}{5 + 40} u_o = \frac{u_o}{9}$$

根据规则(2), $u^- = u^+$, 而 $u^+ = u_i$, 因此

$$u_i = \frac{u_o}{9}$$

即 $\frac{u_o}{u_i} = 9$

当 $u_i = 1 \text{ V}$ 时, 由上式可知

$$u_o = 9u_i = 9 \text{ V}$$

因此

$$i_o = \left(\frac{u_o}{R_1 + R_2} + \frac{u_o}{R_3} \right) = \left(\frac{9}{5 + 40} + \frac{9}{20} \right) \text{ mA} = 0.65 \text{ mA}$$

例 1.3.2 例图 1.3.2 所示电路为一电流电压变换器, 求 u_o/i_s 。

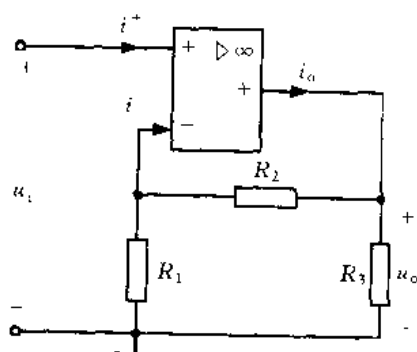
解 设与三条电阻支路相关联的结点 A 的结点电压为 u_A , 由规则(1), $i^- = 0$, 得 $i_1 = i_s$ 。由规则(2)知 $u^- = u^+ = 0$, 因此有

$$i_s = \frac{u^- - u_A}{R_1} = -\frac{u_A}{R_1}$$

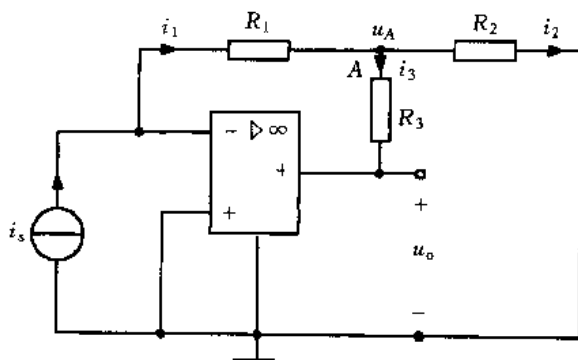
即

$$u_A = -R_1 i_s$$

而 i_2 和 i_3 分别为



例图 1.3.1



例图 1.3.2

$$i_2 = \frac{u_A}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{u_A - u_o}{R_3}$$

对结点 A 列 KCL 方程有

$$i_s = i_2 + i_3$$

将 $u_A = -R_1 i_s$ 代入 i_2, i_3 得

$$i_s = \frac{-R_1 i_s}{R_2} + \frac{-R_1 i_s - u_o}{R_3}$$

经整理得

$$\frac{u_o}{i_s} = -R_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} \right)$$

例 1.3.3 对于例图 1.3.3 所示电路, 计算输出电压 u_o 。

解 方法 1: 应用叠加定理, 设

$$u_o = u_o^{(1)} + u_o^{(2)}$$

上式 $u_o^{(1)}$ 是 6 V 电压源单独作用时产生的响应, 而 $u_o^{(2)}$ 是 4 V 电压源单独作用时产生的响应, 分别如例图 1.3.4(a) 和例图 1.3.4(b) 所示。

当 6 V 电压源单独作用时, 将 4 V 电压源置零, 电路为一反相比例器, $u_o^{(1)}$ 为

$$u_o^{(1)} = -\frac{10}{4} \times 6 = -15 \text{ V}$$

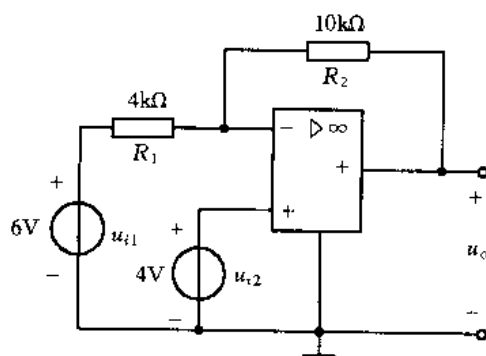
当 4 V 电压源单独作用时, 将 6 V 电压源置零, 电路为一同相比例器, $u_o^{(2)}$ 为

$$u_o^{(2)} = \left(1 + \frac{10}{4} \right) \times 4 = 14 \text{ V}$$

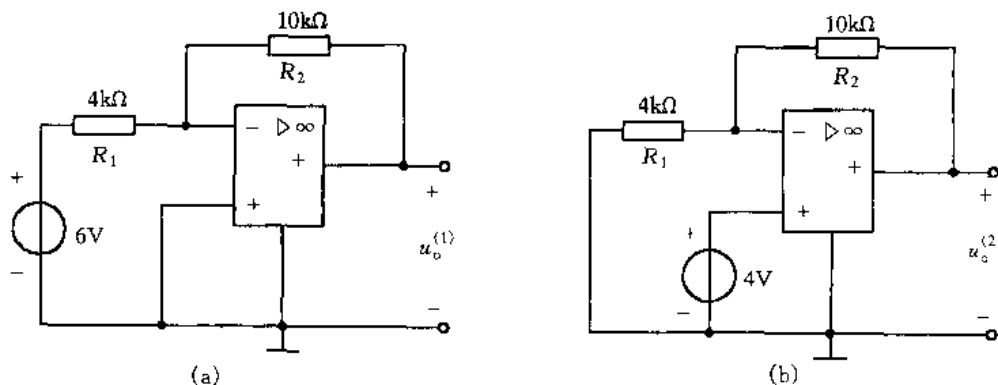
因此

$$u_o = u_o^{(1)} + u_o^{(2)} = -15 + 14 = -1 \text{ V}$$

方法 2: 由规则(1), $i_- = 0$ 。在倒向端应用 KCL 得



例图 1.3.3



例图 1.3.4

$$\frac{u_{i1} - u^-}{R_1} = \frac{u^- - u_o}{R_2}$$

但是由规则(2), $u^- = u^+ = u_{i2}$, 代入上式

$$\frac{u_{i1} - u_{i2}}{R_1} = \frac{u_{i2} - u_o}{R_2}$$

化简可得

$$u_o = u_{i2} + \frac{R_2}{R_1}(u_{i2} - u_{i1}) = -1 \text{ V}$$

例 1.3.4 计算例图 1.3.5 所示电路的 u_o 和 i_o 。

解 这是一个加法器, 根据规则(1), $i^- = 0$, 根据规则(2), $u^- = 0$ 。在倒向端应用 KCL 得

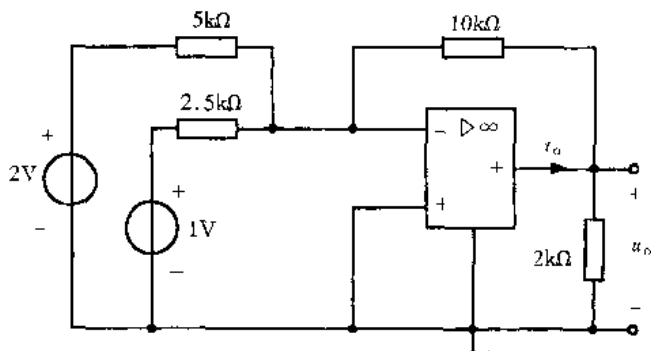
$$\frac{2-0}{5} + \frac{1-0}{2.5} = \frac{0-u_o}{10}$$

整理上式得

$$u_o = -8 \text{ V}$$

电流 i_o 等于 $10 \text{ k}\Omega$ 电阻中电流与 $2 \text{ k}\Omega$ 电阻中电流之和。注意到 $u^- = 0$, 则有

$$i_o = \left(\frac{-8-0}{10} + \frac{-8-0}{2} \right) \text{ mA} = -4.8 \text{ mA}$$



例图 1.3.5

例 1.3.5 求例图 1.3.6 所示电路输出电压 u_o 与两个输入电压之间的关系。

解 根据规则(1), $i^- = i^+ = 0$ 。对倒向端应用 KCL 得

$$\frac{u_1 - u^-}{R_1} = \frac{u^- - u_o}{R_3}$$

整理得

$$u_o = \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right) u^- - \frac{R_3}{R_1} u_1 \quad (1)$$

对非倒向端列 KCL 得

$$\frac{u_2 - u^+}{R_2} = \frac{u^+ - 0}{R_4}$$

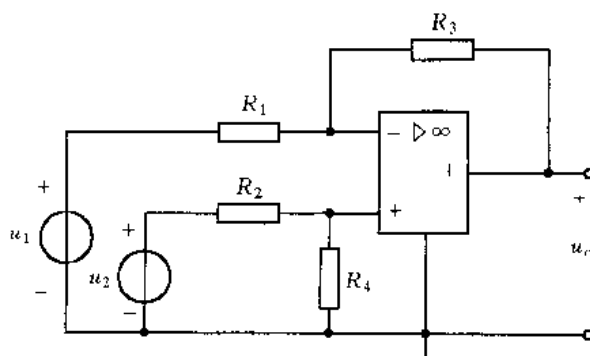
整理得

$$u^+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4} u_2$$

根据规则(2)

$$u^- = u^+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4} u_2 \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得



例图 1.3.6

$$\begin{aligned} u_o &= \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_2 + R_4} u_2 - \frac{R_3}{R_1} u_1 \\ &= \frac{R_3}{R_1} \frac{(1 + R_1/R_3)}{(1 + R_2/R_4)} u_2 - \frac{R_3}{R_1} u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)也可以仿照例 1.3.3 的方法,用叠加定理求得。当

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

时,式(3)化简为

$$u_o = \frac{R_3}{R_1} (u_2 - u_1) \quad (4)$$

此时,电路为一差分放大器。

如果 $R_3 = R_1$, 则式(4)进一步化简为

$$u_o = u_2 - u_1 \quad (5)$$

电路就变成了一个减法器。

例 1.3.6 电路如例图 1.3.7 所示,试证明:

$$u_o = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_4}\right) (u_2 - u_1)$$

证明 可以看出,例图 1.3.7 虚线方框部分为一个差分放大器,由例 1.3.5 可知

$$u_o = \frac{R_2}{R_1} (u_{o2} - u_{o1}) \quad (1)$$

由于输入级部分的两运放输入电流为零,电流 i 流经 3 个串联电阻,因此

$$u_{o1} - u_{o2} = (R_3 + R_4 + R_3)i = (2R_3 + R_4)i \quad (2)$$

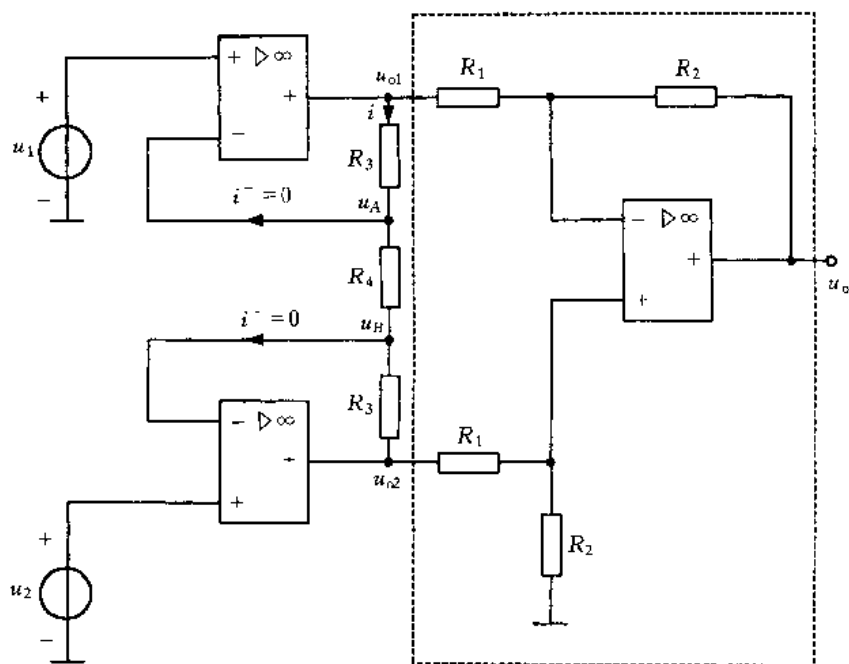
但是

$$i = \frac{u_A - u_B}{R_4}$$

而根据规则(2), $u_A = u_1$, $u_B = u_2$, 所以

$$i = \frac{u_1 - u_2}{R_4} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)得



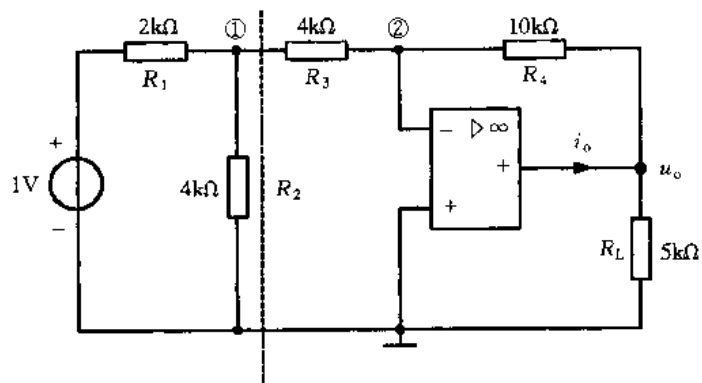
例图 1.3.7

$$u_{o1} - u_{o2} = (2R_3 + R_4) \frac{u_1 - u_2}{R_4} = (1 + \frac{2R_3}{R_4})(u_1 - u_2)$$

于是式(1)为

$$u_o = \frac{R_2}{R_1}(u_{o2} - u_{o1}) = \frac{R_2}{R_1}(1 + \frac{2R_3}{R_4})(u_2 - u_1)$$

例 1.3.7 电路如例图 1.3.8 所示,试确定 i_{oc}



例图 1.3.8

解 方法 1:对结点①,②列结点电压方程

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{4000} \right) u_1 - \frac{1}{4000} u_2 = \frac{1}{2000} \times 1 \\ -\frac{1}{4000} u_1 + \left(\frac{1}{4000} + \frac{1}{10000} \right) u_2 = \frac{u_o}{10000} \end{cases}$$

根据规则(2), $u_2 = u^- = 0$ 。化简上式得

$$\begin{aligned} 2u_1 &= 1 & u_1 &= -0.5 \text{ V} \\ -2.5u_1 &= u_o \end{aligned}$$

由上式可得

$$u_o = -2.5u_1 = -1.25 \text{ V}$$

而

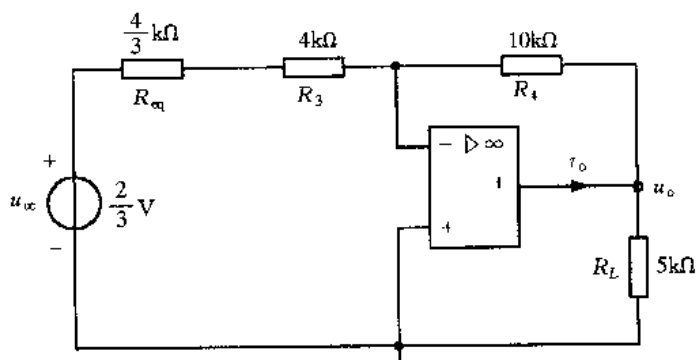
$$i_o = \left(\frac{u_o}{R_L} + \frac{u_o - u_2}{R_4} \right) = \left(\frac{-1.25}{5} + \frac{-1.25}{10} \right) \text{ mA} = -0.375 \text{ mA}$$

方法 2: 用戴维宁定理求, 例图 1.3.8 虚线左端电路的戴维宁等效电路的 u_{oc} 和 R_{eq} 分别为

$$u_{oc} = \frac{4}{4+2} \times 1 = \frac{2}{3} \text{ V}$$

$$R_{eq} = \frac{2 \times 4}{2+4} = \frac{4}{3} \text{ k}\Omega$$

则例图 1.3.8 电路等效为例图 1.3.9 所示电路。这是一个反比例器, 因此

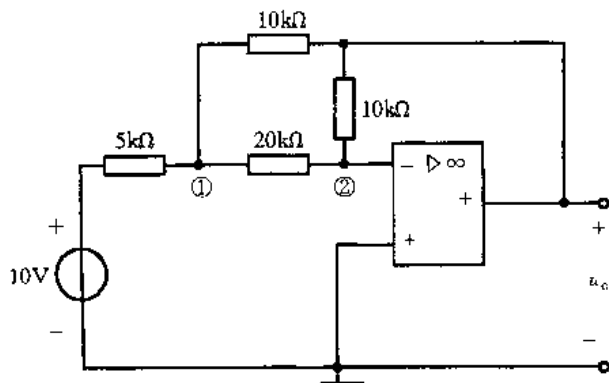


例图 1.3.9

$$u_o = -\frac{10}{4 + \frac{4}{3}} \times \frac{2}{3} = -1.25 \text{ V}$$

i_o 的求法与方法 1 相同, 不再重复。

例 1.3.8 确定例图 1.3.10 所示电路的输出电压 u_o 。



例图 1.3.10

解 对结点①,②列结点电压方程

$$\left(\frac{1}{5\,000} + \frac{1}{20\,000} + \frac{1}{10\,000}\right)u_1 - \frac{1}{20\,000}u_2 = \frac{10}{5\,000} + \frac{u_o}{10\,000}$$

$$-\frac{1}{20\,000}u_1 + \left(\frac{1}{20\,000} + \frac{1}{10\,000}\right)u_2 = \frac{u_o}{10\,000}$$

由规则(2), $u_2 = 0$, 上式化简为

$$7u_1 = 40 + 2u_o$$

$$-u_1 = 2u_o$$

求解上式得

$$u_o = -2.5\text{ V}$$

例 1.3.9 电路如例图 1.3.11 所示, 试计算 i_x 和 $3\text{ k}\Omega$ 电阻所消耗的功率。

解 $u' = 4 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-3} = 4\text{ V}$

$$u^- = \frac{2}{1+2}u_o = \frac{2}{3}u_o$$

由规则(2)

$$u^- = u' = 4\text{ V}$$

因此

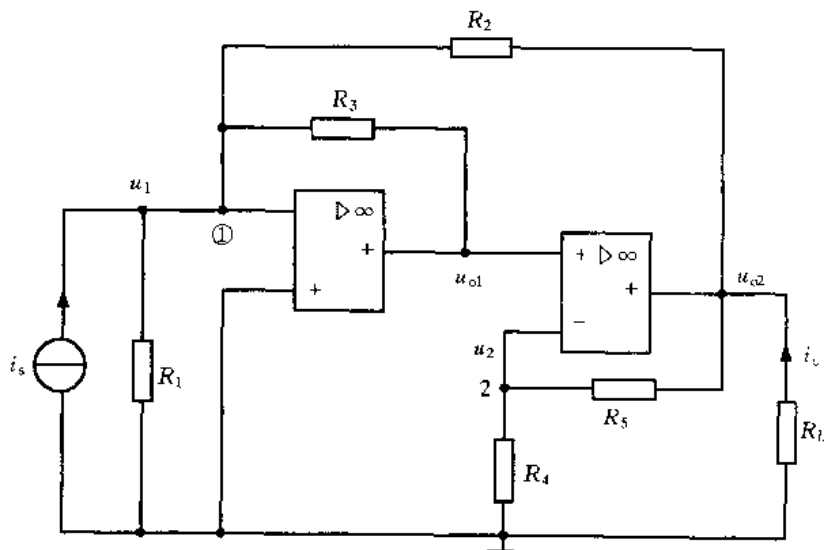
$$u_o - \frac{3}{2}u^- = \frac{3}{2} \times 4 = 6\text{ V}$$

$$i_x = \frac{u^- - u_o}{R_3} = \frac{4 - 6}{1 \times 10^3} = -2\text{ mA}$$

$3\text{ k}\Omega$ 电阻消耗功率为

$$P = \frac{u_o^2}{R_L} = \frac{6^2}{3\,000}\text{ W} = 12\text{ mW}$$

例 1.3.10 电路如例图 1.3.12 所示, 已知 $R_1 = 5\text{ k}\Omega$, $R_2 = 4\text{ k}\Omega$, $R_3 = 10\text{ k}\Omega$, $R_4 = R_5 = 3\text{ k}\Omega$, $R_L = 2\text{ k}\Omega$ 。计算电流增益 i_o/i_s 。



例图 1.3.12

解 对结点①列 KCL 方程

$$-i_s + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_{o1}}{R_3} + \frac{u_1 - u_{o2}}{R_2} = 0$$

由规则(2), $u_1 = 0$, 上式变为

$$-i_s - \frac{u_{o1}}{R_3} - \frac{u_{o2}}{R_2} = 0 \quad (1)$$

而

$$u_{o1} = u_2 = \frac{R_4}{R_4 + R_5} u_{o2} \quad (2)$$

$$u_{o2} = -R_L i_o \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)得

$$u_{o1} = -\frac{R_4 R_L}{R_4 + R_5} i_o \quad (4)$$

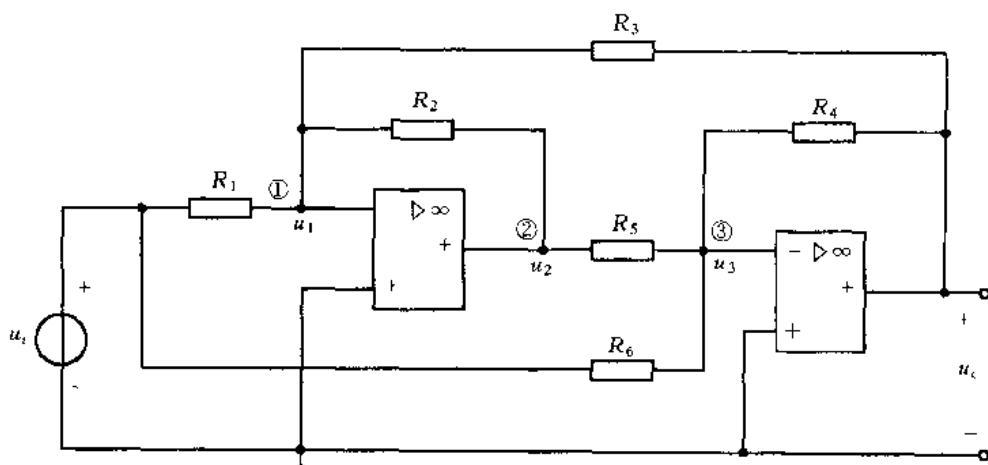
将式(3)、式(4)代入式(1)得

$$-i_s + \frac{R_4 R_L}{R_3(R_4 + R_5)} i_o + \frac{R_L}{R_2} i_o = 0$$

将电阻值代入后可得

$$\frac{i_o}{i_s} = \frac{5}{3}$$

例 1.3.11 试确定例图 1.3.13 所示电路的电压增益 u_o/u_i 。



例图 1.3.13

解 分别对结点①、③列 KCL 方程

$$\frac{u_i - u_1}{R_1} = \frac{u_1 - u_2}{R_2} + \frac{u_1 - u_o}{R_3}$$

$$\frac{u_i - u_3}{R_6} + \frac{u_2 - u_3}{R_5} = \frac{u_3 - u_o}{R_4}$$

由规则(2), $u_1=0$, $u_3=0$, KCL 化简为

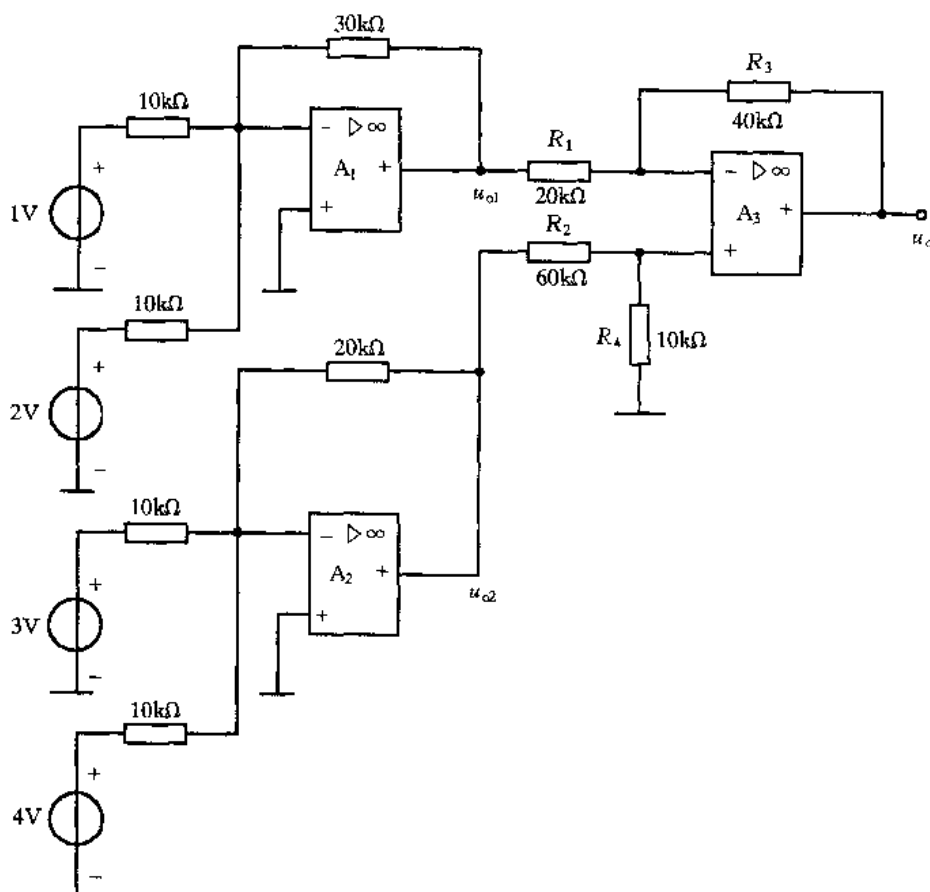
$$\frac{u_i}{R_1} = -\frac{u_2}{R_2} - \frac{u_o}{R_3}$$

$$\frac{u_i}{R_6} + \frac{u_2}{R_5} = -\frac{u_o}{R_4}$$

求解上式得

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{(R_1 R_5 - R_2 R_6) R_3 R_4}{(R_2 R_4 - R_3 R_5) R_1 R_6}$$

例 1.3.12 确定例图 1.3.14 所示电路的输出电压 u_o 。



例图 1.3.14

解 可以看出, 运放 A_1, A_2 部分为两个加法器, 而运放 A_3 部分为差分放大器。

$$u_{o1} = -\frac{30}{10} \times 1 - \frac{30}{10} \times 2 = -9 \text{ V}$$

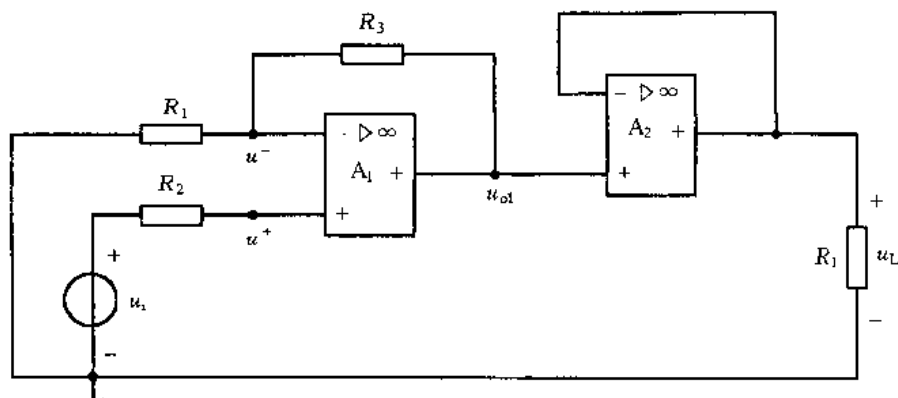
$$u_{o2} = -\frac{20}{10} \times 3 - \frac{20}{10} \times 4 = -14 \text{ V}$$

根据例 1.3.5 中差分放大器可知

$$u_o = \frac{R_3}{R_1} \frac{(1 + R_1/R_3)}{(1 + R_2/R_4)} u_{o2} - \frac{R_3}{R_1} u_{o1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{40}{20} \frac{(1 + 20/40)}{(1 + 60/10)} \times (-14) - \frac{40}{20} \times (-9) \\
 &= 12 \text{ V}
 \end{aligned}$$

例 1.3.13 电路如例图 1.3.15 所示, 已知 $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_L = 4 \text{ k}\Omega$, $u_i = 1.8 \text{ V}$, 试确定负载电压 u_L 。



例图 1.3.15

解 由规则(1), $i^+ = 0$, 因此非倒向输入端的电压 $u^+ = 1.8 \text{ V}$ 。由规则(2), $u^- = u^+ = 1.8 \text{ V}$ 。由于

$$u^- = \frac{R_1}{R_1 + R_3} u_{o1} = \frac{10}{10 + 50} u_{o1} = \frac{1}{6} u_{o1}$$

因此

$$u_{o1} = 6u^- = 6 \times 1.8 = 10.8 \text{ V}$$

运放 A_2 为一电压跟随器, 则负载电压 u_L 为

$$u_L = u_{o1} = 10.8 \text{ V}$$

例 1.3.14 电路如例图 1.3.16 所示, 求该电路的电压增益 u_o/u_i 。

解 显然, 运放 A_1 和 A_2 的非倒向输入端电压 u_1^+ 和 u_2^+ 分别为

$$u_1^+ = \frac{30}{20 + 30} u_i = \frac{3}{5} u_i$$

$$u_2^+ = \frac{80}{40 + 80} u_i = \frac{2}{3} u_i$$

由规则(2), $u_1^- = u_1^+$, $u_2^- = u_2^+$, 故有

$$i = \frac{u_{o1} - u_{o2}}{10 + 2 + 10} = \frac{u_1^- - u_2^-}{2} = \frac{u_1^+ - u_2^+}{2}$$

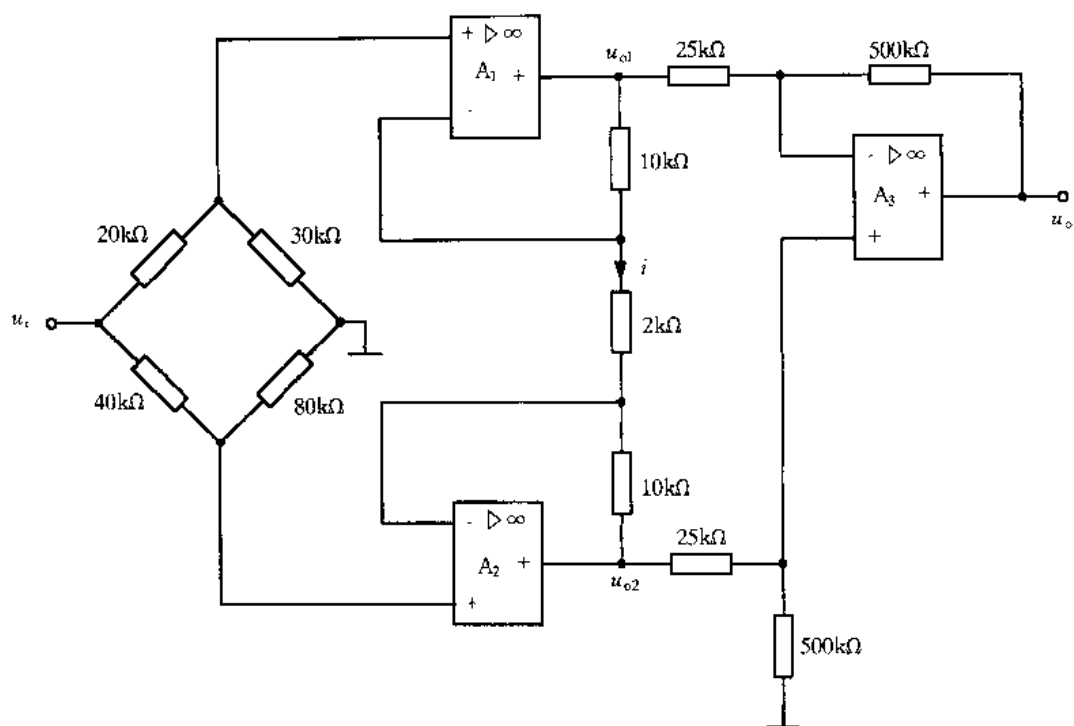
即

$$u_{o1} - u_{o2} = \frac{22}{2} (u_1^+ - u_2^+) = 11 \times \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \right) u_i = -\frac{11}{15} u_i$$

运放 A_3 部分为一减法器

$$u_o = \frac{500}{25} (u_{o2} - u_{o1}) = \frac{500}{25} \times \frac{11}{15} u_i = \frac{44}{3} u_i$$

所以电压增益为



例图 1.3.16

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{44}{3}$$

1.4 非线性电阻电路

1.4.1 理论提要

1. 非线性电阻

线性电阻元件的伏安特性可用欧姆定律 $u = Ri$ 表示, 在 $u-i$ 平面上是通过坐标原点的一条直线。非线性电阻元件的伏安特性则遵循某种非线性函数关系。非线性电阻在电路中的符号如图 1.4.1(a) 所示。

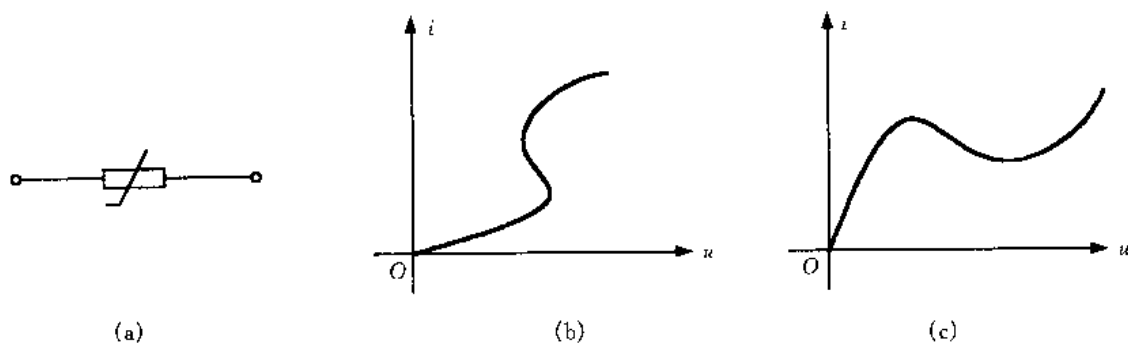


图 1.4.1

若电阻元件两端的电压是其电流的单值函数,这种电阻称为电流控制型电阻,用如下函数关系描述

$$u = f(i)$$

它的典型的伏安特性如图 1.4.1(b)所示。

若通过电阻元件的电流是其两端电压的单值函数,这种电阻称为电压控制型电阻,用如下函数关系描述

$$i = g(u)$$

它的典型伏安特性如图 1.4.1(c)所示。

如果电阻元件既是电流控制的又是电压控制的,称为单调型非线性电阻。其伏安特性如图 1.4.2(a)所示。

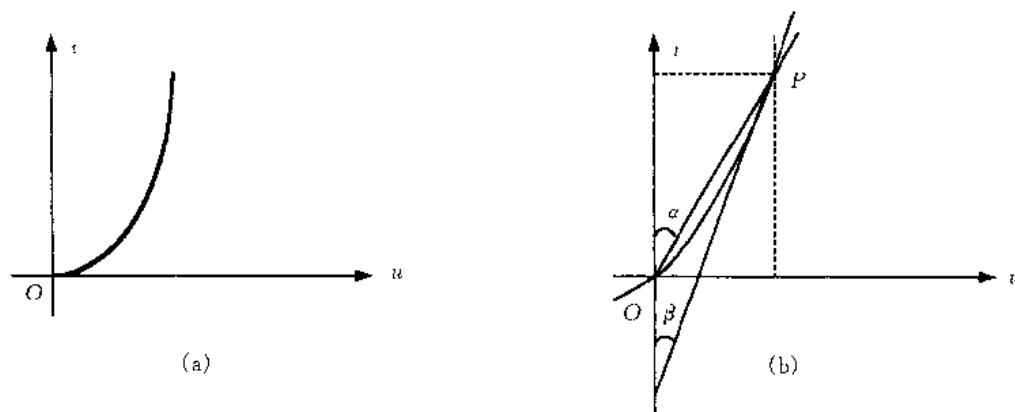


图 1.4.2

另外,线性电阻是双向性的,而许多非线性电阻却不是双向性的,而是单向性的。

为了计算上的需要,对于非线性电阻有时引用静态电阻 R 和动态电阻 R_d 的概念,它们的定义分别如下

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{i}$$

$$R_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{du}{di}$$

在图 1.4.2(b)中 P 点的静态电阻正比于 $\tan\alpha$, P 点的动态电阻正比于 $\tan\beta$ 。

2. 非线性电阻的串联和并联

图 1.4.3 所示为两个非线性电阻的串联电路。按照 KCL 和 KVL,有

$$i = i_1 = i_2$$

$$u = u_1 + u_2$$

设两个非线性电阻均为电流控制的,且其伏安特性分别可写为 $u_1 = f_1(i_1)$, $u_2 = f_2(i_2)$ 。

如果把串联电路当作是一个二端口(见图 1.4.3),则端口的电压、电流关系或伏安特性称为

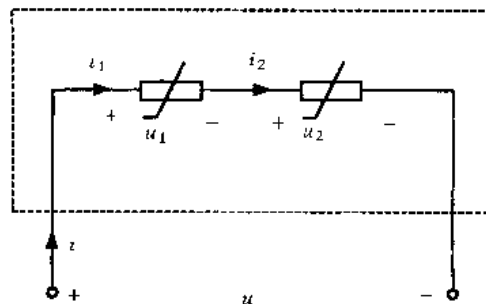


图 1.4.3

此一端口的驱动点特性。设用 $u = f(i)$ 表示此特性。利用以上关系式,可求得

$$u = f_1(i_1) + f_2(i_2) = f_1(i) + f_2(i) = f(i) \quad (1-4-1)$$

就是说,一端口的驱动点特性为一个电流控制的非线性电阻。

显然,式(1-4-1)可推广到 n 个电流控制型电阻的串联。另外,在串联的电阻中,可以有单调型电阻,也可以有线性电阻。

图 1.4.4 为两个非线性电阻的并联电路,按 KVL 和 KCL 有

$$u = u_1 = u_2$$

$$i = i_1 + i_2$$

设两个非线性电阻均为电压控制的,且其伏安特性可分别写为 $i_1 = f_1(u_1)$, $i_2 = f_2(u_2)$ 。而由并联电阻组成的一端口的驱动点特性用 $i = f(u)$ 来表示。利用以上关系式,可求得

$$i = f_1(u_1) + f_2(u_2) = f_1(u) + f_2(u) = f(u) \quad (1-4-2)$$

所以此一端口的驱动点特性是一个电压控制的非线性电阻。

显然,对两个电压控制型电阻并联的讨论可以推广到 n 个电压控制型电阻的并联。另外,并联的电阻中,可以有单调型电阻,也可以有线性电阻。

3. 非线性电阻电路的方程

线性电阻电路方程的建立方法可以推广应用于非线性电阻电路,但由于后者的一些特点,这种推广有时就不甚容易,视所采用的方法而定。以结点法为例,当电路中的非线性电阻都是电压控制的,那么就不难写出电路的结点电压方程。如果电路含有电流控制的非线性电阻,则该非线性电阻的电流也将作为变量出现在结点电压方程中,另外还将该电阻的伏安特性作为补充方程,只是支路电压用相应的结点电压之差表示。

4. 小信号分析法

在电子电路中的非线性电路,不仅有作为偏置电压的直流电源 U_0 作用,同时还有随时间变动的输入电压 $u_s(t)$ 作用。假设在任何时刻有 $U_0 \gg |u_s(t)|$, 则把 $u_s(t)$ 称为小信号电压。分析这类电路,采用小信号分析法。

在图 1.4.5(a)所示电路中,直流电压源 U_0 为偏置电压,电阻 R_0 为线性电阻,非线性电阻 R 是电压控制型的,其伏安特性为 $i = g(u)$, 图 1.4.5(b)为其伏安特性曲线。小信号电压为 $u_s(t)$, 且 $|u_s(t)| \ll U_0$ 总成立。

按照 KVL 列出电路方程

$$U_0 + u_s(t) = R_0 i(t) + u(t) \quad (1-4-3)$$

当 $u_s(t) = 0$ 时,即只有 U_0 单独作用时,负载线 \overline{AB} 见图 1.4.5(b), 它与 $i = g(u)$ 特性曲线的交点 $Q(U_Q, I_Q)$ 即为静态工作点。在 $|u_s(t)| \ll U_0$ 条件下,则式(1-4-3)的解 $u(t), i(t)$ 必在工作点 (U_Q, I_Q) 附近,所以近似地把 $u(t), i(t)$ 写为

$$u(t) = U_Q + u_1(t) \quad (1-4-4)$$

$$i(t) = I_Q + i_1(t) \quad (1-4-5)$$

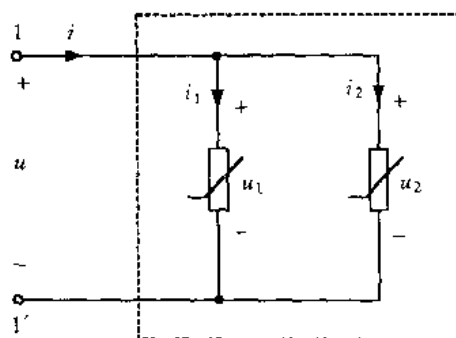


图 1.4.4

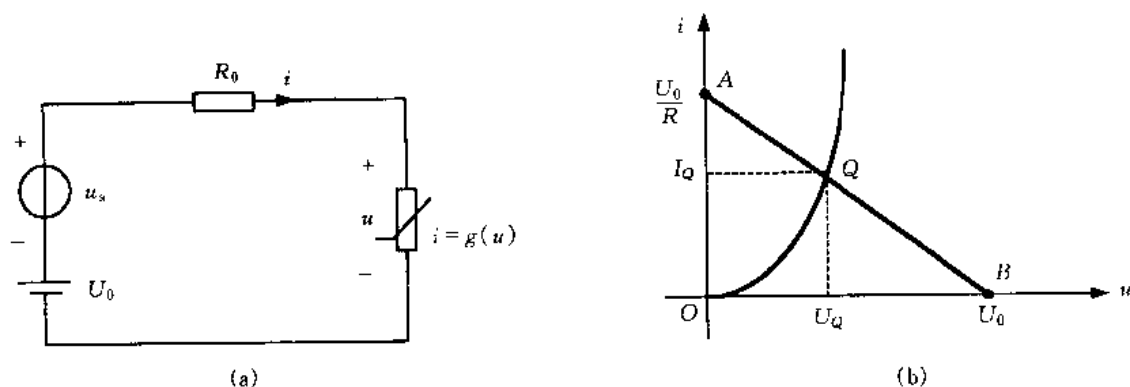


图 1.4.5

式中 $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 是由于信号 $u_s(t)$ 所引起的偏差。在任何时刻 t , $u_1(t)$ 和 $i_1(t)$ 相对 U_Q , I_Q 来说都是很小的量。

将式(1-4-4)和(1-4-5)代入 $i = g(u)$ 得

$$I_Q + i_1(t) = g(U_Q + u_1(t)) \quad (1-4-6)$$

由于 $u_1(t)$ 很小, 将上式右方在 Q 附近用泰勒级数展开并只取前面两项可得

$$I_Q + i_1(t) \approx g(U_Q) + \left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} u_1(t)$$

由于 $I_Q = g(U_Q)$, 则从上式得

$$i_1(t) \approx \left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} u_1(t) = G_d u_1(t) = \frac{1}{R_d} u_1(t)$$

上式 $\left. \frac{dg}{du} \right|_{U_Q} = G_d = \frac{1}{R_d}$ 为非线性电阻在工作点 (U_Q, I_Q) 处的动态电导, 且为一常量。因此, 由 $u_s(t)$ 产生的电压 $u_1(t)$ 和电流 $i_1(t)$ 之间的关系是线性的。这样, 式(1-4-3)可改写为

$$U_0 + u_s(t) = R_0 [I_Q + i_1(t)] + U_Q + u_1(t)$$

注意到 $U_0 = R_0 I_Q + U_Q$, $u_1(t) = R_d i_1(t)$, 则有

$$u_s(t) = R_0 i_1(t) + R_d i_1(t) \quad (1-4-7)$$

上式是一个线性代数方程, 由此可以作出该电路在给
定非线性电阻工作点 (U_Q, I_Q) 处的小信号等效电路
如图 1.4.6 所示。于是

$$i_1(t) = \frac{u_s(t)}{R_0 + R_d}$$

$$u_1(t) = R_d i_1(t) = \frac{R_d u_s(t)}{R_0 + R_d}$$

小信号分析法步骤总结如下:

① 不考虑小信号电源作用, 只考虑偏置直流电源作用, 求出各非线性电阻的静态工作点。

② 求出在静态工作点处的各非线性电阻的动态电阻 R_{dk} 。

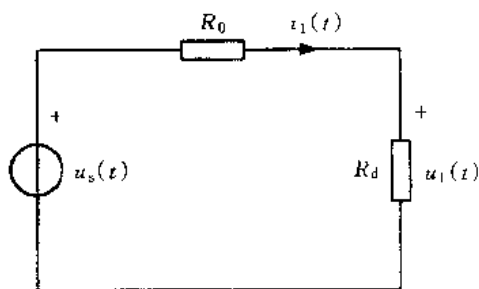
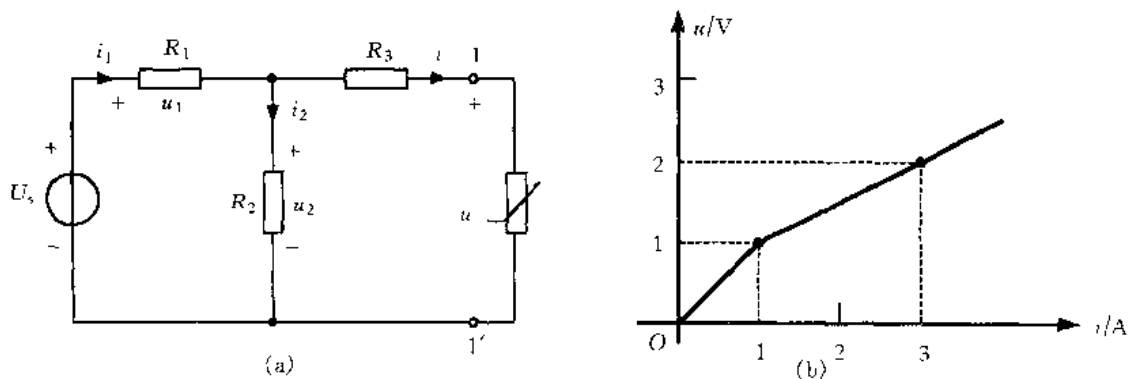


图 1.4.6

- ③ 作出只包含小信号电源、全部线性电阻、各非线性电阻的动态电阻的小信号等效电路。
- ④ 对小信号等效电路分析就可求出由小信号电源产生的各电阻元件上的小信号电压和小信号电流。
- ⑤ 各电阻元件上的电压为静态工作电压与小信号电压的代数和,电流为静态工作电流与小信号电流的代数和。

1.4.2 典型题解析

例 1.4.1 电路如例图 1.4.1(a)所示,其中 $U_s = 16\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, 非线性电阻的伏安特性如例图 1.4.1(b)所示。试计算各支路电压、电流。

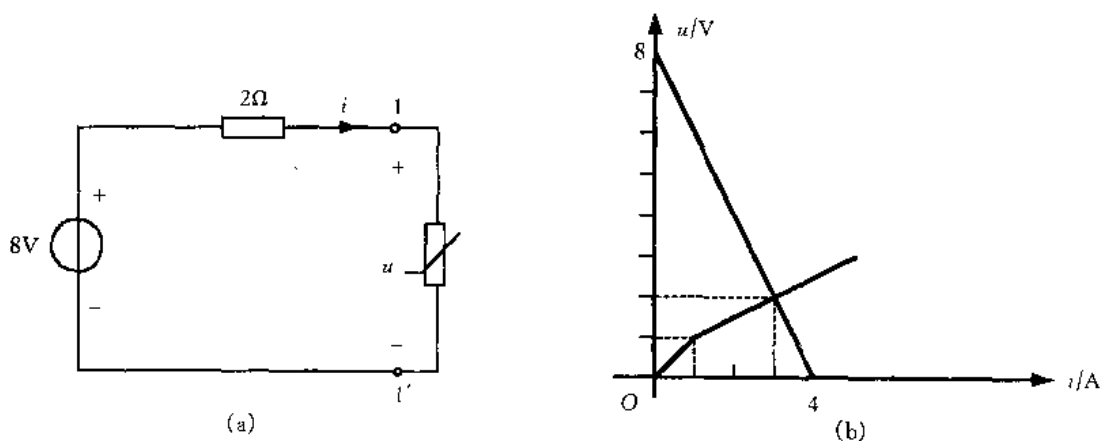


例图 1.4.1

解 将例图 1.4.1(a)所示电路结点 1-1' 左边电路用戴维宁等效电路替代后,得例图 1.4.2(a)电路。戴维宁等效电路的伏安特性为

$$u = 8 - 2i \quad (1)$$

将式(1)表示的伏安特性与例图 1.4.1(b)表示的非线性电阻伏安特性画在一张 $u-i$ 图上,两条曲线的交点即为非线性电阻两端的电压和流过的电流,如例图 1.4.2(b)所示。从例图 1.4.2(b)可知: $u = 2\text{ V}$, $i = 3\text{ A}$ 。其他电压、电流计算如下



例图 1.4.2

$$u_2 = R_3 i + u = 1 \times 3 + 2 = 5 \text{ V}$$

$$i_2 = u_2 / R_2 = 5 / 2 = 2.5 \text{ A}$$

$$i_1 = i_2 + i = 2.5 + 3 = 5.5 \text{ A}$$

$$u_1 = R_1 i_1 = 2 \times 5.5 = 11 \text{ V}$$

例 1.4.2 例图 1.4.3 所示电路中, 已知 $U_s = 20 \text{ V}$, $\alpha = 3$, $U_{sl} = 12 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, 非线性电阻 R_1 的伏安特性为 $U_1 = 10 I_1^2$, 试分别求开关在 1, 2 位置情况下的电压 U 。

解 先用一步法求左边电路的戴维宁等效电路, 对例图 1.4.4(a) 列 KVL 方程组

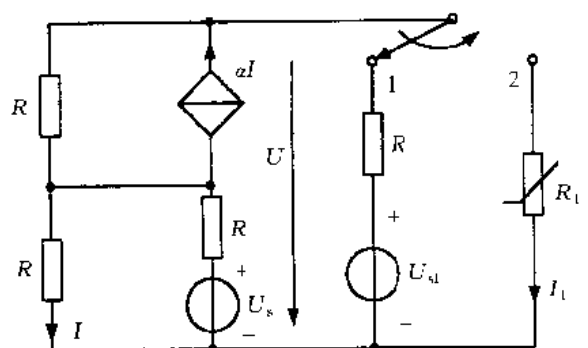
$$\begin{cases} U = R(I_a + \alpha I) - RI \\ RI = R(I_a - I) + U_s \end{cases}$$

代入数值可得到

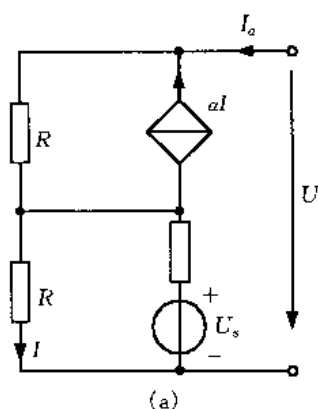
$$U = 30 I_a + 40 \quad (1)$$

按式(1)作出戴维宁等效电路, 并接上右边电路如例图 1.4.4(b)所示, 其中

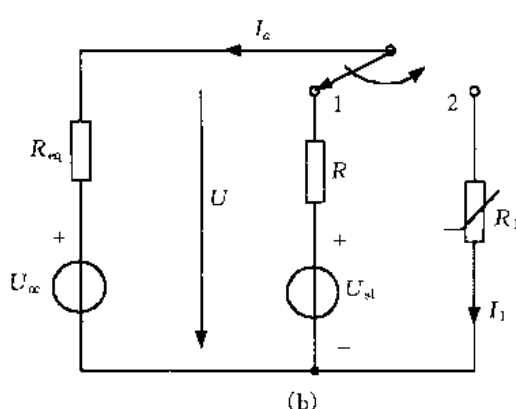
$$U_{oc} = 40 \text{ V}, \quad R_{eq} = 30 \Omega$$



例图 1.4.3



(a)



(b)

例图 1.4.4

(1) 开关置位置 1, 求 U 值

$$U = \frac{U_{oc} - U_{sl}}{R + R_{eq}} R + U_{sl} = 19 \text{ V}$$

(2) 开关置位置 2, 求 U 值

$$U = U_{oc} + R_{eq} I_a$$

$$U = 10 I_1^2$$

$$I_1 = -I_a$$

由以上三式可解出 $U = 10 \text{ V}$ 。

例 1.4.3 例图 1.4.5 所示电路中, 非线性电阻的伏安特性为

$$U = \begin{cases} 0 & I \leq 0 \\ I^2 + 1 & I > 0 \end{cases}$$

求 I 和 U 。

解 先求非线性电阻以外电路的戴维宁等效电路

$$U_{\infty} = 3 \text{ V}, \quad R_{\text{eq}} = 1 \Omega$$

作出等效电路如例图 1.4.6 所示。虚线左边电路的伏安特性为

$$U = 3 - I \quad (1)$$

虚线右边非线性电阻的伏安特性为

$$U = \begin{cases} 0 & I \leq 0 \\ I^2 + 1 & I > 0 \end{cases} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得

$$I^2 + I - 2 = 0$$

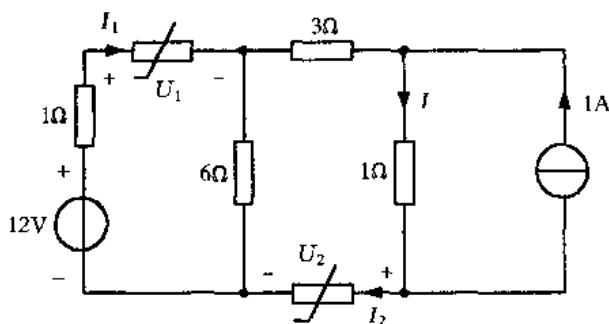
求解上式可得两个根

$$I = 1 \text{ A}, \quad I = -2 \text{ A}$$

其中 $I = -2 \text{ A}$ 这个根不满足式(2), 舍去, 得到解答 $I = 1 \text{ A}$, 代入式(1)可得

$$U = 3 - I = 3 - 1 = 2 \text{ V}$$

例 1.4.4 例图 1.4.7 所示电路中, $U_1 = I_1^2 (I_1 > 0)$, $U_2 = I_2^2 (I_2 > 0)$, $I = 2 \text{ A}$ 。求 U_1 和 U_2 。



例图 1.4.7

解 对例图 1.4.7 所示电路列 KVL 方程

$$1 \times I_1 + U_1 + 3(I - 1) + 1 \times I + U_2 = 12 \quad (1)$$

由已知条件知

$$U_1 = I_1^2, \quad U_2 = I_2^2, \quad I = 2 \text{ A} \quad (2)$$

由 KCL 知

$$I_2 = I - 1 \quad (3)$$

将式(2), (3)代入式(1)得出

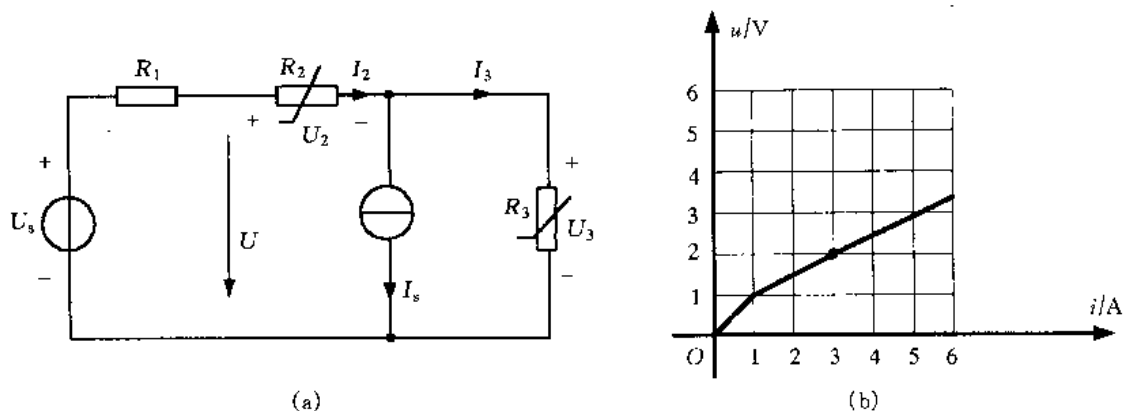
$$I_1^2 + I_1 - 6 = 0 \quad (4)$$

由式(4)解出 $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_1 = -3 \text{ A}$ 两个根, 其中 $I_1 = -3 \text{ A}$ 不满足要求, 应舍去。因此

$$U_1 = I_1^2 = 2^2 = 4 \text{ V}$$

$$U_2 = I_2^2 = (I_1 - 1)^2 = 1 \text{ V}$$

例 1.4.5 例图 1.4.8(a) 所示电路, 已知 $U_s = 6 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R_1 = 1 \Omega$, R_2, R_3 为非线性电阻, 其伏安特性如例图 1.4.8(b) 曲线所示。求 R_2, R_3 中的电流。



例图 1.4.8

解 用曲线相加法及曲线相交法求解。具体步骤如下:

(1) 由 KCL: $I_2 = I_s + I_3$, 而 $U_3 = f_1(I_3)$ 曲线如例图 1.4.8(b) 所示, 利用曲线相加法作出 $U_2 = f_1(I_3 + I_s)$ 曲线②。方法是: 先将 R_3 曲线重画于例图 1.4.9 中得曲线①, 然后沿横轴加 I_s (等于 2 A) 则得曲线②。

(2) 由 KVL: $U = U_2 + U_3$, 其中 $U_3 = f_1(I_3)$ 曲线为例图 1.4.9 中曲线① (注意题中给定 R_2, R_3 的伏安特性是相同的)。 $U_2 = f_1(I_3 + I_s)$ 曲线为②, 将①, ②两条曲线沿纵轴相加则得 $U = U_2 + U_3 = f_3(I_2)$, 如曲线③所示。

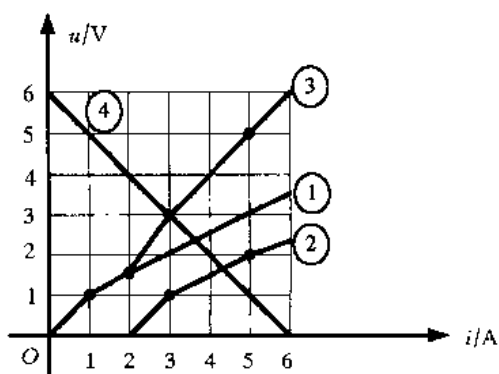
(3) 按例图 1.4.8(a) 得出由 U_s 和 R_1 组成的线性支路的伏安特性为

$$U = U_s - R_1 I_2 = 6 - I_2$$

这是一个直线方程, 在例图 1.4.9 中作出该方程的图像如直线④所示。方法是: 令 $I_2 = 0$, 得 $U = 6 \text{ V}$; 令 $U = 0$, 得 $I_2 = 6 \text{ A}$, 分别在纵轴和横轴上找出这两点, 连接这两点的直线就是直线④。

(4) 求出曲线③与直线④的相交点, 它的横坐标 $I = 3 \text{ A}$, 纵坐标 $U = 3 \text{ V}$, 此两值即为例图 1.4.8(a) 电路中的 I_2 和 U 的值。电流 I_3 为

$$I_3 = I_2 - I_s = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$



例图 1.4.9

由于 $I_2 = 3 \text{ A}$, 则由 $U_2 = f_1(I_2)$, 在曲线①上可得出 $U_2 = 2 \text{ V}$ 。由于 $I_3 = 1 \text{ A}$, 则由 $U_3 = f_1(I_3)$, 在曲线①上可得出 $U_3 = 1 \text{ V}$ 。

例 1.4.6 例图 1.4.10 所示电路, 非线性电阻为电流控制型电阻, 其伏安特性为 $u = f(i)$, 试写出电路的结点方程。

解 方程变量除结点电压 u_1, u_2 外, 电流 i 也要作为变量, 故方程为

$$\text{结点①: } \frac{1}{R_1} u_1 + i = i_s + \frac{1}{R_1} u_s$$

$$\text{结点②: } g u_1 + \left(\frac{1}{R_2} - g \right) u_2 - i = 0$$

$$\text{补充方程: } u_1 - u_2 - f(i) = 0$$

例 1.4.7 电路如例图 1.4.10 所示, 非线性电阻为电压控制型电阻, 其伏安特性为 $i = f(u)$, 试写出电路的结点电压方程。

解 将非线性电阻的控制电压用结点电压表示, 即

$$i = f(u_1 - u_2)$$

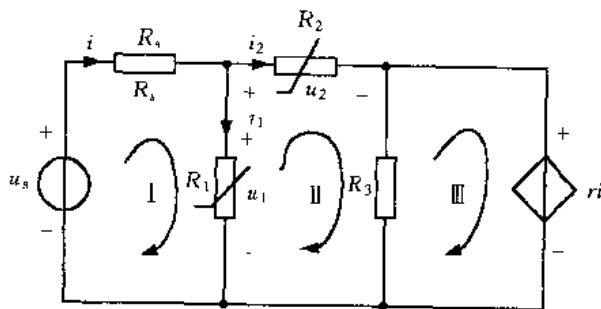
则结点电压方程为

$$\text{结点①: } \frac{1}{R_1} u_1 + f(u_1 - u_2) - i_s + \frac{1}{R_1} u_s$$

$$\text{结点②: } g u_1 + \left(\frac{1}{R_2} - g \right) u_2 - f(u_1 - u_2) = 0$$

与例 1.4.6 相比, 本题所列方程中无补充方程。

例 1.4.8 电路如例图 1.4.11 所示, 非线性电阻 R_1 的伏安特性为 $u_1 = f_1(i_1)$, 非线性电阻 R_2 的伏安特性为 $u_2 = f_2(i_2)$, 试写出网孔方程。



例图 1.4.11

解 首先将非线性电阻的控制变量用网孔电流表示, 即

$$u_1 = f_1(i_{m1} - i_{m2})$$

$$u_2 = f_2(i_{m2})$$

则网孔电流方程为

$$\text{网孔 I: } R_s i_{m1} + f_1(i_{m1} - i_{m2}) = u_s$$

$$\text{网孔 II: } f_1(i_{m1} - i_{m2}) + f_2(i_{m2}) + R_3 i_{m2} - R_3 i_{m3} = 0$$

$$\text{网孔 III: } r i_{m1} - R_3 i_{m2} + R_3 i_{m3} = 0$$

例 1.4.9 电路如例图 1.4.11 所示,但非线性电阻 R_1 的伏安特性为 $i_1 = f_1(u_1)$, R_2 的伏安特性为 $i_2 = f_2(u_2)$, 试写出网孔电流方程。

解 方程变量除网孔电流 i_{m1}, i_{m2}, i_{m3} 外, 电压 u_1, u_2 也要作为变量, 故网孔电流方程为

$$\text{网孔 I: } R_1 i_{m1} + u_1 = u_s$$

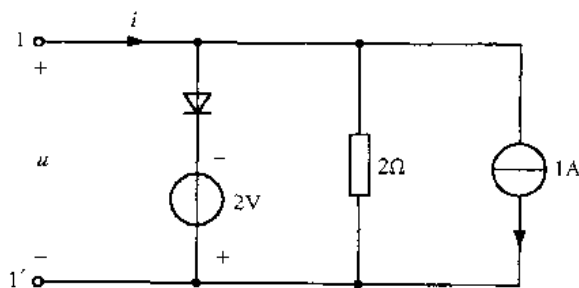
$$\text{网孔 II: } -u_1 + u_2 + R_3 i_{m2} - R_3 i_{m3} = 0$$

$$\text{网孔 III: } R_1 i_{m1} - R_3 i_{m2} + R_3 i_{m3} = 0$$

$$\text{补充方程: } i_{m1} - i_{m2} - f_1(u_1) = 0$$

$$i_{m2} - f_2(u_2) = 0$$

例 1.4.10 含理想二极管的电路如例图 1.4.12 所示。试画出 1-1' 端的伏安特性曲线。



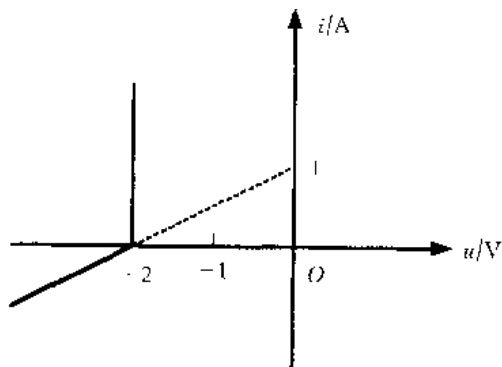
例图 1.4.12

解 1-1' 端的伏安特性可应用曲线相加法求得, 即把各元件的伏安特性分别给出, 再根据各元件之间的串、并联关系把相应的曲线相加得到端口 1-1' 的伏安特性。

当电路含有理想二极管时, 可根据二极管导通和截止两种情况, 分别写出电路对应的 KCL 或 KVL 方程, 根据所写出的方程绘出端口 1-1' 的伏安特性。在本题中, 当 $u + 2 > 0$ 时, 即当 $u > -2$ V 时二极管导通, 此时电流 i 趋近无穷大。当 $u < -2$ V 时, 二极管截止, 此时电流 $i = \frac{u}{2} + 1$, 即

$$u > -2 \text{ V} \quad i \rightarrow \infty$$

$$u < -2 \text{ V} \quad i = \frac{u}{2} + 1$$



例图 1.4.13

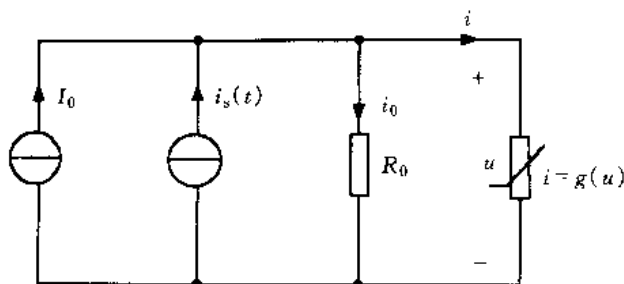
根据两式画出端口 1-1' 的伏安特性曲线如例图 1.4.13 所示。

例 1.4.11 例图 1.4.14 所示电路中, 直流电流源 $I_0 = 10$ A, $R_0 = 1/3 \Omega$, 非线性电阻为电压控制型, 其伏安特性表示为

$$i = g(u) = \begin{cases} u^2 & (u > 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

小信号电流源 $i_s(t) = 0.5 \cos t$ A。试求静态工作点和在工作点处由小信号产生的电压和电流。

解 应用 KCL 有



例图 1.4.14

$$\frac{1}{R_0} u + i = I_0 + i_s(t)$$

或

$$3u + g(u) = 10 + 0.5\cos t$$

令 $i_s(t) = 0$, 由上式得

$$3u + g(u) = 10$$

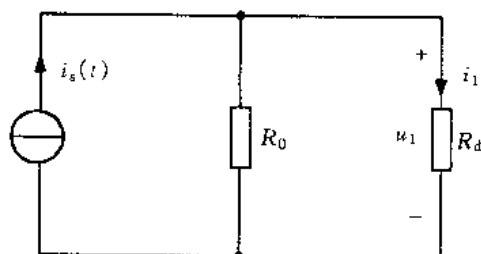
把 $g(u) = u^2 (u > 0)$ 代入上式并求解, 可得对应静态工作点的电压 $U_Q = 2 \text{ V}$, 电流 $I_Q = 4 \text{ A}$ 。工作点处的动态电导为

$$G_d = \left. \frac{dg(u)}{du} \right|_{U_Q} = 2u \Big|_{U_Q=2} = 4 \text{ S}$$

作出小信号等效电路如例图 1.4.15 所示, 由该电路求得非线性电阻的小信号电压和电流为

$$u_1 = \frac{i_s(t)}{G_0 + G_d} = \frac{1}{7} \times 0.5\cos t = 0.0714\cos t \text{ V}$$

$$i_1 = \frac{R_0}{R_0 + R_d} i_s(t) = \frac{4}{7} \times 0.5\cos t = 0.286\cos t \text{ A}$$



例图 1.4.15

电路的全解, 亦即非线性电阻的电压、电流为

$$u = U_Q + u_1 = (2 + 0.0714\cos t) \text{ V}$$

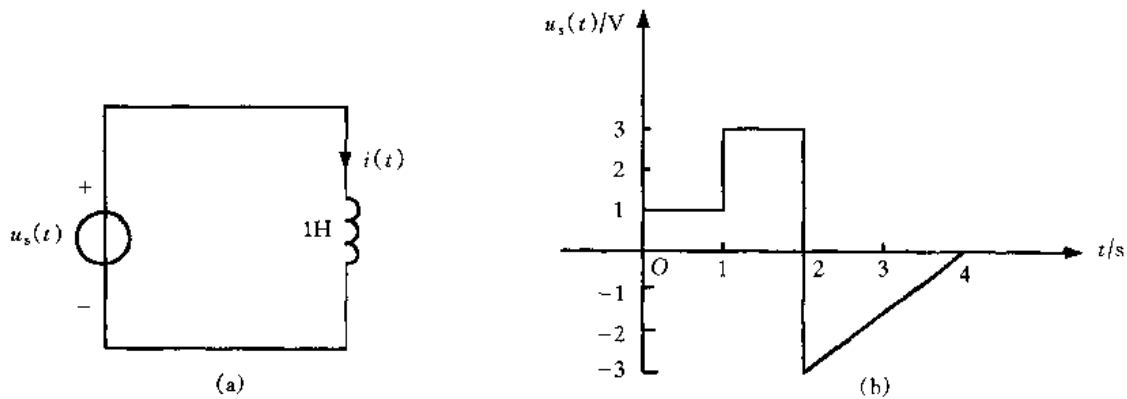
$$i = I_Q + i_1 = (4 + 0.286\cos t) \text{ A}$$

不难根据 KCL 求得 R_0 中的电流为

$$i_0 = (6 + 0.214\cos t) \text{ A}$$

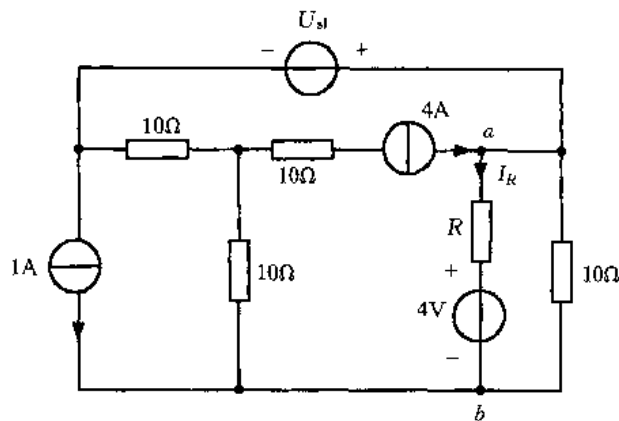
1.5 阶段测试题

[题 1.1] 题图 1.1(a) 所示电感上的电压 $u_s(t)$ 波形如图(b) 所示, 试计算电感上的电流 $i(t)$, 并定性画出相应的波形图。



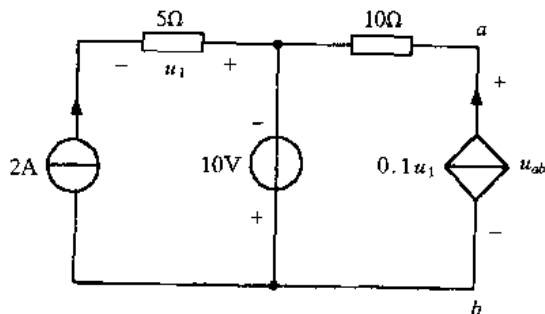
题图 1.1

[题 1.2] 题图 1.2 所示电路, 已知 $U_{ab} = 8\text{V}$ 时, $I_R = 200\text{mA}$, 求 U_{s1} 及 U_{s1} 发出的功率。



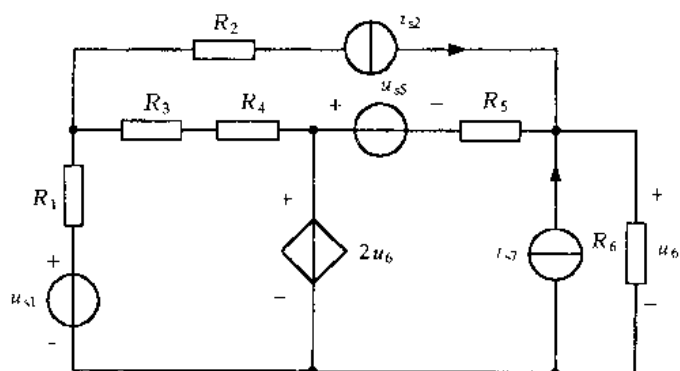
题图 1.2

[题 1.3] 题图 1.3 所示电路, 求 ab 端的电压 u_{ab} 。



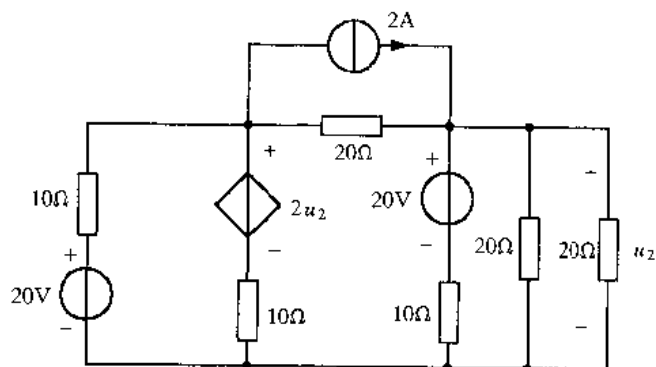
题图 1.3

〔题 1.4〕 电路如图:(1)列回路电流方程;(2)列结点电压方程。



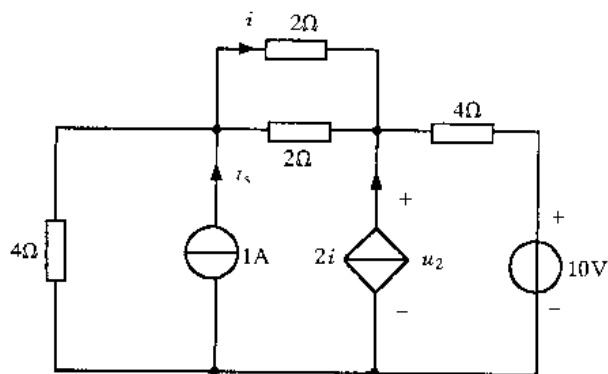
题图 1.4

〔题 1.5〕 电路如图示,应用结点法求电压 u_{n1} , u_{n2} 。



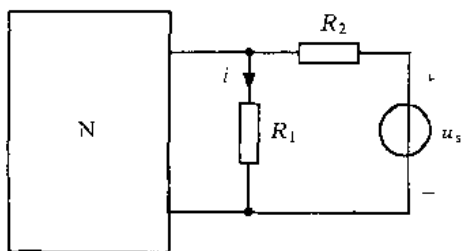
题图 1.5

〔题 1.6〕 电路如图示,求受控电流源两端的电压 u_2 及电流源 i_s 发出的功率 P 。

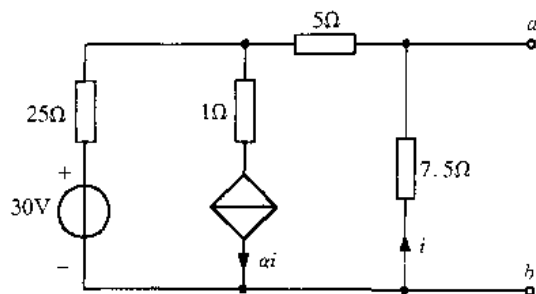


题图 1.6

〔题 1.7〕 题图 1.7 所示电路,已知 $u_s=0$ 时, $i=4\text{ mA}$; $u_s=-4\text{ V}$ 时, $i=-6\text{ mA}$ 。求 $u_s=6\text{ V}$ 时的电流 i 。



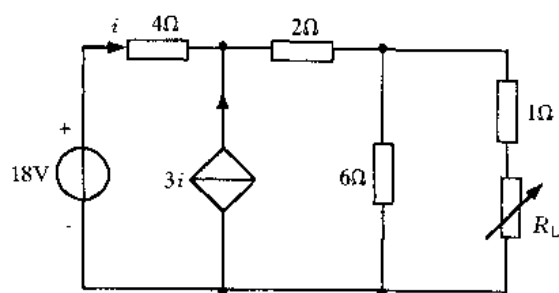
题图 1.7



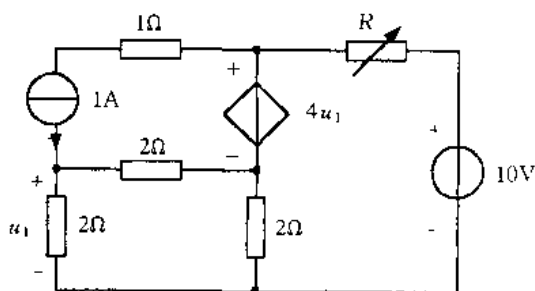
题图 1.8

[题 1.8] 电路如题图 1.8 所示,试给出(1) $\alpha=1.5$, (2) $\alpha=3$ 时, a, b 端的等效电路。

[题 1.9] 电路如题图 1.9 所示, R_L 为何值时能获得最大功率,并求此最大功率 P_{\max} 。



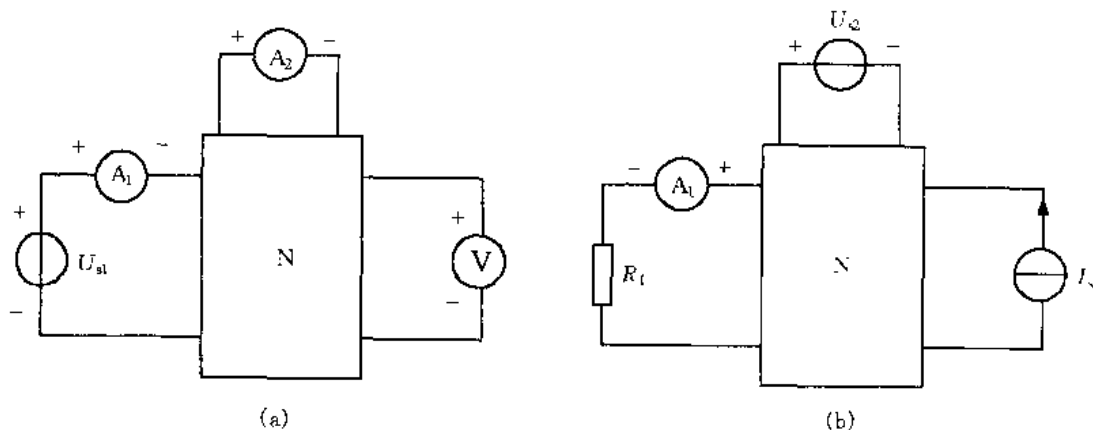
题图 1.9



题图 1.10

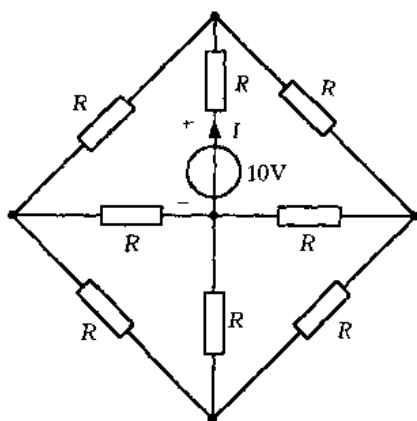
[题 1.10] 题图 1.10 所示电路中,电阻 R 可调节,问 R 等于多少时才能从电路中吸收最大的功率,求此最大功率。

[题 1.11] 题图 1.11 所示电路(a)中 $U_{s1}=70\text{ V}$ 时, $\textcircled{A}_1=0.5\text{ A}$, $\textcircled{A}_2=0.2\text{ A}$, $\textcircled{V}=14\text{ V}$ 。现将 U_{s1} 及 \textcircled{A}_2 、 \textcircled{V} 表都移去,分别代以 $R_1=210\ \Omega$, $U_2=105\text{ V}$, $I_s=3.5\text{ A}$,如图(b)所示。求图(b)中 \textcircled{A}_1 表的读数。设电流表 \textcircled{A}_1 、 \textcircled{A}_2 , 电压表 \textcircled{V} 均为理想电表。网络 N 为线性无源网络。

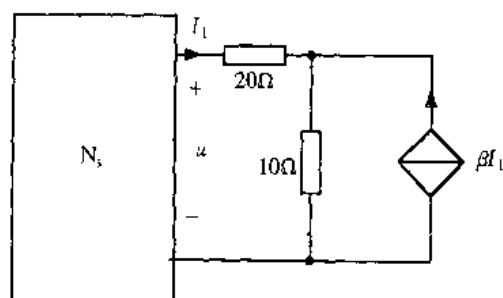


题图 1.11

[题 1.12] 题图 1.12 所示直流电路中,电阻均为 $1\ \Omega$, 试求电流 I 。



题图 1.12

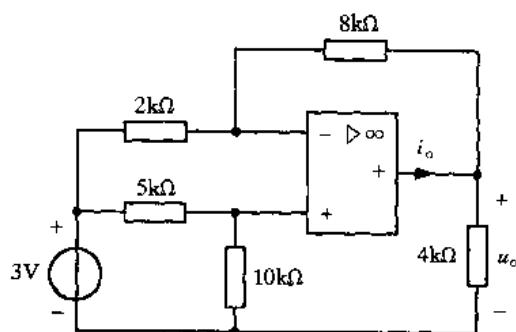


题图 1.13

[题 1.13] 电路如题图 1.13 所示,有源线性网络 N_s 的端口电压随 β 变化而不同,当 $\beta = 1$ 时, $u = 20\text{ V}$, 当 $\beta = -1$ 时, $u = 12.5\text{ V}$ 。

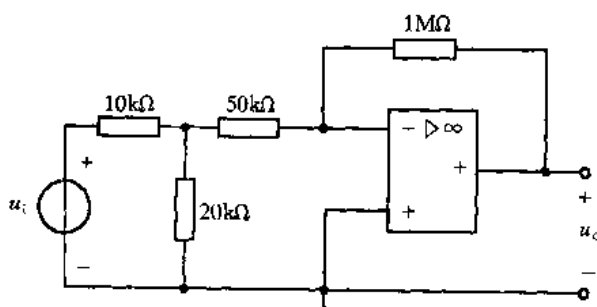
求 β 为何值时外部电路从网络 N_s 获取最大功率,此功率为多少?

[题 1.14] 计算题图 1.14 所示电路的 u_o 和 i_o 。



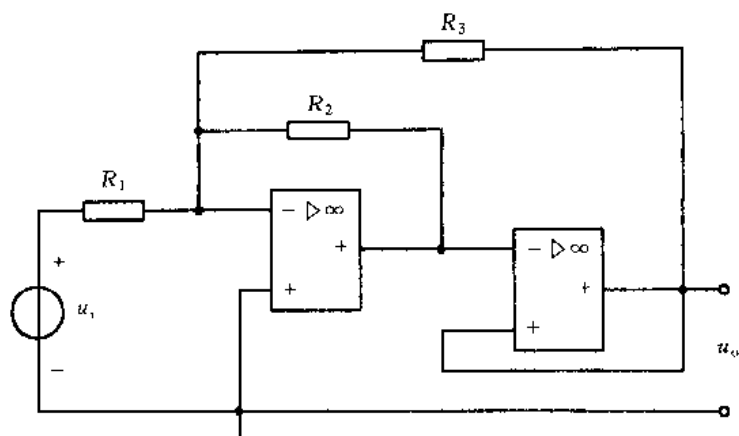
题图 1.14

[题 1.15] 计算题图 1.15 所示电路的 u_o/u_i 。



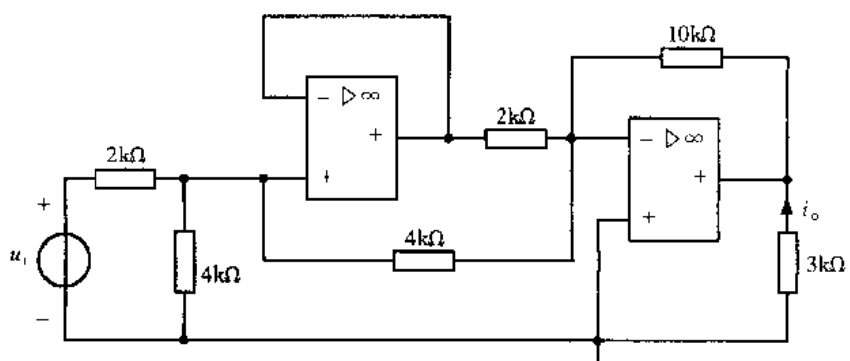
题图 1.15

[题 1.16] 电路如题图 1.16 所示,计算 u_o/u_i 。



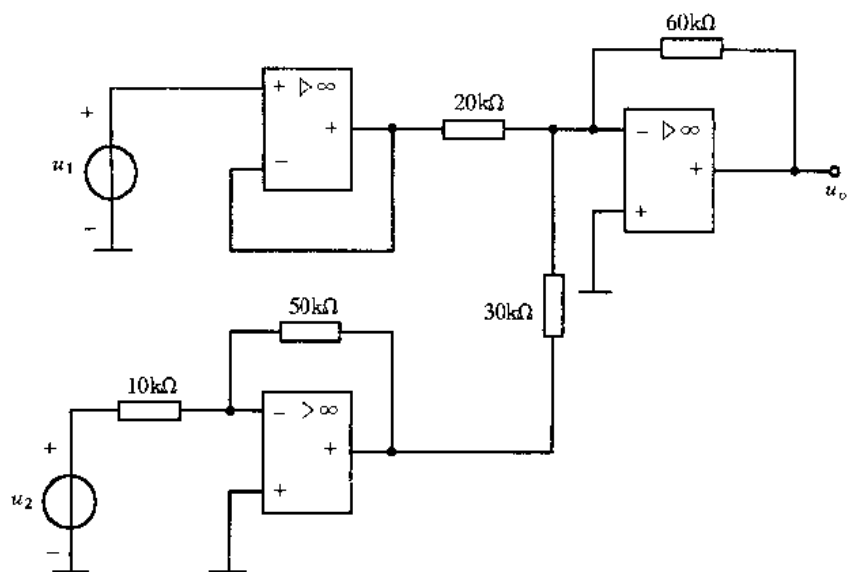
题图 1.16

[题 1.17] 电路如题图 1.17 所示, 计算当 $u_1 = 2\text{ V}$ 时负载电阻中电流 i_o 。



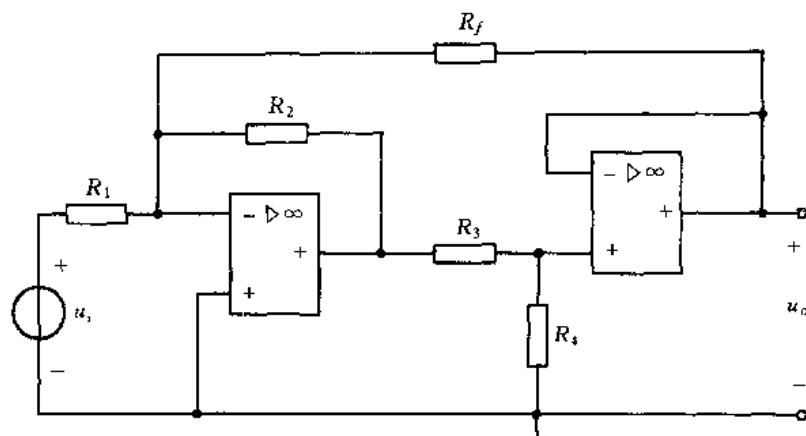
题图 1.17

[题 1.18] 电路如题图 1.18 所示, 试求输出电压 u_o 。



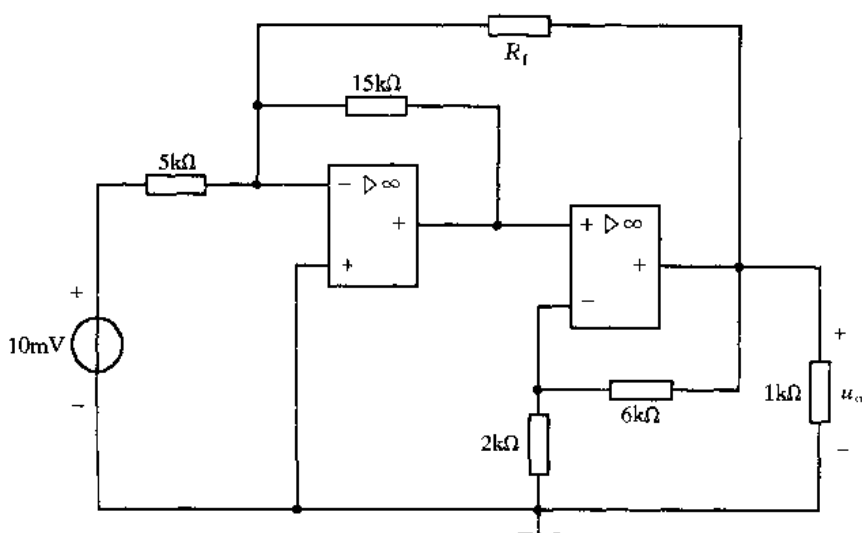
题图 1.18

[题 1.19] 计算题图 1.19 所示电路的电压增益 u_o/u_i 。



题图 1.19

[题 1.20] 电路如题图 1.20 所示,分别求:(1)当 $R_f = \infty$, (2) 当 $R_f = 10 \text{ k}\Omega$ 时,输出电压 u_o 。



题图 1.20

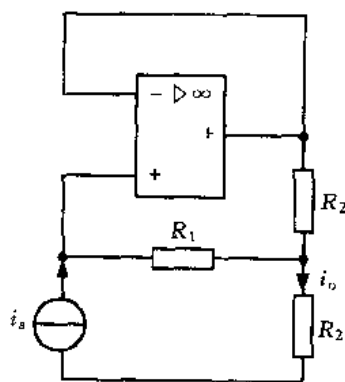
[题 1.21] 题图 1.21 所示电路为同相电流放大器,计算当 $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ 时的电流增益 i_o/i_s 。

[题 1.22] 电路如题图 1.22(a)所示,非线性电阻元件 R 的伏安特性如题图 1.22(b)所示,试求 U_R 和 I_R 。

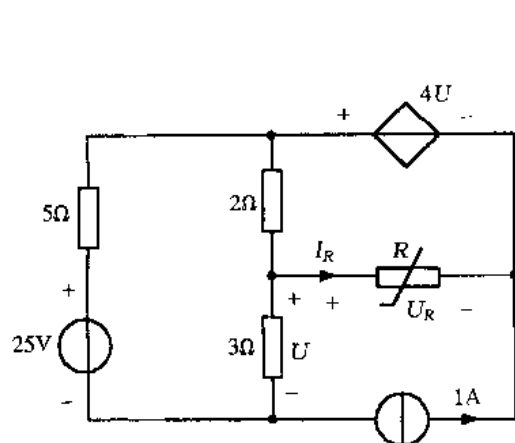
[题 1.23] 题图 1.23(a)所示电路,已知: $U_s = 7 \text{ V}$, $I_s = 1 \text{ A}$, $R_1 = 1 \Omega$, R_2 , R_3 为非线性电阻,其伏安特性如题图 1.22(b)所示。求 R_2 , R_3 中的电流。

[题 1.24] 试给出题图 1.24 所示一端口的 $u-i$ 特性曲线(图中 D 为理想二极管)。

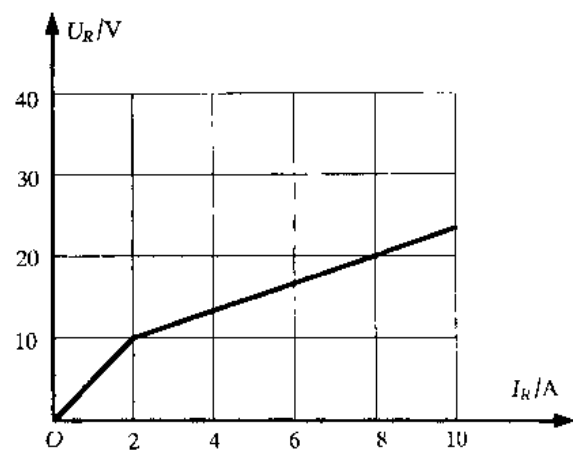
[题 1.25] 电路如题图 1.25 所示,试列出结点电压方程。其中 R_3 和 R_4 的伏安特性分别为 $i_3 = f_1(u_3)$, $u_4 = f_2(i_4)$ 。



题图 1.21

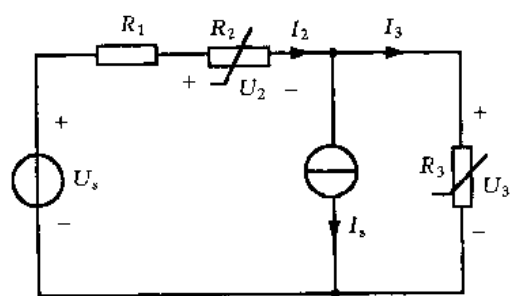


(a)

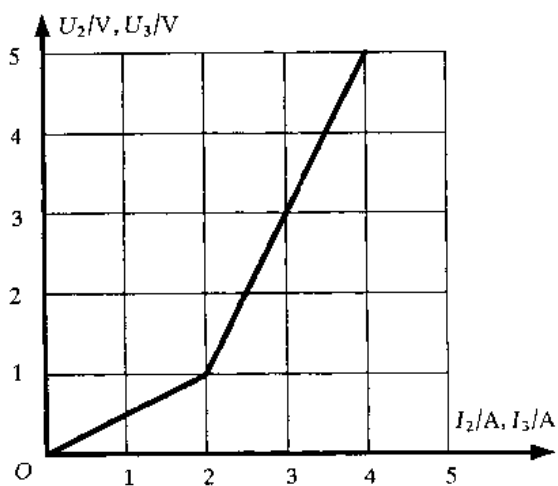


(b)

题图 1.22

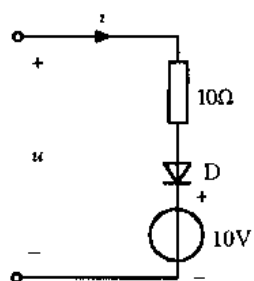


(a)

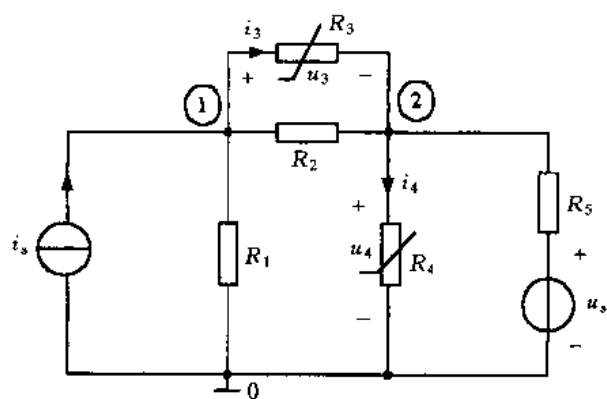


(b)

题图 1.23

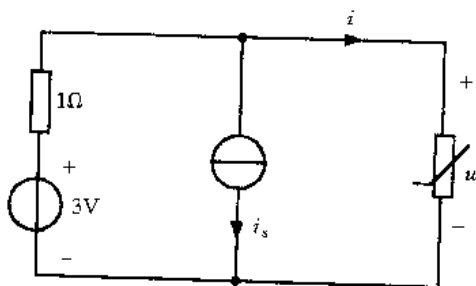


题图 1.24



题图 1.25

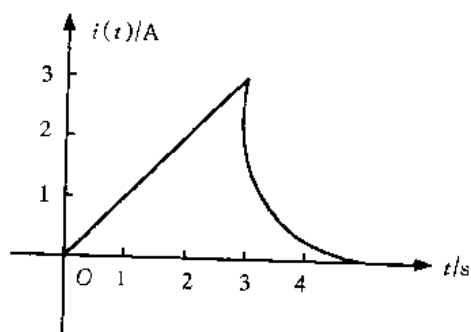
〔题 1.26〕 在题图 1.26 所示电路中,非线性电阻元件伏安特性为 $i = (-3u + u^2)$ A,小信号 $i_s = 40\cos(10^3 t)$ mA。试用小信号分析法求响应 u, i 。



题图 1.26

1.6 阶段测试题答案

〔题 1.1〕 $0 < t \leq 1$ $i(t) = t$ $i(1) = 1$
 $1 < t \leq 2$ $i(t) = 2t - 1$ $i(2) = 3$
 $2 < t \leq 4$ $i(t) = 0.75t^2 - 6t + 12$ $i(4) = 0$
 波形



〔题 1.2〕 $U_{sl} = 8$ V $P = 24$ W(吸收)

〔题 1.3〕 $U_{ab} = -20$ V

〔题 1.4〕 略

〔题 1.5〕 $u_{n1} = 20$ V $u_{n2} = 20$ V

〔题 1.6〕 $u_2 = \frac{82}{13}$ V $P = \frac{76}{13}$ W(发出功率)

〔题 1.7〕 $i = 19$ mA

〔题 1.8〕 $a = 1.5$ 时 等效电路为理想电流源 $I_s = 1$ A

$a = 3$ 时 等效电路中 $I_s = 1$ A $R_{eq} = -6$ A

〔题 1.9〕 $R_L = 3$ Ω $P_{max} = 12$ W

〔题 1.10〕 $R = 4$ Ω $P_{max} = 4$ W

[题 1.11] ① 表读数为 0.4 A

[题 1.12] $I = \frac{16}{3} \approx 5.33 \text{ A}$

[题 1.13] $\beta = 3 \quad R_{eq} = 60 \Omega \quad P_{\max} = 10.42 \text{ W}$

[题 1.14] $u_o = -2 \text{ V} \quad i_o = -1 \text{ A}$

[题 1.15] $u_o/u_i = -200/17$

[题 1.16] $\frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3)}$

[题 1.17] $i_o = 10 \text{ mA}$

[题 1.18] $u_o = 10u_2 - 3u_1$

[题 1.19] $u_o = -\frac{R_2 R_4 R_f}{R_1(R_2 R_4 + R_3 R_f + R_4 R_f)}$

[题 1.20] (1) $u_o = -120 \text{ mV}$; (2) $u_o = -120/7 \text{ mV}$

[题 1.21] $i_o/i_s = 9$

[题 1.22] $U_R = 13.5 \text{ V} \quad I_R = 4.1 \text{ A}$

[题 1.23] $I_2 = 3 \text{ A} \quad I_3 = 2 \text{ A}$

[题 1.24] $i = \begin{cases} \frac{1}{10}(u - 10) \text{ A} & u > 10 \text{ V} \\ 0 & u \leq 10 \text{ V} \end{cases}$

[题 1.25] $\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_{n1} - \frac{1}{R_2}u_{n2} + f_1(u_{n1} - u_{n2}) = i_s \\ -\frac{1}{R_2}u_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right)u_{n2} - f_1(u_{n1} - u_{n2}) + i_4 = \frac{u_s}{R_5} \\ u_{n2} - f_2(i_4) = 0 \end{cases}$

[题 1.26] 静态工作点的电压、电流分别为

$$U = 3 \text{ V} \quad I = 0$$

$$U = -1 \text{ V} \quad I = 4 \text{ A}$$

当工作点电压 $U_Q = 3 \text{ V}$, 电流 $I_Q = 0$ 时

$$u = [3 + 10^{-2} \cos(10^3 t)] \text{ V}$$

$$i = 30 \cos(10^3 t) \text{ mA}$$

当工作点电压 $U_Q = -1 \text{ V}$, 电流 $I_Q = 4 \text{ A}$ 时

$$u = [-1 + 10^{-2} \cos(10^3 t)] \text{ V}$$

$$i = [4 + 5 \times 10^{-2} \cos(10^3 t)] \text{ A}$$

第2章 正弦稳态电路

2.1 正弦稳态电路分析

2.1.1 理论提要

电路变量电流 $i(t)$ 、电压 $u(t)$ 均按同频正弦时间函数变化的线性电路,称为正弦电流电路。按正弦时间函数变化的电路变量均为正弦量。

1. 正弦量的相量表示

(1) 正弦量的三要素

若用余弦函数表示的正弦量如:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \psi_i) \\ &= \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) \end{aligned}$$

式中 I_m 和 I 反映了正弦量的大小, I_m 为正弦量的振幅。 I 为正弦量的有效值, 定义为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

ω 为角频率, 它反映了正弦量变化的快慢程度, 单位为 rad/s。 ω 与正弦量的频率 f 、周期 T 的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ψ_i 为初相, 它反映了正弦量在 $t=0$ 时刻的相位, 单位为 rad 或度。初相与计时零点的选取有关, 习惯上取 $|\psi_i| \leq 180^\circ$ 。

有效值(或振幅)、角频率和初相为正弦量的三要素。确定了这三个量就可以确定一个正弦量。

(2) 相位差

两个同频率正弦量的相位差等于它们初相之差。例如:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) \\ u &= \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u) \end{aligned}$$

则 u 与 i 的相位差 φ

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i$$

相位差 φ 是一个常数, 与计时零点的选取无关。 φ 习惯上均在 $\leq \pm \pi$ 范围内取值。当两个同频率正弦量的相位差 $\varphi=0$ 时, 称这两个正弦量同相。 $\varphi=\pi$ 时称这两个正弦量反相。当 $\varphi>0$ 时, 称电压 u 领先电流 i 的相角为 φ , 当 $\varphi<0$ 时, 称电压 u 落后电流 i 的相角为 $|\varphi|$ 。

(3) 相量

由于在正弦电流电路中,各个电压、电流响应均为同频率的正弦量,所以在分析正弦电流电路时,只要计算出各电流、电压的有效值(或振幅)和初相位就可以了。这样,我们可以用一个复数表示正弦量的有效值和初相位。

$$\begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i) \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}I e^{j\psi_i} e^{j\omega t}] \\ &= \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

式中 \dot{I} 为正弦量 $i(t)$ 对应的有效值相量,简称电流相量

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = I \angle \psi_i$$

也可用振幅表示相量,称振幅相量

$$I_m = \sqrt{2}\dot{I} = I_m e^{j\psi_i} = I_m \angle \psi_i$$

相量和复数一样,可以在复平面上用有向线段表示,如图 2.1.1 所示。这样表示相量的图称为相量图。应注意的是,只有相同频率的正弦量对应的相量才能画在同一相量图上,不同频率的正弦量对应的相量一般不应画在一个相量图上。

同频率正弦量的某些运算,可借助其对应的相量进行运算。如

$$i(t) = i_1(t) \pm i_2(t) \rightarrow \dot{I} = \dot{I}_1 \pm \dot{I}_2$$

$$\frac{di(t)}{dt} \rightarrow j\omega \dot{I}$$

$$\int i(t) dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{I}$$

(4) 基尔霍夫定律和电路元件伏安关系的相量形式

① 基尔霍夫定律的相量形式

KCL 的相量形式

$$\sum \dot{I} = 0$$

KVL 的相量形式

$$\sum \dot{U} = 0$$

② 电路元件伏安关系的相量形式

电阻元件

时域形式伏安关系

$$u = Ri$$

相量形式伏安关系

$$\dot{U} = R\dot{I}$$

式中 $U = RI$, $\psi_u = \psi_i$, 电压与电流同相。其电路模型及其相量图如图 2.1.2 所示。

电感元件

时域形式伏安关系

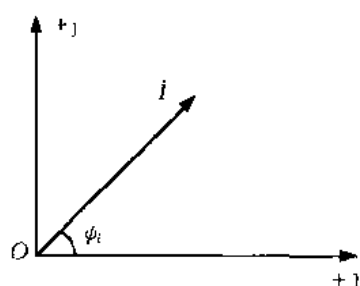


图 2.1.1 相量图

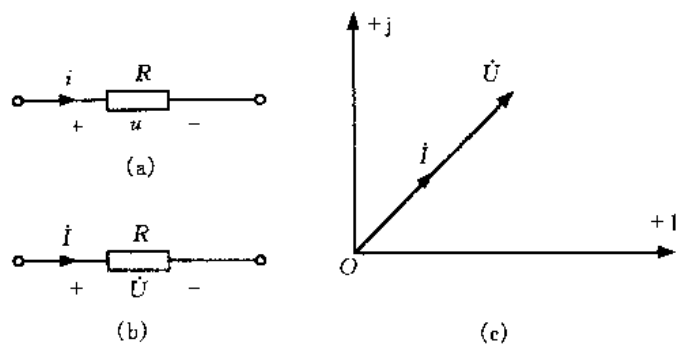


图 2.1.2 电阻元件

$$u = L \frac{di}{dt}$$

相量形式伏安关系

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$

式中 $U = \omega L I$, $\phi_u = \phi_i + \frac{\pi}{2}$, 电压超前电流 $\frac{\pi}{2}$ 相角。其电路模型及相量图如图 2.1.3 所示。

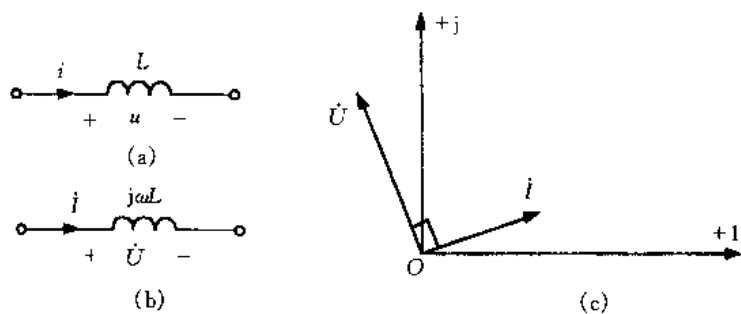


图 2.1.3 电感元件

电容元件

时域形式伏安关系

$$i = C \frac{du}{dt}$$

相量形式伏安关系

$$\dot{I} = j\omega C \dot{U}$$

式中 $U = \frac{1}{\omega C} I$, $\phi_u = \phi_i - \frac{\pi}{2}$, 电压落后电流 $\frac{\pi}{2}$ 相角。其电路模型及相量图如图 2.1.4 所示。

2. 阻抗和导纳

(1) 阻抗

无源一端口电路, 其端口电压相量与电流相量的比值定义为该一端口电路的阻抗

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle \phi_u - \phi_i = |Z| \angle \varphi_z$$

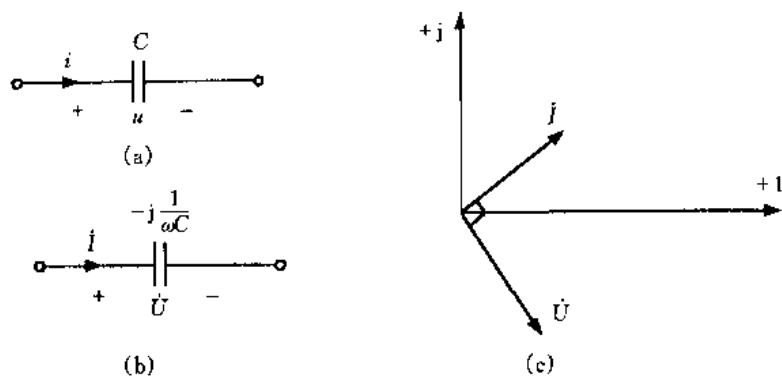


图 2.1.4 电容元件

式中 $|Z| = \frac{U}{I}$ 为阻抗的模, $\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$ 为阻抗角, 阻抗 Z 是复数, 它还可表示为

$$Z = R + jX$$

式中 $R = \operatorname{Re}[Z] = |Z| \cos \varphi_z$, 称为 Z 的电阻分量; $X = \operatorname{Im}[Z] = |Z| \sin \varphi_z$, 称为 Z 的电抗分量。阻抗的量纲为欧姆(Ω)。

如果无源一端口电路分别为单个元件 R, L 或 C , 它们相应的阻抗分别为

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

ωL 简称感抗, $-\left(\frac{1}{\omega C}\right)$ 简称容抗。

RLC 串联电路如图 2.1.5 所示, 电路阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

当 $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 时, 称 Z 是感性的, 当 $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 时, 称 Z

是容性的, 当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, 称 Z 是电阻性的。

(2) 导纳

无源一端口电路, 其端口电流相量与电压相量的比值定义为该一端口电路的导纳

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{I}{U} \angle \varphi_i - \varphi_u = |Y| \angle \varphi_y$$

式中 $|Y| = \frac{I}{U}$ 为导纳的模, $\varphi_y = \varphi_i - \varphi_u$ 为导纳角。导纳还可以表示为

$$Y = G + jB$$

式中 $G = \operatorname{Re}[Y]$ 称为 Y 的电导分量; $B = \operatorname{Im}[Y]$ 称为 Y 的电纳分量。导纳的量纲是西门子(S)。

如果无源一端口电路分别为单个元件 R, L 或 C , 它们相应的导纳分别为

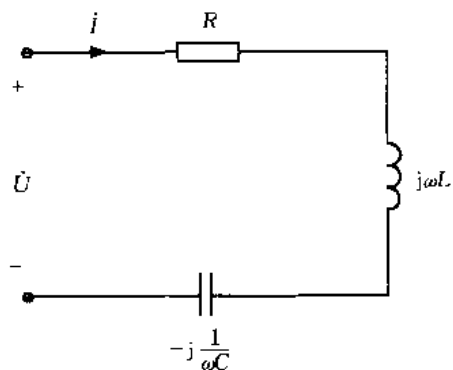


图 2.1.5 RLC 串联电路

$$Y_R = \frac{1}{R}$$

$$Y_L = -j \frac{1}{\omega L}$$

$$Y_C = j\omega C$$

$-\left(\frac{1}{\omega L}\right)$ 简称感纳, ωC 简称容纳。

RLC 并联电路如图 2.1.6 所示, 电路导纳

$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

当 $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ 时, 称 Y 是容性的, 当 $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ 时, 称 Y

是感性的, 当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$, 称 Y 是电导性。

(3) 阻抗与导纳的关系

同一端口, 导纳与阻抗的关系式为

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\varphi_Y = -\varphi_Z$$

若该电路的阻抗 $Z = R + jX$, 导纳 $Y = G + jB$, 则

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

由此可知, 一般情况下, 阻抗中电阻的倒数不等于导纳中的电导; 阻抗中电抗的倒数不等于导纳中的电纳。反之亦然。

(4) 阻抗、导纳的串并联

n 个阻抗串联而成的电路, 其等效阻抗

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

各阻抗的电压分配为

$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z_{eq}} \dot{U} \quad k=1, 2, \cdots, n$$

n 个导纳并联而成的电路, 其等效导纳

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

各导纳的电流分配为

$$\dot{I}_k = \frac{Y_k}{Y_{eq}} \dot{I} \quad k=1, 2, \cdots, n$$

两个阻抗 Z_1 和 Z_2 并联, 其等效阻抗

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

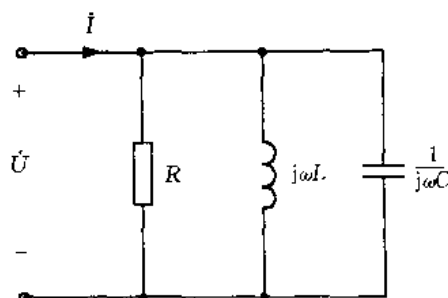


图 2.1.6 RLC 并联电路

两阻抗的分流公式为

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I$$

$$I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I$$

3. 正弦稳态电路的功率

(1) 一端口电路的功率

设一端口电路端口电压和电流取关联参考方向,分别为

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$$

一端口电路的平均功率(亦称有功功率)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi$$

式中 $\varphi = \psi_u - \psi_i$ 是电压与电流的相位差。如果一端口电路不含独立源,此时 φ 等于该一端口电路等效阻抗的阻抗角, $\cos \varphi$ 称为功率因数。

一端口电路的无功功率定义为

$$Q = UI \sin \varphi$$

一端口电路的视在功率定义为

$$S = UI$$

一端口电路的复功率定义为

$$\tilde{S} = UI^* = S \angle \varphi = P + jQ$$

平均功率 P 的单位为 W, 无功功率 Q 的单位为 var, 复功率 \tilde{S} 和视在功率 S 的单位为 V·A。其中 S, φ, P, Q 4 个量中, 已知任两个量可求出另外两个量。

阻抗 Z 和导纳 Y 吸收的复功率也可表示为

$$\tilde{S} = Z I I^* = Z I^2 = R I^2 + j X I^2$$

$$\tilde{S} = \dot{U} (Y \dot{U})^* = Y^* U^2 = G U^2 - j B U^2$$

电阻 R 、电感 L 、电容 C 的有功功率、无功功率可分别表示为

$$P_R = UI = R I^2 = G U^2 \quad Q_R = 0$$

$$P_L = 0 \quad Q_L = UI = \omega L I^2$$

$$P_C = 0 \quad Q_C = -UI = -\omega C U^2$$

电路中所有支路的平均功率守恒, 无功功率守恒, 复功率守恒。有时利用功率守恒定律可以简化电路的计算。

(2) 最大功率传输

当信号源的电压 \dot{U}_s , 内阻抗 $Z_i = R_i + jX_i = |Z_i| \angle \varphi_i$ 一定时, 负载 $Z_L = R_L + jX_L = |Z_L| \angle \varphi_L$ 从信号源获得最大平均功率的条件可分为

① 共轭匹配

当 $Z_L = Z_i^*$, 即 $R_L = R_i, X_L = -X_i$ 时

$$P_{\max} = \frac{U_s^2}{4R_i}$$

② 模匹配

当 Z_L 的幅角 φ_L 不能变化时,若 $|Z_L| = |Z_i|$ 时

$$P_{\max} = \frac{U_s^2 \cos \varphi_L}{2|z_i|[1 + \cos(\varphi_L - \varphi_i)]}$$

若 $Z_L = R_L = |Z_i|$ 时, $\varphi_L = 0$

$$P_{\max} = \frac{U_s^2}{2|Z_i|(1 + \cos \varphi_i)}$$

4. 正弦稳态分析

由于 KCL, KVL 和基本元件伏安关系的相量形式与线性电阻电路中的形式相似,因此,可将线性电阻电路的电路定理及分析方法(如:结点法、网孔法、等效电源定理等)推广应用于正弦电流电路的稳态分析中,差别仅在于所得的电路方程为复数形式的代数方程,计算则为复数运算。

正弦电流电路稳态分析的计算步骤为:先将正弦量用相量表示,元件的参数用阻抗或导纳表示,根据电路基本定律的相量形式,采用适当的分析方法,列写电路相量形式的方程。解方程可得到电压或电流响应的相量形式,最后把相量形式的电压或电流用正弦量表示。

5. 谐振电路

(1) 谐振

正弦稳态电路中,电流与所施电压一般相位不同,若电压超前电流 $\varphi > 0$,电路呈感性,若电流超前电压 $\varphi < 0$,电路呈容性。一定条件下,如电路参数配合适当,或频率选择合适,也可使电压与电流同相位,称电路发生谐振。此时电路的输入阻抗 $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ 中, $X(\omega) = 0$ 或输入导纳 $Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$ 中, $B(\omega) = 0$,电路表现为电阻性,阻抗角 $\varphi = 0$ 。这时的频率称为谐振频率,用 ω_0 表示。

处在谐振状态的电路称为谐振电路。

(2) 串、并联谐振电路

RLC 串联电路如图 2.1.7 所示,输入阻抗

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

谐振条件

$$X(\omega) = (\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$$

谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

串联谐振电路的电路参量

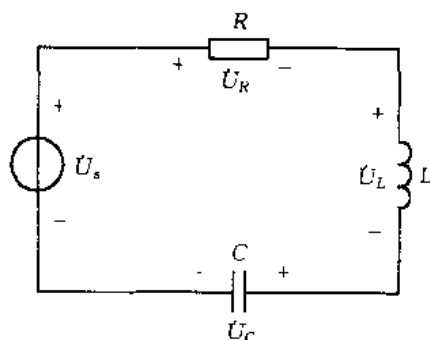


图 2.1.7 串联谐振电路

$$\text{特性阻抗 } \rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{品质因数 } Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

串联谐振电路的谐振特点:

① 电压与电流同相位, $\varphi=0$, 电路输入阻抗具有最小值 $Z_0=R$, 若 $R=0$, 则等效一条短路线。

② 当输入电压 U_s 一定时, 此时电流最大

$$I_0 = \frac{U_s}{R}$$

③ 电感电压 $\dot{U}_{L0} = jQ\dot{U}_s$ 与电容电压 $\dot{U}_{C0} = -jQ\dot{U}_s$ 大小相等, 相位相反。串联谐振亦称电压谐振。

RLC 并联电路与 RLC 串联电路是对偶电路, 利用对偶关系, 可以很方便得到 RLC 并联谐振电路的特点。

若有图 2.1.8 所示并联谐振电路, 输入导纳

$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

谐振条件

$$B(\omega) = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}$$

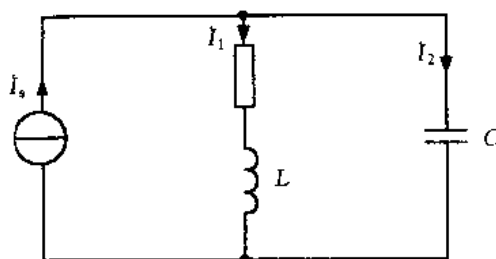


图 2.1.8 实际并联谐振电路

当 $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$ 可以得到一个谐振频率, 若 $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$ 则电路不能发生谐振。当 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

由于 R 与 L 串联, 电流相同。此并联谐振电路的电路参量

$$\text{特性阻抗 } \rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{品质因数 } Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

并联谐振电路的谐振特点:

① 电压与电流同相位, $\varphi=0$, 电路输入导纳

$$Y_0 = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

当 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 输入导纳才具有最小值 $Y_0 = \frac{CR}{L}$ 。若 $R=0$, $Y_0=0$, 则等效一条开路线。

② 当输入电流 I_s 一定时, 在 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 输出电压最大

$$U_0 = \frac{L}{CR} I_s$$

③ 电容电流 $I_{C0} = jQI_s$, 电感电流 $I_{L0} = I_s - jQI_s$, 当 $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, $Q \gg 1$, 则 $I_{L0} = -jQI_s$, 电容电流与电感电流大小相等, 相位相反。并联谐振亦称电流谐振。

(3) 由纯电感和纯电容组成的串并联电路的谐振

由 LC 组成的串联电路, 端口的人端阻抗

$$Z(j\omega) = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

令 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 若 $\omega < \omega_0$, $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$, 电路呈容性。若 $\omega > \omega_0$, $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$, 电路呈感性。

当 $\omega = \omega_0$, 发生串联谐振, $Z(j\omega) = 0$, 电路相当于短路。

由 LC 组成的并联电路, 端口的人端导纳

$$Y(j\omega) = j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

令 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 若 $\omega < \omega_0$, $\omega C - \frac{1}{\omega L} < 0$, 电路呈感性; 若 $\omega > \omega_0$, $\omega C - \frac{1}{\omega L} > 0$, 电路呈容性。

当 $\omega = \omega_0$, 发生并联谐振, $Y(j\omega) = 0$, 电路相当于开路。

如图 2.1.9 所示简单串并联电路, 可以看出当

$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$ 时, L_2 和 C 发生并联谐振, 由于 L_1 与

$L_2 C$ 电路串联, 整个电路相当于开路。当 $\omega > \omega_{01}$ 时 de 端电路呈容性, L_1 与 $L_2 C$ 可以发生串联谐振。

$$Z(j\omega) = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 (-j \frac{1}{\omega C})}{j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

当 $\omega_{02} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$ 时, $Z(j\omega) = 0$, 整个电路相当于短路。当然对 ab 端而言, $\omega = 0$ 也可视为一个串联谐振频率。

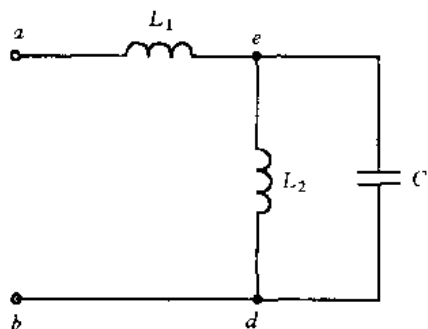


图 2.1.9 两电感和一个电容组成的谐振电路

(4) 串、并联谐振电路的频率特性

正弦电流电路中电流、电压、阻抗、导纳等物理量随频率变化的特性称为频率特性。这些量的模和辐角与频率的关系又分别称为幅频特性和相频特性。例如 RLC 串联谐振电路中, 阻抗的频率特性、幅频特性、相频特性分别为

$$Z(j\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R[1 + jQ(\eta - \frac{1}{\eta})]$$

$$Z(\omega) = R \sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan Q(\eta - \frac{1}{\eta})$$

式中 $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ 。若作出它们随频率变化的曲线称为谐振曲线。

为了通用性和分析比较不同电路频率特性问题的方便,一般采用归一化处理,得到归一化幅频特性等。如 RLC 串联电路中电流

$$\frac{I(\omega)}{I_0(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}}$$

式中 $I_0(\omega_0)$ 为谐振时电路中电流。图 2.1.10 给出不同 Q 值电路的幅频特性曲线,亦称通用谐振曲线。可见,回路 Q 值越高,曲线在谐振点附近形状越尖锐,稍微偏离谐振频率,电流就急剧下降,说明电路对非谐振频率具有较强的抑制能力,这时选择性能好。我们用通频带来说明信号衰减不低于规定值的条件下,电路允许信号通过的频率范围。当 $\frac{I(\omega)}{I_0(\omega_0)}$ 的值不小于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,所对应频率区间

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{或} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

由此可见,谐振电路的通频带与 Q 值成反比。

对 RLC 并联电路中电压

$$\frac{U(\omega)}{U_0(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}}$$

它与 RLC 串联电路中 $\frac{I(\omega)}{I_0(\omega_0)}$ 的形式相同,其幅频特性曲线与图 2.1.10 相同。

2.1.2 典型题解析

例 2.1.1 已知 $i_1(t) = 0.707\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)$ A, $i_2(t) = 0.424\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)$ A 试求 $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

解 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 均为同频率正弦量,可以应用相量法求 $i(t)$ 。由于 $i_1(t)$ 是用余弦函数形式, $i_2(t)$ 是用正弦函数形式,必须统一起来。我们采用 \cos 函数形式

$$\begin{aligned} i_2(t) &= 0.424\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ - 90^\circ) \\ &= 0.424\sqrt{2}\cos(\omega t - 30^\circ) \end{aligned}$$

将正弦量用对应的相量表示并求相量和

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.707 \angle 45^\circ \text{ A} \quad I_2 = 0.424 \angle -30^\circ \text{ A} \\ I &= I_1 + I_2 = 0.707 \angle 45^\circ + 0.424 \angle -30^\circ \\ &= (0.5 + j0.5) + (0.367 - j0.212) \\ &= 0.867 + j0.288 = 0.914 \angle 18.4^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

将 I 写成它所对应的正弦量

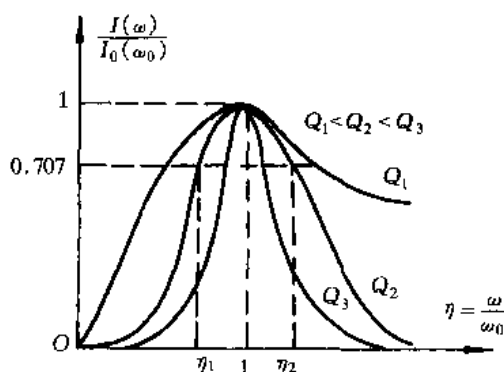


图 2.1.10 串联谐振电路的通用曲线

$$i(t) = 0.914\sqrt{2}\cos(\omega t + 18.4^\circ) \text{ A}$$

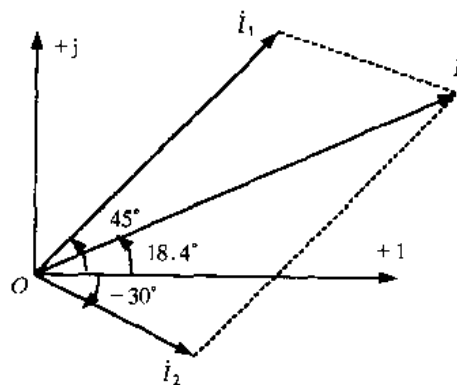
其相量图如例图 2.1.1 所示。

例 2.1.2 有一电感线圈,电阻 $R = 7.5 \Omega$, 电感 $L = 6 \text{ mH}$, 该线圈与一个 $C = 5 \mu\text{F}$ 的电容相串联, 如例图 2.1.2(a) 所示。若电流源的电流 $i_s = 0.1\sqrt{2}\cos 5000t \text{ A}$, 求: (1) 电流源两端、电感线圈两端、电容两端的电压; (2) 作出电压的相量图。

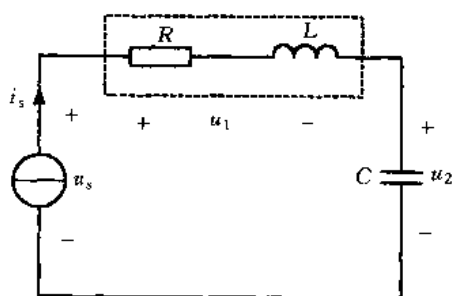
解 先将电流源的电流用对应的相量表示 $I_s = 0.1 \angle 0^\circ \text{ A}$ 。则线圈两端电压

$$\dot{U}_1 = (R + j\omega L) \dot{I}_s = 0.75 + j3 = 3.09 \angle 76^\circ \text{ V}$$

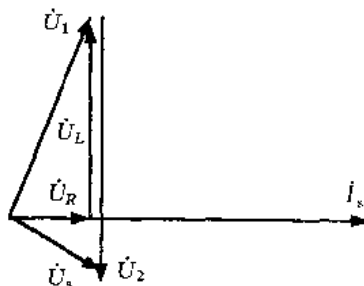
电容两端电压



例图 2.1.1 $I = I_1 + I_2$ 相量图



(a)



(b)

例图 2.1.2

$$\dot{U}_2 = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_s = 4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

电流源两端的电压

$$\dot{U}_s = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0.75 + j3 - j4 = 1.25 \angle -53.1^\circ \text{ V}$$

它们分别对应的正弦量

$$u_1 = 3.09\sqrt{2}\cos(5000t + 76^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 4\sqrt{2}\cos(5000t - 90^\circ) \text{ V}$$

$$u_s = 1.25\sqrt{2}\cos(5000t - 53.1^\circ) \text{ V}$$

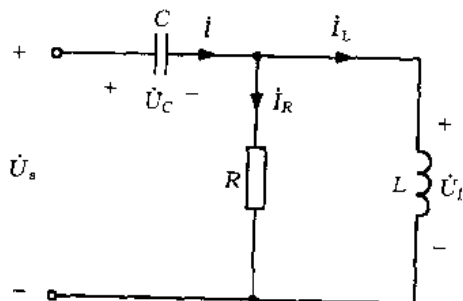
相量图如例图 2.1.2(b) 所示, 串联电路一般选择电流为参考相量。

例 2.1.3 如例图 2.1.3 所示电路, $R = 1 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, 电感 L 上电压 $u_L = 2\sqrt{2}\cos 2t \text{ V}$ 。试求 \dot{U}_C 与 \dot{U}_L 的相位差 $\varphi = ?$

解 将电感上电压 u_L 用其对应的相量表示

$$\dot{U}_L = 2 \angle 0^\circ \text{ V}$$

由此可得电感和电阻上的电流



例图 2.1.3

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L} = 2 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_L}{R} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

由此可得通过电容的电流

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_R = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

由容电压

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \frac{\sqrt{2}}{C} \angle -135^\circ \text{ V}$$

由此可得 \dot{U}_C 落后 \dot{U}_L 135° , 即 $\varphi = -135^\circ$ 。

例 2.1.4 如例图 2.1.4 所示电路中, N_0 为不含独立源的线性电路。已知 $u = 14\cos 10t \text{ V}$, $i = 5 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$ 。试求 N_0 最简单的串联等效电路的元件参数值是多少? 若用并联电路来等效, 其电路的元件参数值又是多少?

解 由题意可知, N_0 一端口处输入阻抗

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{14 \angle 0^\circ}{5 \angle -45^\circ} = 2.8 \angle 45^\circ \quad \Omega = 1.98 + j1.98 \quad \Omega$$

若用 RL 串联电路等效

$$R = 1.98 \quad \Omega \quad L = \frac{1.98}{10} = 0.198 \text{ H}$$

若用 GL' 并联电路等效

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{5 \angle -45^\circ}{14 \angle 0^\circ} = 0.357 \angle -45^\circ \text{ S}$$

$$= 0.2525 - j0.2525 \text{ S}$$

$$G = 0.2525 \text{ S}$$

$$L' = \frac{1}{\omega \times 0.2525} = 0.396 \text{ H}$$

因为 RL 串联电路与 GL' 并联电路均与 N_0 电路等效

$$Z = R + j\omega L = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + \frac{1}{j\omega L'}}$$

由此可知

$$L' \neq L, \quad G \neq \frac{1}{R}; \quad G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \frac{1}{\omega L'} = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

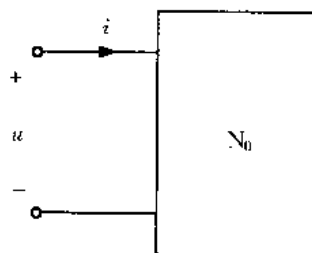
例 2.1.5 例图 2.1.5 所示电路, 求该一端口的人端导纳。

解 图示电路是无独立源又无受控源的线性电路, 可利用电路元件串并联的方法求解阻抗或导纳。 ab 端是 LC 并联电路, 先求导纳

$$Y_{ab} = \frac{1}{j5} + \frac{1}{-j2.5} = j0.2 \text{ S}$$

则

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = -j5 \quad \Omega$$



例图 2.1.4

一端口的入端阻抗 $Z_{in} = 5 - j5 \Omega$

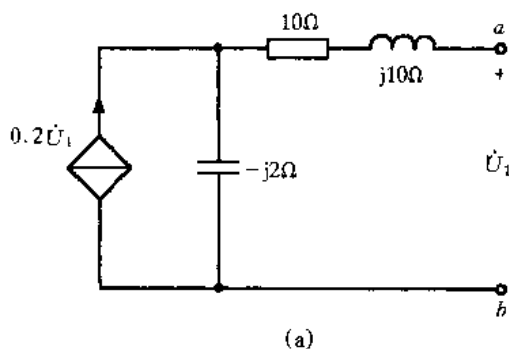
一端口的入端导纳

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{5 - j5} = 0.1 + j0.1 \text{ S}$$

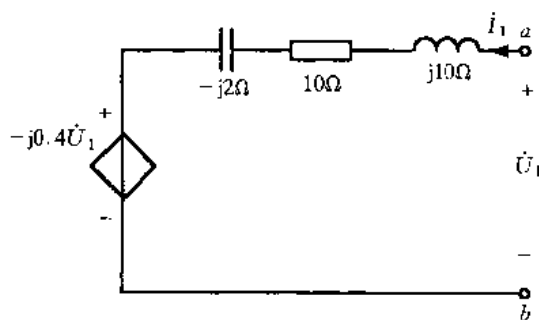
例 2.1.6 例图 2.1.6(a) 所示正弦稳态电路, 试求端口 ab 的输入阻抗。

解 图示电路是无独立源但含受控源的线性电路, 可采用外加电源 \dot{U}_1 , 找出 \dot{U}_1 与端口电流 \dot{I}_1 的关系, 利用

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$$



(a)



(b)

例图 2.1.6

求出输入阻抗。先利用电源等效变换, 将受控电流源与阻抗的并联变为受控电压源与阻抗的串联, 如例图 2.1.6(b) 所示。设电流为 \dot{I}_1 , 则

$$(10 + j10 - j2)\dot{I}_1 - j0.4\dot{U}_1 = \dot{U}_1$$

$$Z_{in} = \frac{10 + j8}{1 + j0.4} = \frac{12.8 \angle 38.66^\circ}{1.077 \angle 21.8^\circ} = 11.88 \angle 16.86^\circ \Omega$$

例 2.1.7 例图 2.1.7 所示正弦稳态电路, 已知: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $I_C = \sqrt{3} I_R$, 要使端口输入电压 \dot{U} 超前电阻 R 处电压 $\dot{U}_R 45^\circ$, 试求: 电感 L 的感抗 $X_L = ?$

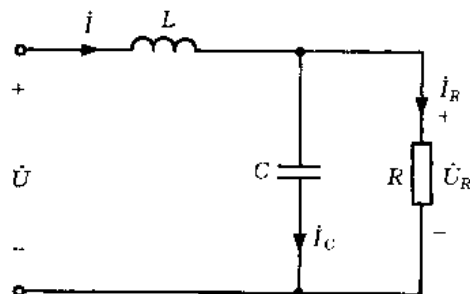
解 电流、电压是相量, 不仅要考虑他们的大小, 还应考虑他们的相位。

$$\text{设 } \dot{U}_R = U_R \angle 0^\circ \text{ V, 则 } \dot{I}_R = \frac{\dot{U}_R}{R} = I_R \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_R = I_C \angle 90^\circ \text{ A}$$

式中 $I_C = \omega C U_R = \sqrt{3} I_R = \sqrt{3} \frac{U_R}{R}$, 由此可得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= jX_L(\dot{I}_R + \dot{I}_C) + \dot{U}_R \\ &= [jX_L(\frac{1}{R} + \frac{\sqrt{3}}{R} \angle 90^\circ) + 1] \dot{U}_R \\ &= \left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}X_L}{R}\right) + j \frac{X_L}{R} \right] \dot{U}_R \end{aligned}$$



例图 2.1.7

要使 \dot{U} 与 \dot{U}_R 相差 45° 且为超前, 则

$$1 - \frac{\sqrt{3}X_L}{R} = \frac{X_L}{R}$$

$$X_L = \frac{R}{1 + \sqrt{3}} = 366 \Omega$$

例 2.1.8 如例图 2.1.8 所示电路, 一个线圈与电阻 R_1 串联。已知 $R_1 = 32 \Omega$, 电压表①的读数为 115 V, 电压表②的读数为 55.4 V, 电压表③的读数为 80 V, 电源的频率为 50 Hz。求: 线圈的电阻 r 和电感 L 。

解 设电阻 R_1 两端电压 $\dot{U}_1 = 55.4 \angle 0^\circ \text{ V}$, 则流过 R_1 处的电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1} = 1.73 \angle 0^\circ \text{ A}$$

线圈两端的电压

$$\dot{U}_2 = (r + j\omega L) \dot{I}$$

由 KVL 可得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$U \angle \varphi = U_1 \angle 0^\circ + U_2 \angle \varphi_2$$

$$U \cos \varphi = U_1 + U_2 \cos \varphi_2$$

$$U \sin \varphi = U_2 \sin \varphi_2$$

代入数值可解得

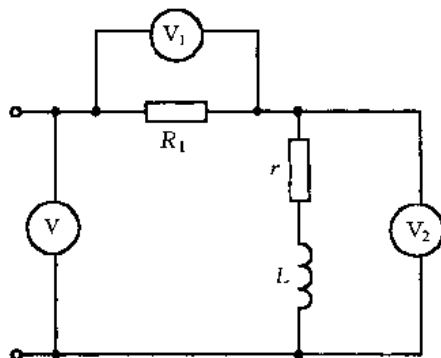
$$\cos \varphi_2 = 0.424 \quad \varphi_2 \approx 65^\circ$$

$$\dot{U}_2 = 80 \angle 65^\circ = 33.92 + j72.45 \text{ V}$$

$$r = \frac{33.92}{1.73} = 19.16 \Omega$$

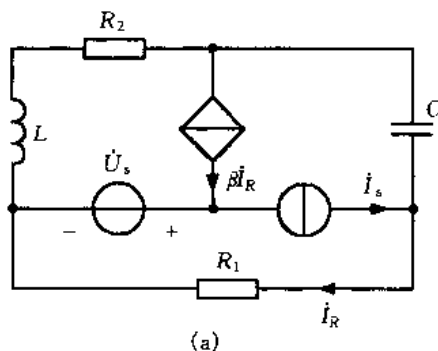
$$\omega L = \frac{72.45}{1.73} = 41.88 \Omega$$

$$L = \frac{41.88}{314} = 0.13 \text{ H}$$

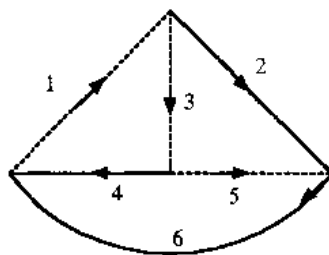


例图 2.1.8

例 2.1.9 例图 2.1.9(a)所示电路中, 已知 $\dot{U}_s = 100 \angle 60^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, $R_1 = 65 \Omega$,



(a)



(b)

例图 2.1.9

$R_2 = 45 \Omega$, $\omega L = 30 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 90 \Omega$, $\beta = 2$, 求 I_R 和电压源 \dot{U}_s 发出的复功率。

解 用回路电流法, 将含有电流源 I_s 和受控电流源 βI_R 的两条支路选作连支, 会给求解带来方便。该电路的拓朴图如例图 2.1.9(b) 所示。选 1, 3, 5 支路为连支, 回路电流的方向就是单连支上电流方向, 列出基本回路方程和控制量与回路电流关系方程为

$$\begin{cases} \dot{I}_3 = \beta \dot{I}_R \\ \dot{I}_5 = I_s \\ [R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \dot{I}_1 - (R_1 - j\frac{1}{\omega C}) \dot{I}_3 + R_1 \dot{I}_5 = 0 \\ \dot{I}_R = \dot{I}_1 + \dot{I}_5 - \dot{I}_3 \end{cases}$$

代入数值得

$$[65 + 45 + j(30 - 90)] \dot{I}_1 - (65 - j90) \dot{I}_3 + 65 \dot{I}_5 = 0$$

$$\dot{I}_5 = 2 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\beta(\dot{I}_1 + 2 \angle 0^\circ)}{1 + \beta}$$

解出

$$\dot{I}_1 = 1.91 \angle -109.85^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_R = 0.75 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_4 = \beta \dot{I}_R - \dot{I}_5 = 1.628 \angle -132.51^\circ \text{ A}$$

\dot{U}_s 发出的复功率

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\dot{U}_s \dot{I}_4^* = -100 \angle 60^\circ \times 1.628 \angle 132.51^\circ \\ &= 158.93 + j35.26 \text{ V} \cdot \text{A} \end{aligned}$$

例 2.1.10 例图 2.1.10 所示正弦稳态电路, 以④结点为参考结点, 分别写出①, ②, ③结点的结点电压方程。

解 先将受控电流源按独立电流源对待, 写出的结点电压方程为

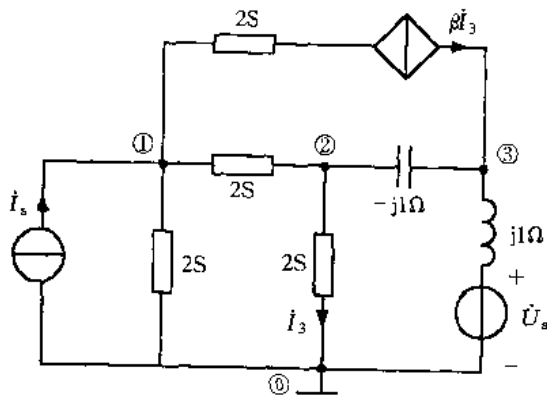
$$\begin{cases} (2+2)\dot{U}_{n1} - 2\dot{U}_{n2} = \dot{I}_s - \beta \dot{I}_3 \\ -2\dot{U}_{n1} + (2+2+\frac{1}{-j1})\dot{U}_{n2} - \frac{1}{-j1}\dot{U}_{n3} = 0 \\ -\frac{1}{-j1}\dot{U}_{n2} + (\frac{1}{-j1} + \frac{1}{j1})\dot{U}_{n3} = \frac{\dot{U}_s}{j1} + \beta \dot{I}_3 \end{cases}$$

将受控源的控制量用结点电压表示

$$\dot{I}_3 = 2\dot{U}_{n2}$$

代入结点电压方程并整理可得

$$\begin{cases} 4\dot{U}_{n1} + 2(\beta-1)\dot{U}_{n2} = \dot{I}_s \\ -2\dot{U}_{n1} + (4+j)\dot{U}_{n2} - j\dot{U}_{n3} = 0 \\ (2\beta+j)\dot{U}_{n2} = j\dot{U}_s \end{cases}$$



例图 2.1.10

例 2.1.11 例图 2.1.11 所示正弦稳态电路。已知 $\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_s = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$ 。求电压源和电流源发出的有功功率。

解 选择结点①为参考结点, 列写出结点电压方程

$$\left(\frac{1}{j2} + \frac{1}{1-j} + \frac{1}{2+j3} \right) \dot{U}_n = \frac{\dot{U}_s}{j2} - \dot{I}_s$$

由此可以求出

$$\begin{aligned} \dot{U}_n &= \frac{5 \angle -90^\circ - 5 \angle 0^\circ}{-j0.5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ + \frac{1}{3.6} \angle -56.31^\circ} \\ &= 10.196 \angle -115.56^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

通过电压源的电流 I_1 参考方向如例图 2.1.11 所示

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_n - \dot{U}_s}{j2} = 8.543 \angle 122.57^\circ \text{ A}$$

电压源和电流源的有功功率为

$$P_1 = U_s I_1 \cos \varphi_1 = 10 \times 8.543 \cos(-122.57^\circ) = -46 \text{ W}$$

$$P_2 = U_n I_s \cos \varphi_2 = 10.196 \times 5 \cos(-115.56^\circ) = -22 \text{ W}$$

负号表示均为发出功率。

例 2.1.12 例图 2.1.12 所示电路中 N_0 为线性非时变无源网络。已知: (1) 当 $\dot{U}_s = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_s = 2 \angle -90^\circ \text{ A}$ 时, $\dot{U}_{ab} = 0$; (2) 当 $\dot{U}_s = 40 \angle 30^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_s = 0$ 时, $\dot{U}_{ab} = 10 \angle 60^\circ \text{ V}$ 。求 $\dot{U}_s = 100 \angle 60^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_s = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$ 时, $\dot{U}_{ab} = ?$

解 因为 N_0 为线性无源网络, 故可用叠加定理求解, 令 $\dot{U}_{ab} = K_1 \dot{U}_s + K_2 \dot{I}_s$, 其中 $K_1 = K_1 \angle \varphi_1$, $K_2 = K_2 \angle \varphi_2$, 由条件(1), (2)分别可列出方程

$$K_1 \angle \varphi_1 \times 20 \angle 0^\circ + K_2 \angle \varphi_2 \times 2 \angle -90^\circ = 0$$

$$K_1 \angle \varphi_1 \times 40 \angle 30^\circ = 10 \angle 60^\circ$$

分别写出上式实部与虚部满足的方程

$$20K_1 \cos \varphi_1 + 2K_2 \cos(\varphi_2 - 90^\circ) = 0$$

$$20K_1 \sin \varphi_1 + 2K_2 \sin(\varphi_2 - 90^\circ) = 0$$

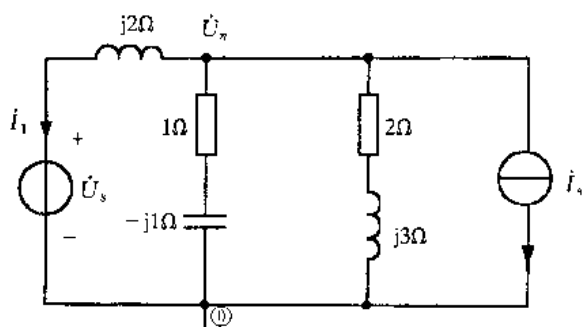
$$40K_1 \cos(\varphi_1 + 30^\circ) = 10 \cos 60^\circ$$

$$40K_1 \sin(\varphi_1 + 30^\circ) = 10 \sin 60^\circ$$

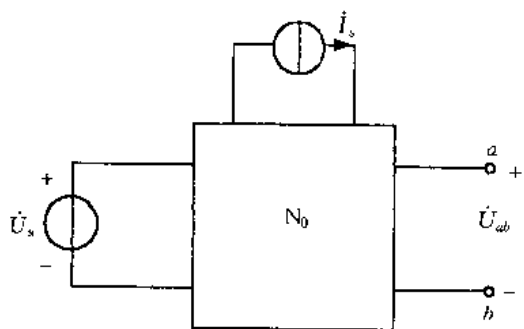
求解方程组可得

$$K_1 = 0.25 \angle 30^\circ \quad K_2 = 2.5 \angle -60^\circ \Omega$$

由此可得给出条件下的 \dot{U}_{ab}



例图 2.1.11



例图 2.1.12

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= 0.25 \angle 30^\circ \times 100 \angle 60^\circ + 2.5 \angle -60^\circ \times 10 \angle 60^\circ \\ &= 25 + j25 \text{ V} = 25\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

例 2.1.13 如例图 2.1.13 所示正弦稳态电路, 已知 $u(t) = 2\cos 10t \text{ V}$, 求电压源的电压 $u_s(t)$ 。

解 此题可用齐性定理求解。设 $u'(t) = \sqrt{2}\cos 10t \text{ V}$, 则对应的相量为 $\dot{U}' = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$, 由此可得

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) \dot{U}' = (1 + j) \dot{U}'$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= j\omega L \dot{I}_1 + \dot{U}' = j2(1 + j) \dot{U}' + \dot{U}' \\ &= (-1 + j2) \dot{U}'\end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + j\omega C \dot{U}_{ab} = (1 + j) \dot{U}' + j(-1 + j2) \dot{U}' = -\dot{U}'$$

$$\dot{U}'_s = R\dot{I}_2 + \dot{U}_{ab} = -\dot{U}' + (-1 + j2) \dot{U}' = (-2 + j2) \dot{U}' = 2\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$$

现在 $u(t) = 2\cos 10t \text{ V}$, 即 $\dot{U} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ 较 \dot{U}' 扩大了 K 倍

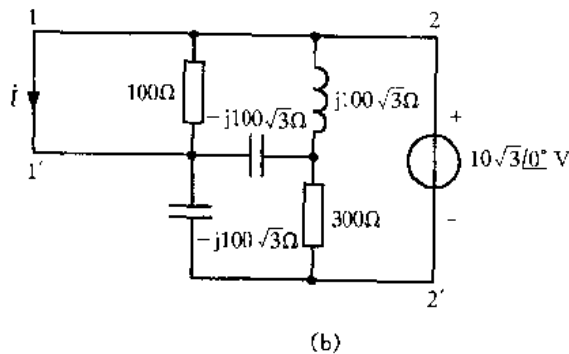
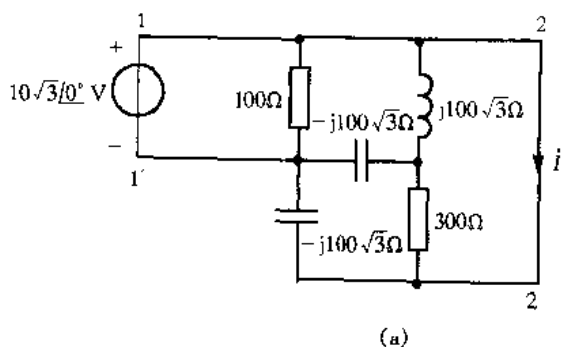
$$K = \frac{\dot{U}}{\dot{U}'} = \sqrt{2} \angle 0^\circ$$

由此可得

$$\dot{U}_s = K\dot{U}'_s = 4 \angle 135^\circ \text{ V}$$

$$u_s(t) = 4\sqrt{2}\cos(10t + 135^\circ) \text{ V}$$

例 2.1.14 例图 2.1.14(a) 所示正弦稳态电路, 求图示电路中 i 。



例图 2.1.14

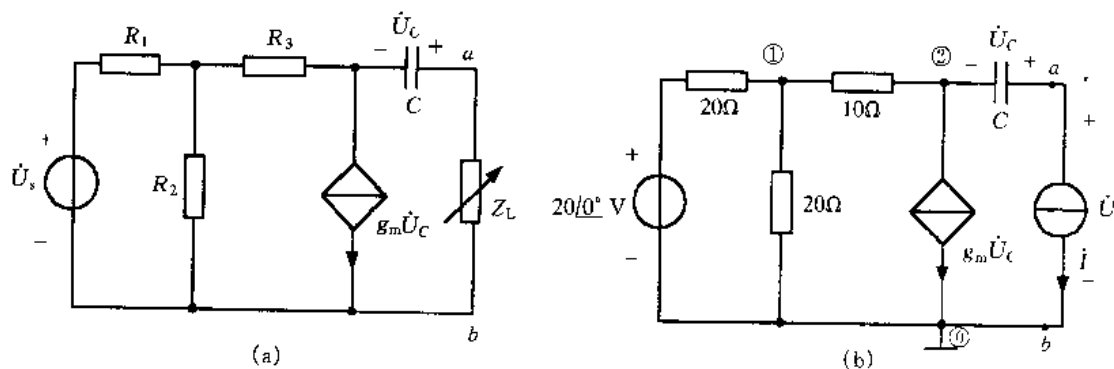
解 此题可采用互易定理求解。已知 $1-1'$ 端口接电压源 \dot{U}_s , 要求 $2-2'$ 端口处短路电流 i , 可在 $2-2'$ 端口接电压源 \dot{U}_s , 则在 $1-1'$ 端处的短路电流也是 i 。如例图 2.1.14(b) 所示, 由于 $1-1'$ 短路, 100Ω 电阻被短接而不起作用。电感与一个电容并联再与 300Ω 电阻串联后, 再与另一个电容并联。而电感 $j100\sqrt{3} \Omega$ 与电容 $-j100\sqrt{3} \Omega$ 并联处在谐振状态, 相当于开路, 则通过 300Ω 电阻的电流等于零。然而通过两电容的电流都不等于零, 且两电容上的电压均

为 $10\sqrt{3}\angle 0^\circ$ V, 由此可得

$$I = 2 \times \frac{10\sqrt{3}\angle 0^\circ}{-j100\sqrt{3}} = 0.2\angle 90^\circ \text{ A}$$

流过题目要求的 $2-2'$ 端口的短路电流为 $0.2\angle 90^\circ$ A。

例 2.1.15 例图 2.1.15(a) 所示正弦稳态电路。已知 $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $C = 250\ \mu\text{F}$, $g_m = 0.025\ \text{S}$, $\dot{U}_s = 20\angle 0^\circ\ \text{V}$, $\omega = 100\ \text{rad/s}$ 。请问 Z_L 为何值时, Z_L 可从电路中获取最大功率, 并求 P_{\max} ?



例图 2.1.15

解 先求例图 2.1.15(a) 中 ab 左端电路的等效戴维宁电路。在 ab 端去掉 Z_L , 联接电流源 I , 设电流源两端电压为 \dot{U} , 参考方向如例图 2.1.15(b) 所示。以①为参考结点, 建立①, ②结点的电压方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right)\dot{U}_{n1} - \frac{1}{10}\dot{U}_{n2} &= \frac{20\angle 0^\circ}{20} \\ -\frac{1}{10}\dot{U}_{n1} + \frac{1}{10}\dot{U}_{n2} &= -0.025\dot{U}_C - I \end{aligned}$$

整理后可得

$$\begin{aligned} 0.2\dot{U}_{n1} - 0.1\dot{U}_{n2} &= 1\angle 0^\circ \\ -0.1\dot{U}_{n1} + 0.1\dot{U}_{n2} &= -0.025\dot{U}_C - I \end{aligned}$$

其中

$$\dot{U}_C = -\frac{I}{j\omega C} = j40I$$

求解以上三个方程可得

$$\dot{U}_{n2} = 10\angle 0^\circ - 20\sqrt{2}\angle 45^\circ I = 10\angle 0^\circ - (20 + j20)I$$

电流源两端电压为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_{n2} + \dot{U}_C = 10\angle 0^\circ - (20 + j20)I + j40I \\ &= 10\angle 0^\circ - 20\sqrt{2}\angle -45^\circ I \end{aligned}$$

由此可得等效戴维宁电路

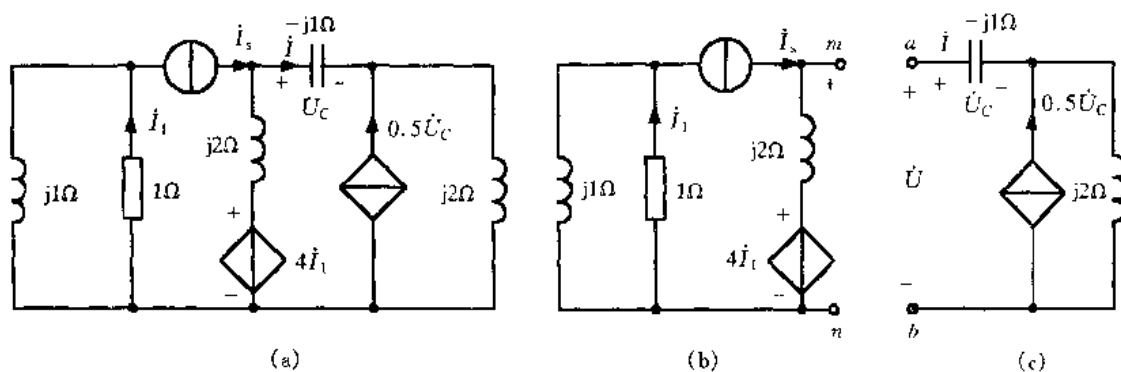
$$\dot{U}_\infty = 10\angle 0^\circ \text{ V} \quad Z_{eq} = 20\sqrt{2}\angle -45^\circ \ \Omega$$

要使 Z_L 可获得最大功率 $Z_L = Z_{eq}^* = 20\sqrt{2}\angle 45^\circ \ \Omega$

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{100}{4 \times 20} = 1.25 \text{ W}$$

此题也可利用求解 ab 端开路电压 U_{oc} 和短路电流 I_{sc} , 再利用 $Z_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$ 也可求出等效戴维宁电路。

例 2.1.16 请用戴维宁定理求图 2.1.16(a) 电路中的电流相量 I 。已知 $I_s = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$ 。



例图 2.1.16

解 要求流过电容的电流, 但不能将电容 C 拿开求其端口的等效戴维宁电路, 这是因为电容的电压 U_C 是受控电源的控制量。因此只能从电路中断开, 将电路分成两部分, 但每部分中受控源与控制量必须在同一部分内。我们在 ab, mn 处端开电路如例图 2.1.16(b)(c) 所示。

右边的电路是不含独立源的线性电路, 其端口 ab 等效一个阻抗 $Z_{eq}^{(1)}$ 。假设在 ab 端口处外加电压源 \dot{U} , 端口电流 I

$$\dot{U} = -jI + j2(I + 0.5\dot{U}_C)$$

其中 $\dot{U}_C = -jI$

$$\dot{U} = (1+j)I$$

$$Z_{eq}^{(1)} = \frac{\dot{U}}{I} = 1+j \Omega$$

对左边电路先求端口 mn 处开路电压

$$I_1 = \frac{j}{1+j} I_s = \frac{j5}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{oc}^{(2)} = j2I_1 + 4 \times \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 10 + j20 \text{ V}$$

再求端口 mn 处短路电流

$$I_{sc}^{(2)} = I_s + \frac{4I_1}{j2} = 5 \angle 0^\circ + \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 10 - j5 \text{ A}$$

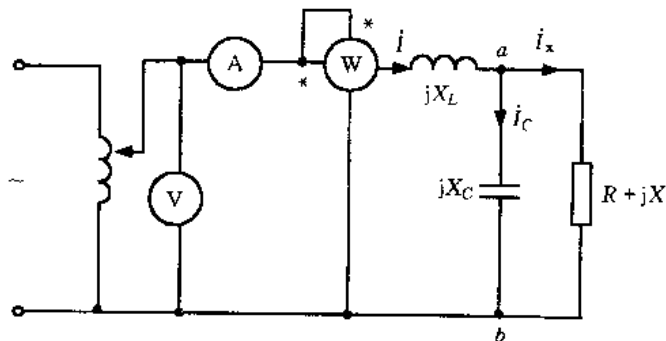
由此可得左边电路等效戴维宁电路

$$\dot{U}_{oc}^{(2)} = 10 + j20 \text{ V} \quad Z_{eq}^{(2)} = \frac{\dot{U}_{oc}^{(2)}}{I_{sc}^{(2)}} = \frac{10 + j20}{10 - j5} = j2 \Omega$$

将两个等效电路端口 ab 与 mn 联起来可得

$$i = \frac{\dot{U}_{\infty}}{Z_{eq}^{(1)} + Z_{eq}^{(2)}} = \frac{10 + j20}{1 + j + j2} = \frac{22.36 \angle 63.43^\circ}{3.16 \angle 71.57^\circ} = 7.07 \angle -8.14^\circ \text{ A}$$

例 2.1.17 例图 2.1.17 所示正弦稳态电路。已知电压表的读数为 200 V, 电流表的读数 0.1 A, 瓦特表的读数 12 W, 电路呈感性。已知 $X_L = 2500 \Omega$, $X_C = -1500 \Omega$ 。求未知阻抗的电阻 R 和电抗 X , 并说明未知阻抗是感性还是容性。



例图 2.1.17

解 令 $\dot{U} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$, 由已知条件 $I = 0.1 \angle \varphi \text{ A}$

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = 0.6$$

电路呈感性

$$\varphi = 53.1^\circ > 0$$

$$I = 0.1 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

ab 端电压为

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - jX_L I = 200 \angle 0^\circ - j2500 \times 0.1 \angle -53.1^\circ = -j150 \text{ V}$$

通过电容的电流

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{ab}}{jX_C} = \frac{-j150}{-j1500} = 0.1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

通过未知阻抗的电流

$$\begin{aligned} \dot{I}_r &= I - \dot{I}_C = 0.1 \angle -53.1^\circ - 0.1 \angle 0^\circ \\ &= 0.06 - j0.08 - 0.1 = -0.04 - j0.08 \\ &= 0.0894 \angle -116.56^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

由此可以得出未知阻抗

$$Z = \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}_r} = \frac{-j150}{0.0894 \angle -116.56^\circ} = 1677.85 \angle 26.56^\circ \Omega$$

$$R = 1500 \Omega \quad X = 750 \Omega \quad (\text{感性})$$

此题也可利用电路的复功率求解。由于已知 $P = 12 \text{ W}$, 故电路的无功功率

$$Q = P \tan \varphi = 12 \tan 53.1^\circ = 16 \text{ var}$$

X_L 的无功功率

$$Q_L = X_L I^2 = 2500 \times (0.1)^2 = 25 \text{ var}$$

X_C 的无功功率

$$Q_C = \frac{U_{ab}^2}{X_C} = -15 \text{ var}$$

由此可知未知阻抗的有功功率和无功功率

$$P_Z = 12 \text{ W} \quad Q_Z = Q - (Q_L + Q_C) = 6 \text{ var}$$

设未知阻抗

$$Z = R + jX$$

$$\tilde{S}_Z = \frac{U_{ab}^2}{Z^*} = \frac{U_{ab}^2}{R - jX} = 150^2 \left(\frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2} \right) = 12 + j6 \text{ V} \cdot \text{A}$$

由此可以得出

$$R = 1500 \Omega, \quad X = 750 \Omega$$

例 2.1.18 例图 2.1.18 所示电路中, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $I = 1 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$, 电流 \dot{I} 超前电压 \dot{U} 36.87° 。求感抗 X_L 和容抗 X_C 。

解 由于流过电阻 R_1 , R_2 的电流已知, 电路消耗的有功功率

$$P = I^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 6 \times 1^2 + 2 \times 3^2 = 24 \text{ W}$$

由于阻抗角 $\varphi = -36.87^\circ$, 则电源的无功功率为

$$Q = P \tan \varphi = 24 \tan(-36.87^\circ) = -18 \text{ var}$$

电路 ab 端的复功率

$$\tilde{S}' = P + jQ - I^2 R_1 = 24 - j18 - 6 = 18 - j18 = 18\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V} \cdot \text{A}$$

ab 端的并联导纳

$$Y = \frac{1}{jX_C} + \frac{1}{R_2 + jX_L} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} - j \left[\frac{1}{X_C} + \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} \right]$$

$$\tilde{S}' = \frac{I^2}{Y}$$

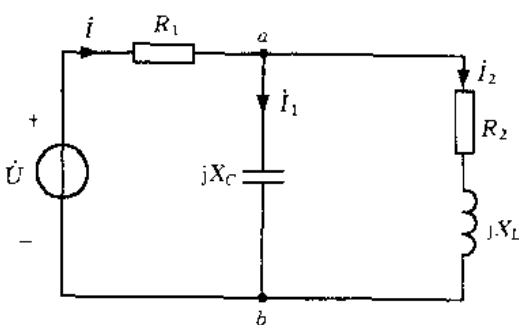
$$Y = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} - j \left[\frac{1}{X_C} + \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} \right] = \frac{1}{18\sqrt{2}} \angle 45^\circ = \frac{1}{36} + j \frac{1}{36} \text{ S}$$

代入数字可得

$$X_L = 8.246 \Omega, \quad X_C = -7.027 \Omega$$

例 2.1.19 例图 2.1.19 电路中, 端口处电压 \dot{U} 超前电流 \dot{I} 60° , 已知 $U_1 = 50 \text{ V}$, $U_{ab} = 100 \text{ V}$, $\omega L = 25 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 50 \Omega$ 。求 (1) 负载阻抗 $Z = ?$, (2) 在保证电路消耗功率不变的条件下要使电路的功率因数提高到 0.8, 则合上开关 S , 并联电容的容抗 $X_C = ?$

解 (1) 电容 C 与 L 并联阻抗



例图 2.1.18

$$Z_1 = \frac{j\omega L \times (-j\frac{1}{\omega C})}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{j25 \times (-j50)}{j25 - j50} = j50 \Omega$$

若令 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$, $\dot{U}_1 = 50 \angle \varphi_1^\circ$, 则

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{50 \angle \varphi_1^\circ}{50 \angle 90^\circ} = 1 \angle \varphi_1 - 90^\circ \text{ A}$$

$$\varphi_1 = 90^\circ, I = 1 \text{ A}$$

由已知条件 $\dot{U} = U \angle 60^\circ$, 设 $\dot{U}_{ab} = 100 \angle \varphi_z$ 则

$$U \cos 60^\circ = 100 \cos \varphi_z$$

$$U \sin 60^\circ = 50 + 100 \sin \varphi_z$$

解此方程可得

$$U = 140.12 \text{ V}, \quad \varphi_z = 45.52^\circ$$

$$|Z| = \frac{U_{ab}}{I} = 100$$

$$Z = 100 \angle 45.52^\circ = 70 + j71 \Omega$$

(2) 要使电路消耗的功率不变, 即要求负载阻抗端电压 $U_{ab} = 100 \text{ V}$ 不变。为了计算的方便, 我们令 \dot{U}_{ab} 为参考相量

$$\dot{U}_{ab} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

流过 Z 的电流

$$\dot{I}_Z = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{100 \angle 45.52^\circ} = 1 \angle -45.52^\circ \text{ A}$$

流过 X_C 的电流

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{ab}}{-jX_C} = j \frac{U_{ab}}{X_C} = j \frac{100}{X_C} \text{ A}$$

这时电流 \dot{I} 可写为

$$\dot{I} = \dot{I}_Z + \dot{I}_C = 1 \angle -45.52^\circ + j \frac{100}{X_C} = 0.7 + j \left(\frac{100}{X_C} - 0.71 \right)$$

$$I = \sqrt{(0.7)^2 + \left(\frac{100}{X_C} - 0.71 \right)^2}$$

整个电路中各部分的功率分别为

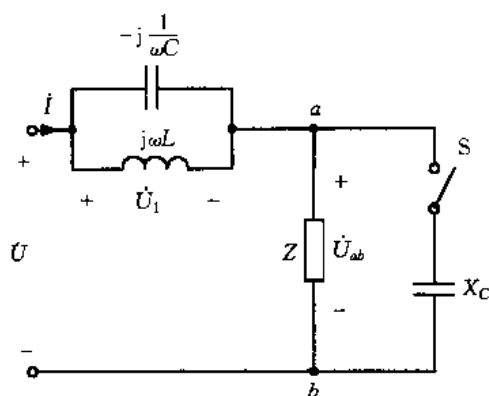
$$P_Z = RI_Z^2 = 70 \times 1^2 = 70 \text{ W}$$

$$Q_Z = XI_Z^2 = 71 \times 1^2 = 71 \text{ var}$$

$$Q_C = -\frac{U_{ab}^2}{X_C} = -\frac{10\,000}{X_C}$$

$$Q_1 = \text{Im}[Z_1 I_Z^2] = 50 \left[(0.7)^2 + \left(\frac{100}{X_C} - 0.71 \right)^2 \right]$$

整个电路的复功率



例图 2.1.19

$$\tilde{S} = P_Z + j(Q_Z + Q_C + Q_L)$$

整个电路的功率因数为 $\cos\varphi$

$$\tan\varphi = \frac{Q_Z + Q_C + Q_L}{P}$$

当功率因数 $\cos\varphi = 0.8$ 时 $\tan\varphi = 0.75$

$$0.75 = \frac{71 - \frac{10\,000}{X_C} + 50 \left[(0.7)^2 + \left(\frac{100}{X_C} - 0.71 \right)^2 \right]}{70}$$

整理后可得

$$68.2X_C^2 - 17\,100X_C + 5 \times 10^5 = 0$$

$$X_{C1} = 216.9\,\Omega \quad X_{C2} = 33.79\,\Omega$$

从工程上看,应选择电容量小的解,故选择

$$X_C = 216.9\,\Omega$$

例 2.1.20 例图 2.1.20 所示正弦稳态电路。

已知 $u_s = 8\sqrt{2}\cos\omega t$ V, $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $L_1 = 1$ H, $C_1 = 1\,\mu\text{F}$, $C_2 = 250\,\mu\text{F}$, $i_1 = 0$, 电压 u_s 与电流 i 同相位。求: (1) 电感 L_2 的数值; (2) 电流 $i_{C_1} = ?$

解 因为 $i_1 = 0$, L_1 与 C_1 并联谐振, 由此可知输入激励角频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

由已知条件 u_s 与 i 同相位, L_2 与 C_2 串联谐振, 电路输入阻抗

$$Z = R_1 + R_2 = 4\,\Omega$$

$$L_2 = \frac{1}{\omega^2 C_2} = 4 \text{ mH}$$

电路电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z} = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

ab 端的电压

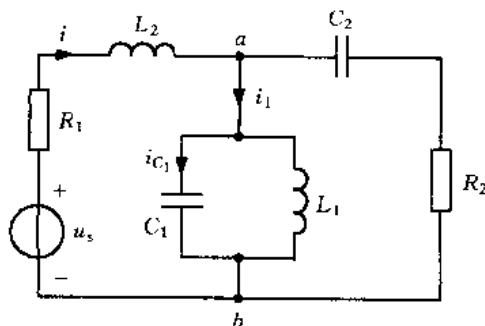
$$\dot{U}_{ab} = (R_2 - j\frac{1}{\omega C_2})\dot{I} = (3 - j4)\dot{I} = 10 \angle -53.1^\circ \text{ V}$$

流过电容 C_1 的电流

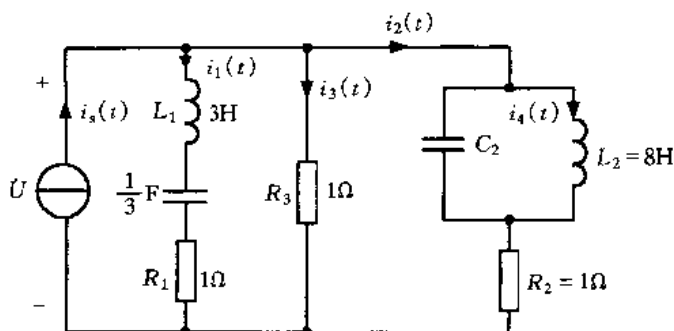
$$\dot{I}_{C_1} = j\omega C_1 \dot{U}_{ab} = j10^3 \times 10^{-6} \times 10 \angle -53.1^\circ = 10 \angle 36.9^\circ \text{ mA}$$

$$i_{C_1} = 10\sqrt{2}\cos(10^3 t + 36.9^\circ) \text{ mA}$$

例 2.1.21 例图 2.1.21 所示正弦电流电路, 已知 $i_s(t) = \sin t$ A, $i_2(t) = 0$, 求 C_2 , $i_1(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$ 以及 $i_s(t)$ 电流源发出的平均功率 P 和 3 H 电感的无功功率 Q 。



例图 2.1.20



例图 2.1.21

解 因为 $i_2(t)=0$, 可知 L_2C_2 并联谐振

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \quad C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_2} = \frac{1}{8} \text{ F}$$

又因为 $L_1=3 \text{ H}$ 与 $C_1=\frac{1}{3} \text{ F}$ 对 $\omega=1 \text{ rad/s}$ 发生串联谐振, 由此可知 R_1 与 R_3 并联, 故电流源两端电压

$$\dot{U} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \dot{I}_s = 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}}{R_3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}}{j\omega L_2} = 0.0442 \angle -90^\circ \text{ A}$$

由此可写出相量对应的正弦量

$$i_1(t) = 0.5 \sin t \text{ A}$$

$$i_3(t) = 0.5 \sin t \text{ A}$$

$$i_4(t) = 0.0442 \times \sqrt{2} \sin(t - 90^\circ) \text{ A}$$

进一步求 $i_s(t)$ 的平均功率和 3 H 电感的无功功率

$$P_s = I_s U \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.25 \text{ W}$$

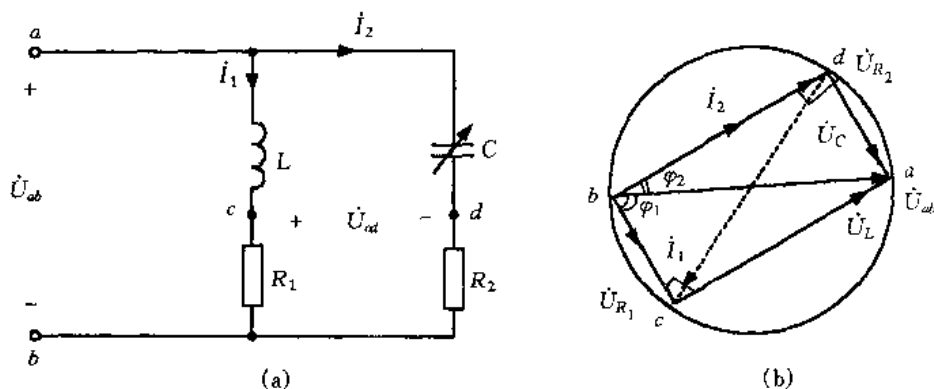
$$Q_L = \omega L_1 I_1^2 = 3 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3}{8} = 0.375 \text{ var}$$

例 2.1.22 例图 2.1.22(a) 所示正弦电流电路, 已知 $R_1=1 \text{ k}\Omega$, $R_2=2 \text{ k}\Omega$, $L=1 \text{ H}$, 求要使输出电压 \dot{U}_{cd} 的有效值等于输入电压 \dot{U}_{ab} 的有效值, 电容 C 等于何值。

解 此题配合相量图使求解更加方便。令 $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ab} \angle 0^\circ$ 为参考相量, 电流 \dot{I}_1 落后 \dot{U}_{ab} 相位角 φ_1 , 电流 \dot{I}_2 超前 \dot{U}_{ab} 相位角 φ_2 , 由 KVL

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_L = \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_C$$

作出相量图如例图 2.2.22(b) 所示。由于 \dot{U}_{R_1} 与 \dot{I}_1 同相位, \dot{U}_L 超前 \dot{I}_1 90° 。同样 \dot{U}_{R_2} 与 \dot{I}_2 同相位, 而 \dot{U}_C 落后 \dot{I}_2 90° , 故 $abcd$ 四点共圆。由此可以看出要使 $U_{ab} = U_{cd}$, 则 $abcd$ 四点要为



例图 2.1.22

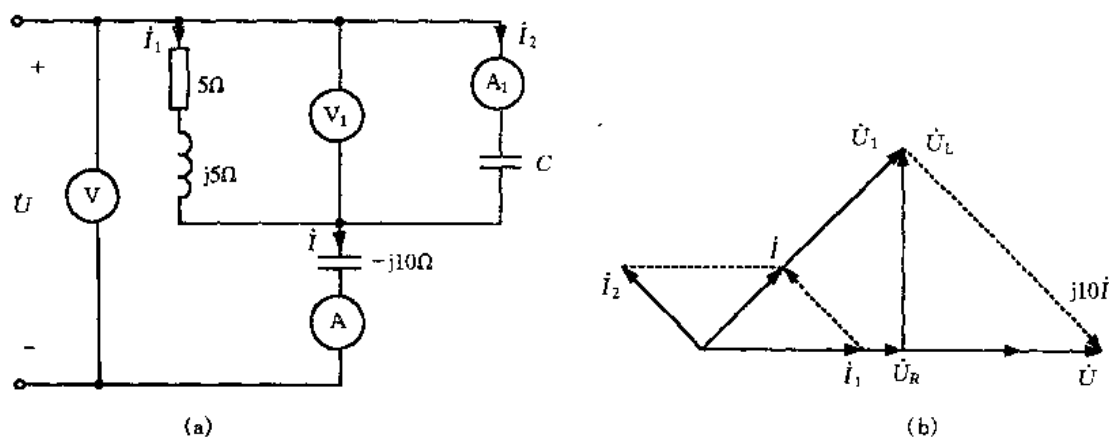
矩形, 则 $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$, $\tan\varphi_1 = \frac{1}{\tan\varphi_2}$ 。

$$\text{因为 } \tan\varphi_1 = \frac{\omega L}{R_1} \quad \tan\varphi_2 = \frac{1}{\omega R_2 C}$$

$$\text{所以 } \frac{\omega L}{R_1} = R_2 \omega C \quad C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0.5 \mu\text{F}$$

当 C 满足上述条件时, 若 $\omega = 0$, $\dot{U}_{cd} = \dot{U}_{ab}$ 不仅有效值相等, 且相位相同。若 $\omega = \infty$, 则 $\dot{U}_{cd} = -\dot{U}_{ab}$, 输出电压与输入电压反相。若 $0 < \omega < \infty$ 时, 输出电压与输入电压的相位在 $0 < \varphi < \pi$ 的范围内变化, 此电路又称为“移相器”。

例 2.1.23 例图 2.1.23(a) 所示电路中, 电流表 \textcircled{A} 的读数为 10 A, 电压表 \textcircled{V} 的读数为 100 V。试求电压表 \textcircled{V}_1 和电流表 \textcircled{A}_1 的读数。



例图 2.1.23

解 利用相量图帮助计算。设流过 RL 支路电流为参考相量 $\dot{I}_1 = I_1 \angle 0^\circ$, 电阻电压 $\dot{U}_R = 5I_1 \angle 0^\circ$ 与 \dot{I}_1 同相位, $\dot{U}_L = j5I_1 \angle 0^\circ$ 超前 $\dot{I}_1 90^\circ$ 。由于 $|\dot{U}_R| = |\dot{U}_L|$, 故可知

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_R + \dot{U}_L = (5 + j5)\dot{I}_1 = 100 \angle 45^\circ \text{ V}$$

由此可得

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{5+j5} = 10\sqrt{2}\angle 0^\circ \text{ A}$$

④电流表所在支路为纯电容元件,故支路电流 I_2 将超前电压 $\dot{U}_1 90^\circ$,作出相量图如例图 2.1.23(b)所示

$$\dot{I}_2 = 10\angle 90^\circ + 45^\circ = 10\angle 135^\circ \text{ A}$$

利用 KCL

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\sqrt{2}\angle 0^\circ + 10\angle 135^\circ = 10\angle 45^\circ \text{ A}$$

流过电流表④的读数为 10 A。从相量图中可知电流 \dot{I} 与电压 \dot{U}_1 同相位。电路中电容 $-j10\Omega$ 两端的电压为 $-j10\dot{I}$,由 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 - j10\dot{I} = 100\angle 45^\circ - j100\angle 45^\circ = 100\sqrt{2}\angle 0^\circ \text{ V}$$

由此可得电压表⑤的读数为 $100\sqrt{2}$ 即 141.4 V。

例 2.1.24 例图 2.1.24 所示含运算放大器的正弦稳态电路,电压源 $u_s = 4\cos 2t \text{ V}$,求输出电压 u_o 。

解 令 $\dot{U}_{sm} = 4\angle 0^\circ \text{ V}$,由于输出端与运放 u^- 端相连,故 $\dot{U}_{2m} = \dot{U}_{om}$ 。列写

①,②结点的结点电压方程

$$(2+3+j2)\dot{U}_{1m} - j2\dot{U}_{om} - 3\dot{U}_{om} = 2\dot{U}_{sm}$$

$$-3\dot{U}_{1m} + (3+j2)\dot{U}_{om} = 0$$

由此可以解得

$$\dot{U}_{om} = \frac{12}{1+j5} = 2.353\angle -78.69^\circ \text{ V}$$

$$u_o(t) = 2.353\cos(2t - 78.69^\circ) \text{ V}$$

例 2.1.25 例图 2.1.25 所示正弦稳态电路,求它的输入阻抗 $Z_{in}(j\omega)$ 。

解 设在 ab 端正弦稳态激励 \dot{U}_1 ,角频率为 ω ,端口电流为 \dot{I}_1 。按图示结点符号,列结点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)\dot{U}_1 - \frac{1}{R_2}\dot{U}_3 - j\omega C\dot{U}_2 = \dot{I}_1$$

$$-j\omega C\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C\right)\dot{U}_2 = 0$$

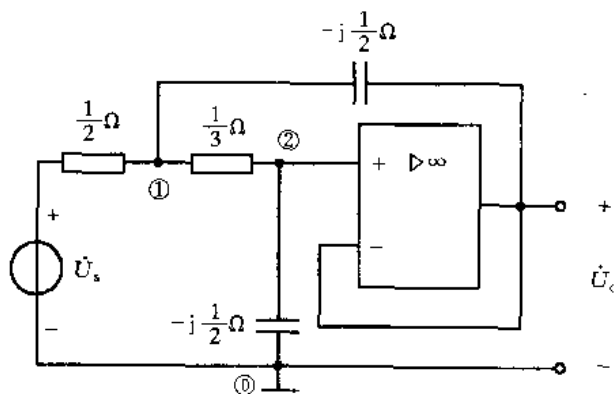
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3$$

解此方程组

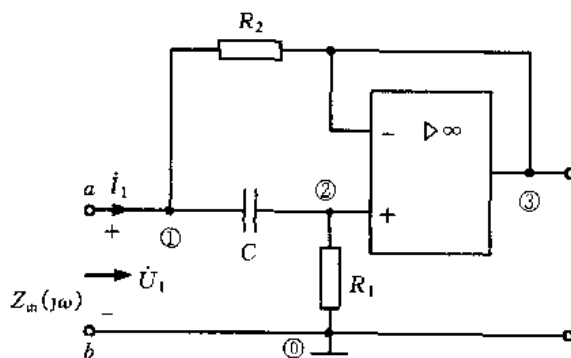
$$\dot{I}_1 = \frac{1+j\omega R_2 C}{R_2(1+j\omega R_1 C)}\dot{U}_1$$

由此可得

$$Z_{in}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{R_2(1+j\omega R_1 C)}{1+j\omega R_2 C}$$



例图 2.1.24



例图 2.1.25

若 $R_1 = R_2$, 则 $Z_m = R_2$ 。

2.2 含耦合电感的电路

2.2.1 理论提要

1. 耦合电感

(1) 耦合电感元件的伏安关系

两个互有磁耦合的线圈, 通过两线圈的磁链分别是

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$

式中 L_1, L_2 为线圈 1, 2 的自感, $M_{12} = M_{21} = M$ 为两线圈的互感。其中

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

$$M = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

互感的单位与自感一样也是 H(亨), 互感与自感的关系用耦合系数 k 表示

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

它反映两线圈耦合松紧的程度。 k 值范围为 $0 \leq k \leq 1$, $k = 1$ 两线圈耦合最好, 称为全耦合。当两线圈中通有随时间变化的电流, 则在两线圈上均有感应电压。若选择每个线圈上电压的参考方向与相应线圈上电流参考方向为关联参考方向, 则

$$u_1(t) = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = \frac{d\psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

式中 $L_1 \frac{di_1}{dt}$, $L_2 \frac{di_2}{dt}$ 是两线圈的自感电压。 $M \frac{di_2}{dt}$, $M \frac{di_1}{dt}$ 是两线圈上的互感电压。为了便于判断线圈上互感电压的正负, 常在线圈某一端用“·”, “*”, “Δ”等给予标记, 以表示对应端子称为同名端。如图 2.2.1 所示。当图 2.2.1(a) 所示, 耦合电感电路, 两线圈中的电流均从同名端流入, 则互感电压取正

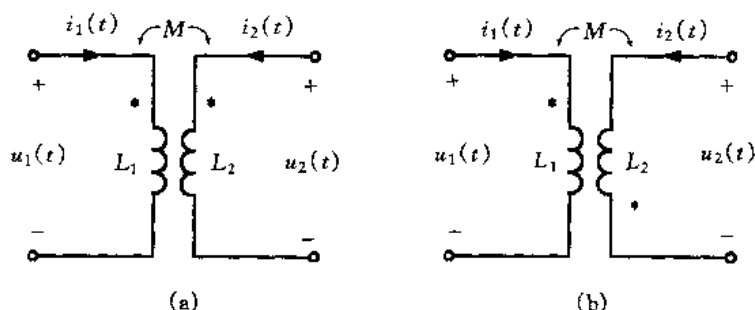


图 2.2.1 耦合电感

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

当如图 2.2.1(b) 所示耦合电感电路, 两线圈中的电流是从异名端流入, 互感电压为负

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

在正弦稳态情况下, 耦合电感的相量形式表达式分别为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$$

若为图 2.2.1(a) 互感电压前取正号, 若为图 2.2.1(b) 互感电压前取负号。

(2) 耦合电感的去耦等效电路

① 耦合电感的串联等效

图 2.2.2(a) 所示的串联的两个互感线圈, 电流从两线圈的同名端流入(或流出), 称为顺串, 端口处电压

$$\begin{aligned}\dot{U} &= j\omega L_1 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I} + j\omega M \dot{I} \\ &= j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \dot{I}\end{aligned}$$

由端口的伏安关系看可等效一个电感

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

图 2.2.2(b) 所示的串联的两个互感线圈, 电流从两线圈的异名端流入(或流出), 称为反串。端口处电压

$$\begin{aligned}\dot{U} &= (j\omega L_1 - j\omega M) \dot{I} + (j\omega L_2 - j\omega M) \dot{I} \\ &= j\omega(L_1 + L_2 - 2M) \dot{I}\end{aligned}$$

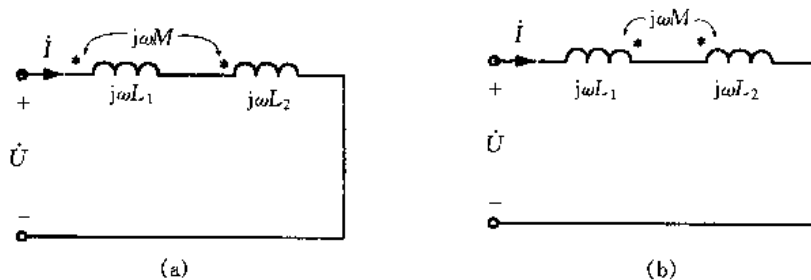


图 2.2.2 耦合电感的串联

从端口的伏安关系看可等效一个电感

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

② 耦合电感的 T 型等效

当耦合电感为有一端相连的三端电路时, 可以用三个无耦合的电感等效。图 2.2.3(a) 所示同名端为共端的 T 型电路, 1-3 端口和 2-3 端口电压分别为

$$\dot{U}_1 = j\omega(L - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega(L - M)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

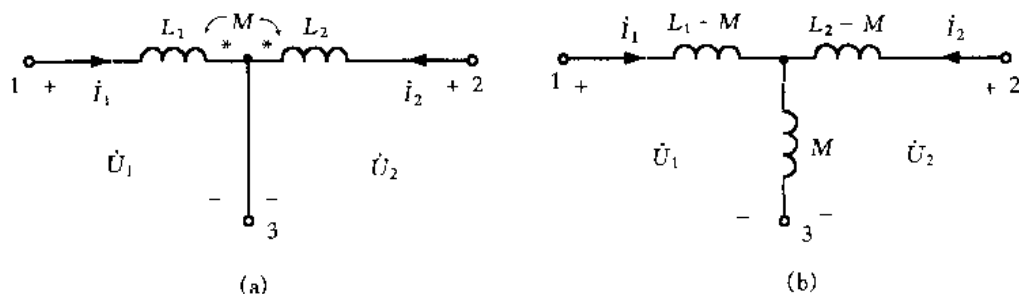


图 2.2.3 同名端共端 T 型去耦等效

其等效电路如图 2.2.3(b)所示。需要注意的是等效电感 $(L_1 - M)$, $(L_2 - M)$ 及 M 相连的结点可能为新增加的结点,在图(a)中可能是不存在的,另外 $(L_1 - M)$, $(L_2 - M)$ 其中某一个可能会是负值。图 2.2.4(a)所示异名端为共端的 T 型电路

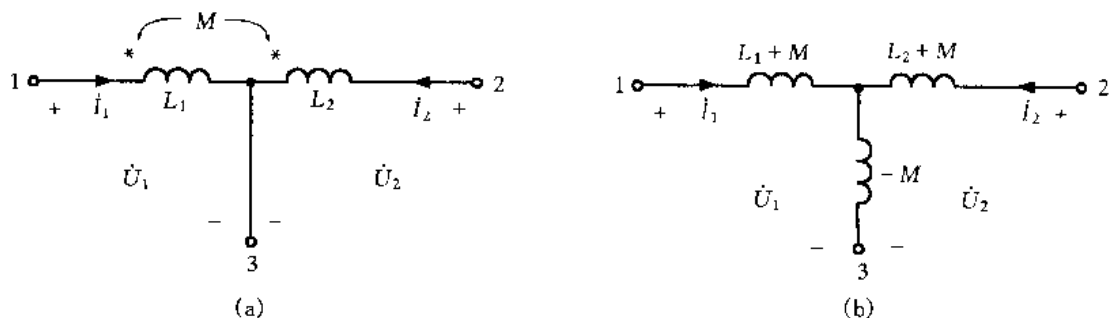


图 2.2.4 异名端共端 T 型去耦等效

$$\dot{U}_1 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 + j\omega(-M)(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 + j\omega(-M)(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

其等效电路如图 2.2.4(b)所示。在图中 3 端子相连支路出现一个负电感 $(-M)$ 。

③ 互感电压用受控源等效代替

如图 2.2.5(a), (b)所示耦合电感电路,可用 CCCVS 的受控源代替支路中的互感电压,所得到的等效去耦电路如图 2.2.5(c), (d)所示。其中(c)为(a)对应的去耦等效电路, (d)为(b)对应的去耦等效电路。

值得注意的是,无论哪种等效方法,都是对端子以外的电压、电流、功率而言。而且其等效元件的参数不但与两耦合线圈的互感系数或自感系数有关,而且还与同名端的位置有关。

2. 含耦合电感电路的分析计算

我们主要研究含耦合电感的正弦稳态电路的分析计算。由于耦合电感上不仅有自感电压,还有互感电压。分析含耦合电感电路的关键是,要在电感电压中计入互感电压,并注意它的极性。在正弦稳态电路中所采用的各种方法,都可用在这里。但含耦合电感电路的分析中也有些特殊性,例如结点法中,所列写的结点电压方程实质是电流方程,不易考虑互感电压,这时可把耦合电感的电流也作为方程变量列写方程,然后增加耦合电感的伏安关系式作为补

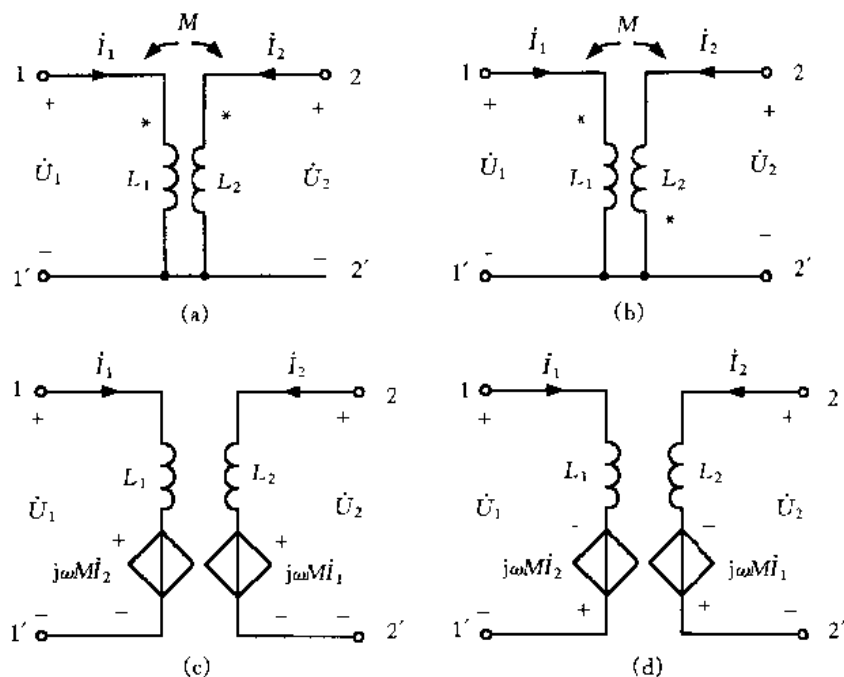


图 2.2.5 受控源去耦等效

充方程,另外在使用戴维宁定理和诺顿定理时,应注意不能将有耦合关系的两电感,分别放置到两个不同的内外网络中。

如果采用去耦等效电路进行分析,耦合电感成了纯电感,就可以用正弦稳态电路中的各种方法去分析计算,因此在分析计算中,去耦等效的方法值得重视。

3. 空心变压器

由两组线圈构成的变压器,与电源相连的线圈为原线圈,与负载相连的线圈为副线圈,其电路如图 2.2.6(a)所示。对电路用回路法求解可得

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}}$$

其中 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$, $Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$, 分别称为原边阻抗和副边阻抗。 $\frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$ 是副边折算到原边的引入阻抗, $\frac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}$ 是原边折算到副边的引入阻抗, $j\omega M \frac{\dot{U}_1}{Z_{11}}$ 是副边的开路电压。由此可得原边等效电路,如图 2.2.6(b)所示。我们可以直接利用原边等效电路计算 I_1 ,再利用

$$\dot{I}_2 = -j \frac{\omega M}{Z_{22}} \dot{I}_1$$

可以求出 I_2 。上式中的负号与原边副边电流参考方向以及耦合电感的同名端均有关。

空心变压器也可应用戴维宁定理,得到在负载 Z_L 处断开的等效戴维宁电路

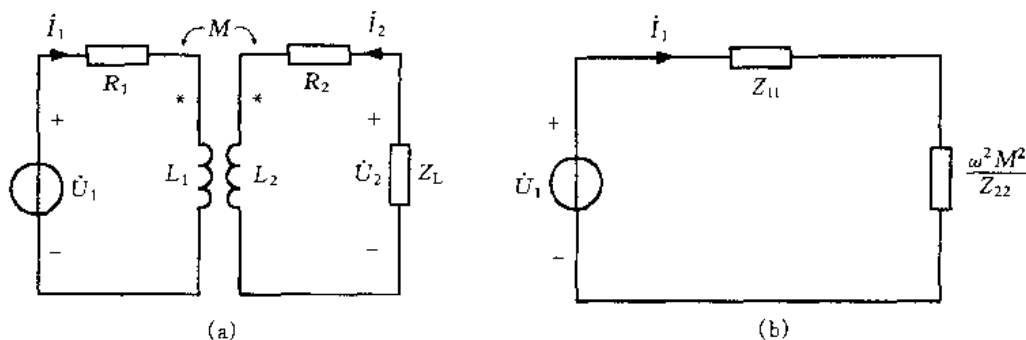


图 2.2.6 空心变压器

$$\dot{U}_{\infty} = j\omega M \dot{I}_{10}$$

\dot{I}_{10} 是副边负载断开时原边电流

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

用输入阻抗法,令原边电压源置零($U_1=0$),可求出从副边负载断开处的入端阻抗

$$Z_{eq} = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}$$

这样可得副边等效电路,如图 2.2.7 所示。利用副边等效电路

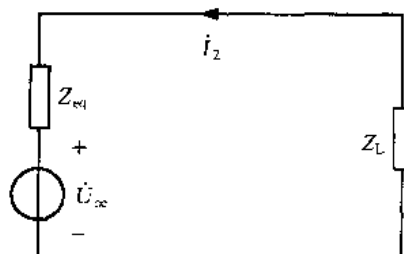


图 2.2.7 副边等效电路

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_{\infty}}{Z_{eq} + Z_L}$$

进一步可以求出原边电流 \dot{I}_1 。

4. 理想变压器

(1) 理想变压器的伏安关系

满足以下 3 个条件的变压器称为理想变压器。①无损耗——线圈和磁芯均无损耗;②全耦合——无漏磁,耦合系数 $k=1$;③ L_1, L_2 和 M 均为无限大——磁芯的磁导率为无限大,但仍保持 $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n, n = \frac{N_1}{N_2}$ 称为匝数比。

理想变压器的伏安关系(对图 2.2.8 所示电路而言)

$$u_1 = nu_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{n}i_2$$

相量形式的伏安关系

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2$$

(2) 理想变压器的特点

① 理想变压器既不耗能,又不储能,任一时刻的瞬时功率为零。在电路中起到能量传输作用。

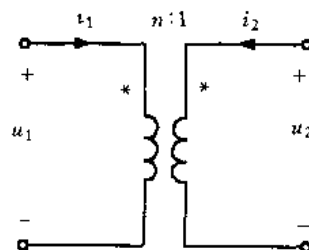


图 2.2.8 理想变压器

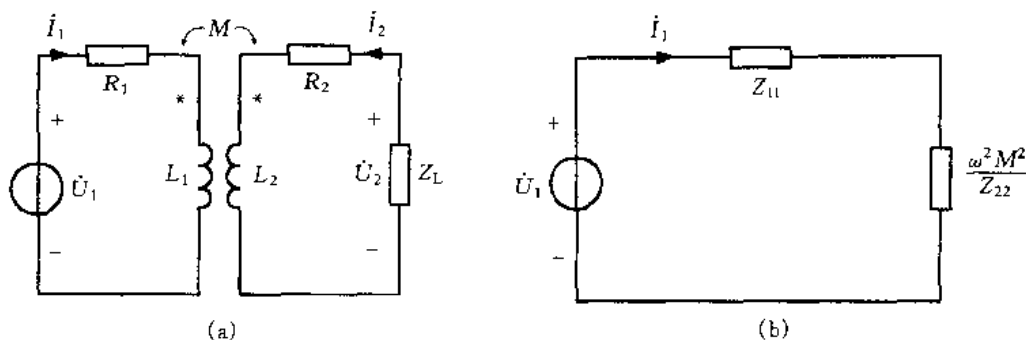


图 2.2.6 空心变压器

$$\dot{U}_{\infty} = j\omega M \dot{I}_{10}$$

\dot{I}_{10} 是副边负载断开时原边电流

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1}$$

用输入阻抗法,令原边电压源置零($U_1 = 0$),可求出从副边负载断开处的入端阻抗

$$Z_{eq} = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}$$

这样可得副边等效电路,如图 2.2.7 所示。利用副边等效电路

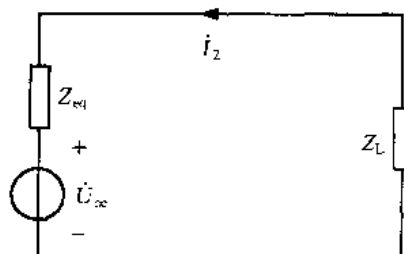


图 2.2.7 副边等效电路

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_{\infty}}{Z_{eq} + Z_L}$$

进一步可以求出原边电流 \dot{I}_1 。

4. 理想变压器

(1) 理想变压器的伏安关系

满足以下 3 个条件的变压器称为理想变压器。①无损耗——线圈和磁芯均无损耗;②全耦合——无漏磁,耦合系数 $k = 1$; ③ L_1, L_2 和 M 均为无限大——磁芯的磁导率为无限大,但仍保持 $\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n, n = \frac{N_1}{N_2}$ 称为匝数比。

理想变压器的伏安关系(对图 2.2.8 所示电路而言)

$$u_1 = nu_2$$

$$i_1 = -\frac{1}{n}i_2$$

相量形式的伏安关系

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2$$

(2) 理想变压器的特点

① 理想变压器既不耗能,又不储能,任一时刻的瞬时功率为零。在电路中起到能量传输作用。

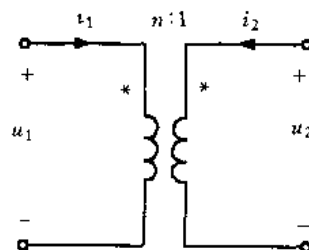
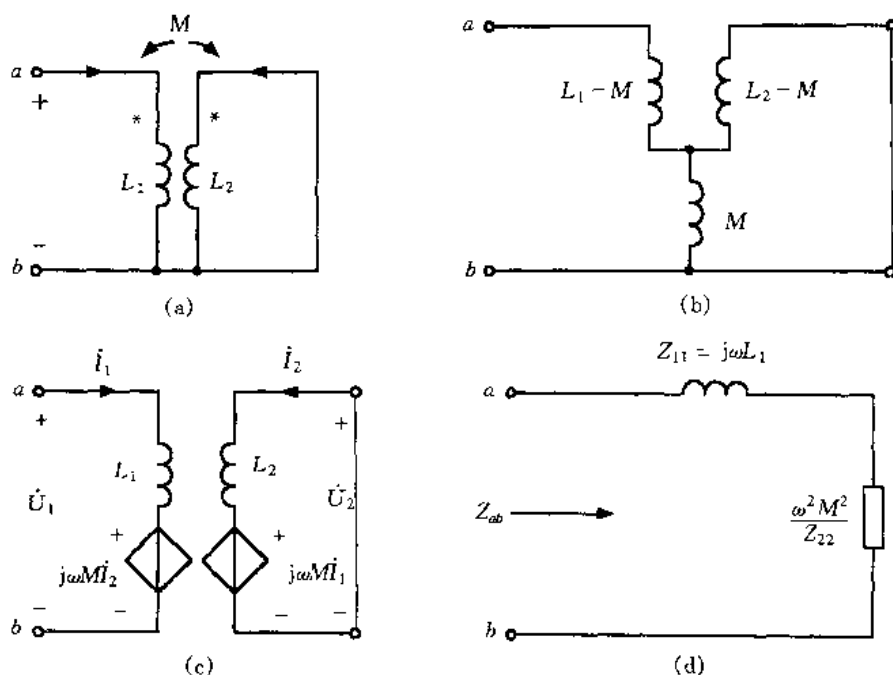


图 2.2.8 理想变压器



例图 2.2.1

$$L_{ab} = L_1 - M + \frac{M(L_2 - M)}{M + L_2 - M} = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 0.64 \text{ H}$$

解法(2) 用受控源等效电路求解。如例图 2.2.1(c)所示电路,设通过 L_1 的电流为 i_1 ,通过 L_2 的电流为 i_2 ,列写两个回路方程

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

解此方程

$$\dot{I}_2 = -\frac{M}{L_2} \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_1 = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \dot{I}_1$$

$$Z_{ab} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

$$L_{ab} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

解法(3) 利用空心变压器初级等效电路,如例图 2.2.1(d)所示,原边阻抗 $Z_{11} = j\omega L_1$,副边在原边的引入阻抗 $\frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$,其中 $Z_{22} = j\omega L_2$,由此可得

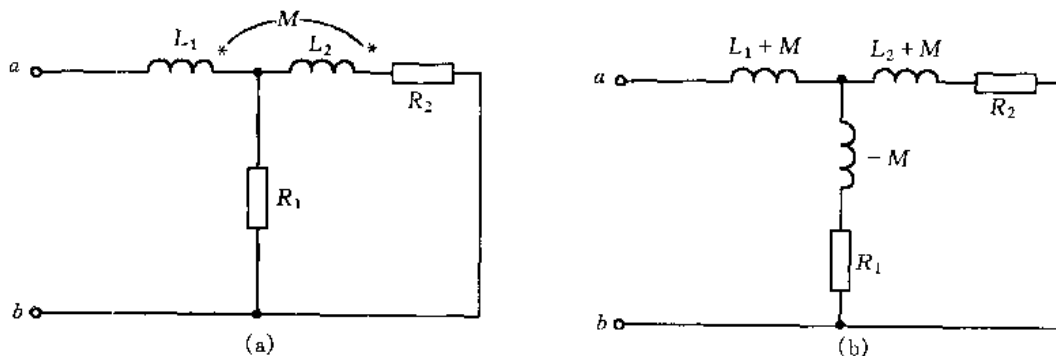
$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2} = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

由此可得

$$L_{ab} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right)$$

直接用输入阻抗法也可以求出等效电感。

例 2.2.2 具有耦合电感的一端口网络如例图 2.2.2(a) 所示, 若正弦激励角频率为 ω 时, $\omega L_1 = 6 \Omega$, $\omega L_2 = 3 \Omega$, $\omega M = 3 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, 试求此一端口的输入阻抗。



例图 2.2.2

解 由电路图可以看出, 此题是异名端共端的 T 型电路, 其等效电路如例图 2.2.2(b) 所示。由已知条件 $\omega(L_1 + M) = 9 \Omega$, $\omega(L_2 + M) = 6 \Omega$, 由电感的串并联关系直接可得

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= j9 + \frac{(6 + j6)(3 - j3)}{6 + j6 + 3 - j3} \\ &= j9 + \frac{12}{3 + j1} = 3.6 + j7.8 \Omega \end{aligned}$$

可以看出, 用等效去耦方法有时会给求解带来方便。

例 2.2.3 如例图 2.2.3(a) 所示正弦稳态电路, 已知 $i_s = \sqrt{2} \sin 1000t \text{ A}$, $R = 10 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $L_1 = 5 \text{ mH}$, $L_2 = 4 \text{ mH}$, $M = 4 \text{ mH}$, 请计算各支路电流。

解法(1) 用受控源去耦等效电路求解。如图 2.2.3(b) 所示去耦电路, 其中 $\dot{I}_s = \dot{I}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$, $j\omega L_1 = j5 \Omega$, $j\omega L_2 = j4 \Omega$, $j\omega M = j4 \Omega$, $-j \frac{1}{\omega C} = -j10 \Omega$ 。对 a 结点用 KCL

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_a - \dot{I}_a = 0$$

由此可得

$$\dot{U}_{ab} = -j\omega M \dot{I}_1 = -j4 \times 1 \angle 0^\circ = 4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{ab}}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{4 \angle -90^\circ}{10 - j10} = 0.2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

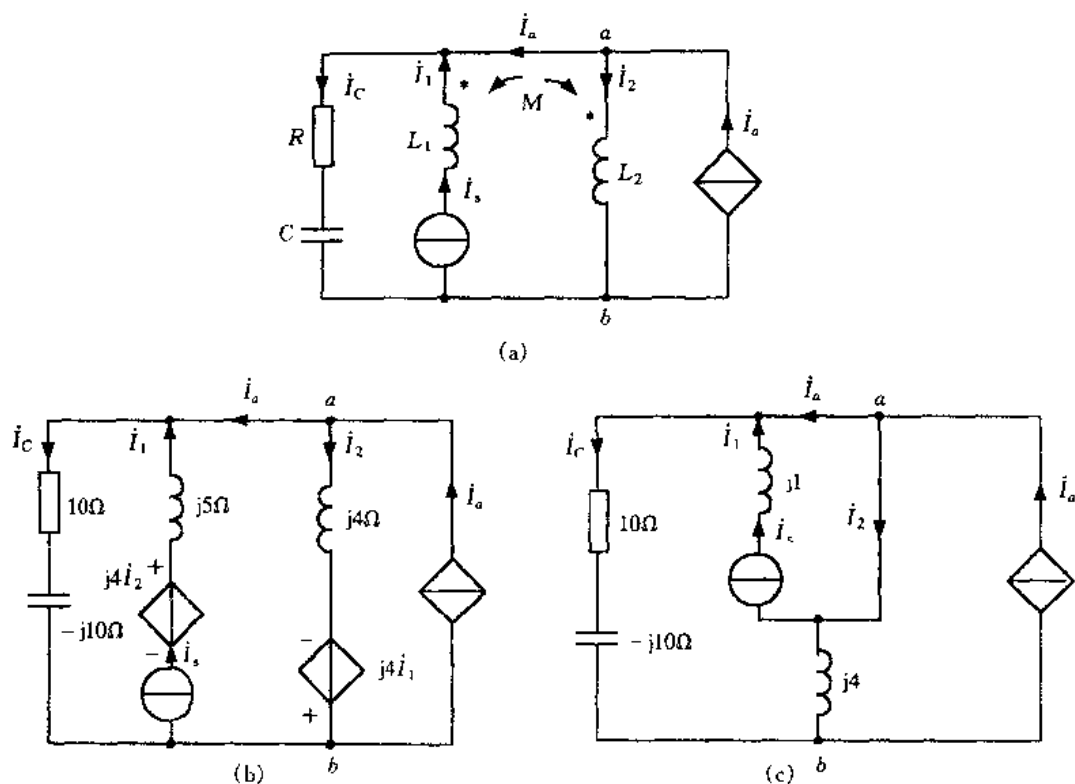
$$\dot{I}_a = \dot{I}_C - \dot{I}_1 = 0.2\sqrt{2} \angle -45^\circ - 1 \angle 0^\circ = 0.824 \angle -165.96^\circ \text{ A}$$

相量对应的正弦量分别为

$$i_1 = \sqrt{2} \sin 1000t \text{ A} \quad i_2 = 0$$

$$i_C = 0.4 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ A} \quad i_a = 0.824 \sqrt{2} \sin(1000t - 165.96^\circ) \text{ A}$$

解法(2) 用同名端共端 T 型去耦等效电路求解。如例图 2.2.3(c) 所示去耦电路。其中 $j\omega(L_1 - M) = j1 \Omega$, $j\omega(L_2 - M) = 0$ 故用短路线替代。 $j\omega M = j4 \Omega$ 。由电路图可知



例图 2.2.3

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_s = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

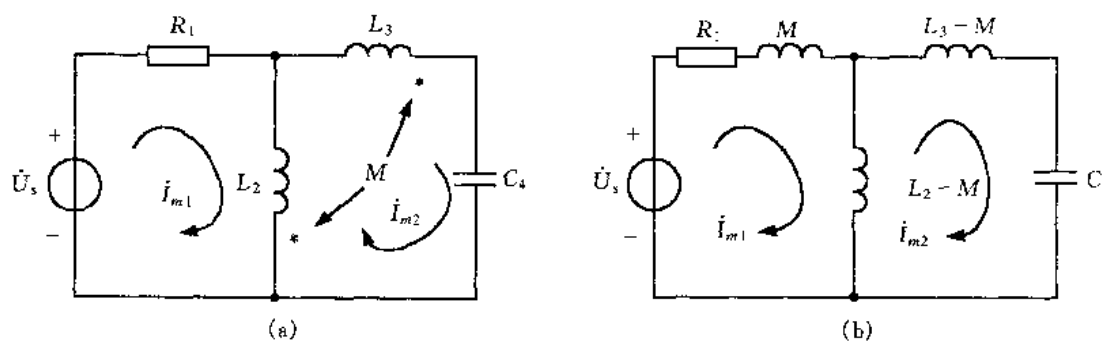
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_a - \dot{I}_a = 0$$

$$\dot{U}_{ab} = -j\omega M \dot{I}_1 = -j4 \times 1 \angle 0^\circ = 4 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_C = 0.2\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_a = 0.824 \angle -165.96^\circ \text{ A}$$

相量对应的正弦量与上面解法一致。

例 2.2.4 请按例图 2.2.4 所示电路中的回路,列写回路电流方程。



例图 2.2.4

解法(1) 用网孔法直接列写方程,设正弦激励角频率为 ω ,列写的网孔方程

$$(R_1 + j\omega L_2)\dot{I}_{m1} - j\omega L_2\dot{I}_{m2} + j\omega M\dot{I}_{m2} = U_s$$

$$-j\omega L_2\dot{I}_{m1} - j(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_4})\dot{I}_{m2} + j\omega M\dot{I}_{m1} - 2j\omega M\dot{I}_{m2} = 0$$

互感电压的正负可用以下方法判断。若两个回路之间的两个线圈有互感,当两个回路电流分别从这两个线圈的同名端流入时,互感电压为正。若从异名端流入时,互感电压为负。若同一回路中两个线圈之间有互感时,当回路电流从这两线圈同名端流入时,互感电压为正,反之从异名端流入时,互感电压为负。

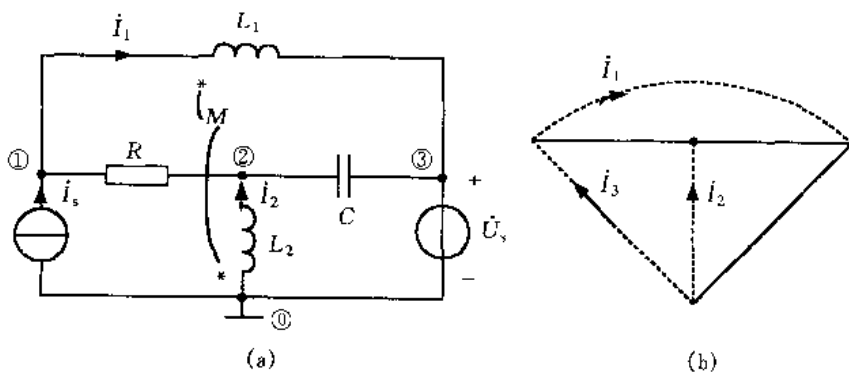
解法(2) 先将耦合电感去耦,如例图 2.2.4(b)所示。写方程的方法与前面所述正弦稳态电路的方法完全一样

$$[R_1 + j\omega M + j\omega(L_2 - M)]\dot{I}_{m1} - j\omega(L_2 - M)\dot{I}_{m2} = U_s$$

$$-j\omega(L_2 - M)\dot{I}_{m1} + j[\omega(L_3 - M) + \omega(L_2 - M) - \frac{1}{\omega C_4}]\dot{I}_{m2} = 0$$

整理后结果与上面列写的方程完全一样。

例 2.2.5 例图 2.2.5(a)所示有耦合电感电路。已知 $\omega = 1 \text{ rad/s}$, $R = 1 \Omega$, $M = 1 \text{ H}$, $L_1 = 2 \text{ H}$, $L_2 = 3 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $\dot{I}_s = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$, $\dot{U}_s = 1 \angle 90^\circ \text{ V}$ 。求: \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。



例图 2.2.5

解法(1) L_1, L_2 有耦合电感,但无公共结点。此题采用回路法,选择有电感、电流源支路为连支,得到的电路有向图如例图 2.2.5(b)所示。其中虚线为连支,实线为树支。连支电流分别设为 $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$

$$\left(R + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_1 - \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_2 - \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_3 = 0$$

$$- \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 + \left(j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_2 + \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_3 = -\dot{U}_s$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_s$$

代入数字并整理

$$(1+j)\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2 - (1-j)\dot{I}_3 = 0$$

$$j2\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2 - j\dot{I}_3 = -1 \angle 90^\circ$$

$$\dot{I}_3 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

该方程的解为

$$\dot{I}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 1 \angle 180^\circ \text{ A}$$

此题亦可用受控源去耦等效电路求解。

解法(2) 此题亦可用结点法求解。以③结点为参考结点,列写①,②,③结点的方程(结点编号见例图 2.2.5(a))。

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\dot{U}_{n1} - \frac{1}{R}\dot{U}_{n2} &= \dot{I}_s - \dot{I}_1 \\ -\frac{1}{R}\dot{U}_{n1} + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\dot{U}_{n2} - j\omega C\dot{U}_{n3} &= \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{n3} &= \dot{U}_s\end{aligned}$$

由于将电感上的电流 \dot{I}_1, \dot{I}_2 视为变量,故还要附加两个用结点电压表示电流的方程

$$\begin{aligned}\dot{U}_{n1} - \dot{U}_{n3} &= j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{n2} &= -j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}$$

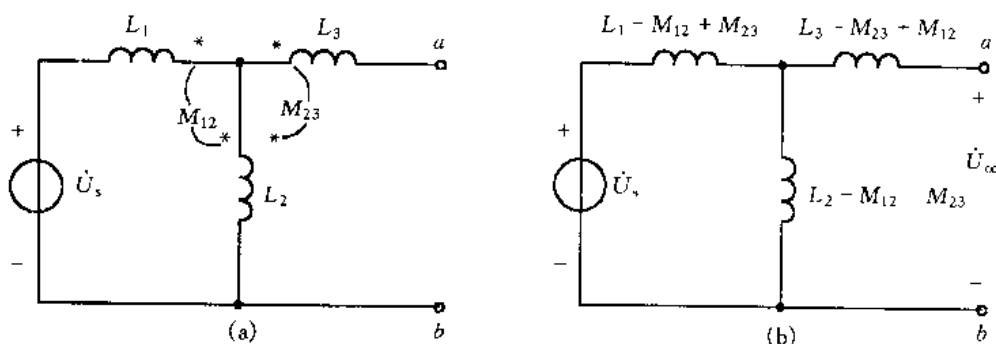
代入数字并整理可得

$$\begin{aligned}(1 + j3)\dot{I}_1 + j4\dot{I}_2 &= 1 - j \\ (1 - j3)\dot{I}_1 + (2 - j4)\dot{I}_2 &= -1 + j\end{aligned}$$

解此方程可得

$$\dot{I}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 1 \angle 180^\circ \text{ A}$$

例 2.2.6 如例图 2.2.6(a)所示电路,已知 $\dot{U}_s = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $L_1 = 8 \text{ H}$, $L_2 = 6 \text{ H}$, $L_3 = 10 \text{ H}$, $M_{12} = 4 \text{ H}$, $M_{23} = 5 \text{ H}$, 求端口 ab 等效戴维宁电路。



例图 2.2.6

解 分别对 L_1, L_2 耦合电感 M_{12} , 及 L_2, L_3 耦合电感 M_{23} 去耦等效, 其电路如图 2.2.6(b)所示。等效后电感分别为 $L_1 - M_{12} + M_{23} = 9 \text{ H}$, $L_2 - M_{23} - M_{12} = -3 \text{ H}$, $L_3 + M_{12} - M_{23} = 9 \text{ H}$ 。 ab 端开路时, 流过电路电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{j\omega 9 + j\omega(-3)} = \frac{120 \angle 0^\circ}{j12} = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

开路电压

$$\dot{U}_{oc} = j\omega(-3)\dot{I} = -j6 \times 10 \angle -90^\circ = -60 \text{ V}$$

将电压源置零, 利用电感串并联, 等效阻抗

$$Z_{eq} = j\omega \times 9 + \frac{j\omega \times 9 \times j\omega(-3)}{j\omega \times 9 + j\omega(-3)} = j18 - j9 = j9 \Omega$$

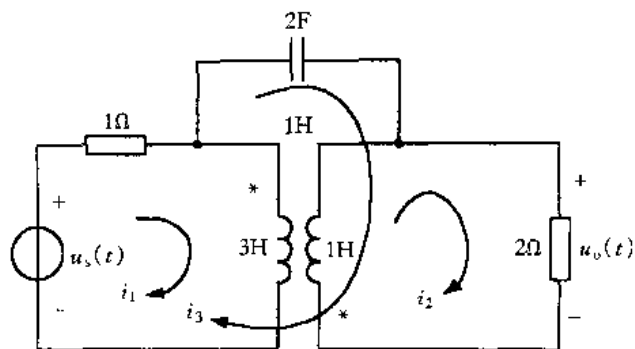
例 2.2.7 例图 2.2.7 所示正弦稳态电路, 已知 $u_s(t) = \sqrt{2}\cos t$ V, 试求 $2\ \Omega$ 电阻处电压 $u_o(t) = ?$

解 空心变压器原边和副边之间被一条支路(电容 2 F 支路)耦合, 不能用原边等效电路求解。我们采用回路法求解较方便。3 个回路电流为图中所示

$$(1+j3)I_1 + jI_2 + I_3 = 1 \angle 0^\circ$$

$$jI_1 + (2+j)I_2 + 2I_3 = 0$$

$$I_1 + 2I_2 + (3-j0.5)I_3 = 1 \angle 0^\circ$$



例图 2.2.7

解此方程组

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+j3 & j & 1 \\ j & 2+j & 2 \\ 1 & 2 & 3-j0.5 \end{vmatrix} = -2.5 + j12 = 12.25 \angle 101.77^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+j3 & 1 & 1 \\ j & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3-j0.5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-0.5-j8}{-2.5+j12} = 0.654 \angle 164.65^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1+j3 & j & 0 \\ j & 2+j & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2+j8}{-2.5+j12} = 0.673 \angle 2.266^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_o = 2 \times (I_2 + I_3) = 2 \times (0.04 + j0.2) = 0.4 \angle 78.6^\circ \text{ V}$$

$$u_o(t) = 0.4\sqrt{2}\cos(t + 78.6^\circ) \text{ V}$$

例 2.2.8 如例图 2.2.8 所示含理想变压器的正弦稳态电路, 已知 $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 50\ \mu\text{F}$, $L = 40\text{ mH}$, $\dot{U}_s = 2 \angle 45^\circ$ V, $\omega = 100\text{ rad/s}$ 。求: 当 Z_L 为何值时, Z_L 可从电路中得到最大功率, 并求最大功率为何值。

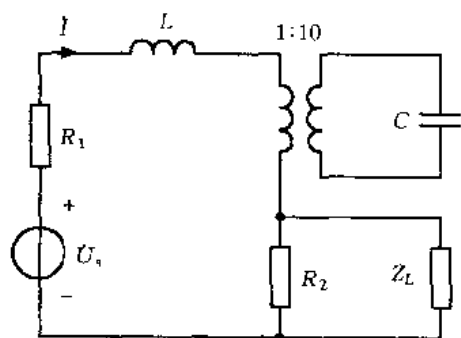
解 由已知条件 $j\omega L = j4\ \Omega$, $-j\frac{1}{\omega C} = -j200\ \Omega$, 断开 Z_L , 求断开处端口的等效戴维宁电路。

理想变压器次级在初级的引入阻抗

$$Z_m = n^2(-j\frac{1}{\omega C}) = \frac{1}{100} \times (-j200) = -j2\ \Omega$$

电路中的电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{R_1 + j\omega L + Z_m + R_2} = \frac{2 \angle 45^\circ}{1 + j4 - j2 + 1} = \frac{2 \angle 45^\circ}{2 + j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ A}$$



例图 2.2.8

由此得到开路电压

$$\dot{U}_{\infty} = R_2 \dot{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V}$$

让电压源置零,从端口处等效阻抗

$$Z_{\infty} = \frac{R_2 \times (R_1 + j\omega L + Z_{in})}{R_2 + R_1 + j\omega L + Z_{in}} = \frac{1 \times (1 + j2)}{2 + j2} = 0.79 \angle 18.43^\circ \Omega$$

当 $Z_L = Z_{\infty}^* = 0.79 \angle -18.43^\circ \Omega$ 时, Z_L 可获最大功率。

$$P_{\max} = \frac{\dot{U}_{\infty}^2}{4 \times R_{\infty}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{4 \times 0.79 \cos 18.43^\circ} = 0.167 \text{ W}$$

例 2.1.9 例图 2.2.9 所示正弦电流电路, 请问 ω 为何值时, 可使功率表的读数为零。

解 要使功率表读数为零, 则 R 上应无电流, 即 R 两端电压为零。若从 R 处断开电路, 开路电压 $\dot{U}_{\infty} = 0$ 。由此可得

$$j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{L_2}{M} \dot{I}_2$$

考虑 a, d, e, b 构成的回路, 由 KVL

$$j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}$$

考虑 $adkcb$ 构成的回路, 由 KVL

$$-j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_2 = \dot{U}$$

解此方程组可得

$$\begin{aligned} & \left[j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}) \times (-j\omega \frac{L_2 C}{M}) + j\omega M \times j\omega C \right] \dot{U} = \dot{U} \\ & \omega^2 \frac{L_1 L_2 C}{M} - \frac{L_2}{M} - \omega^2 M C = 1 \\ & \omega = \sqrt{\frac{L_2 + M}{C(L_1 L_2 - M^2)}} \end{aligned}$$

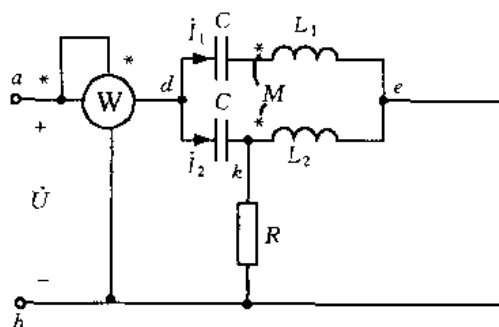
例 2.1.10 例图 2.2.10 所示电路, 元件参数在图上标记, 试求 4Ω 电阻消耗的有功功率。

解法(1) 选择如图所示 3 个回路电流, 列写回路方程

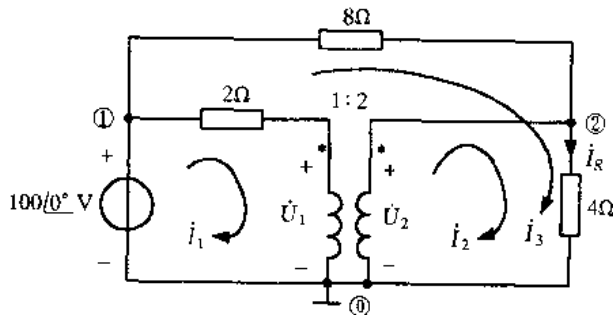
$$2\dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 100 \angle 0^\circ$$

$$4\dot{I}_2 + 4\dot{I}_3 = \dot{U}_2$$

$$4\dot{I}_2 + 12\dot{I}_3 = 100 \angle 0^\circ$$



例图 2.2.9



例图 2.2.10

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = 2\dot{I}_2$$

解此方程组可得

$$\dot{I}_2 = 15.625 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = 3.125 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_R = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 18.75 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$P = I_R^2 R = (18.75)^2 \times 4 = 1406.25 \text{ W}$$

解法(2) 按图示结点列写结点方程

$$\dot{U}_{n1} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$-\frac{1}{8} \dot{U}_{n1} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) \dot{U}_2 = \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_{n1} = 2\dot{I}_1 + \dot{U}_1$$

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_2$$

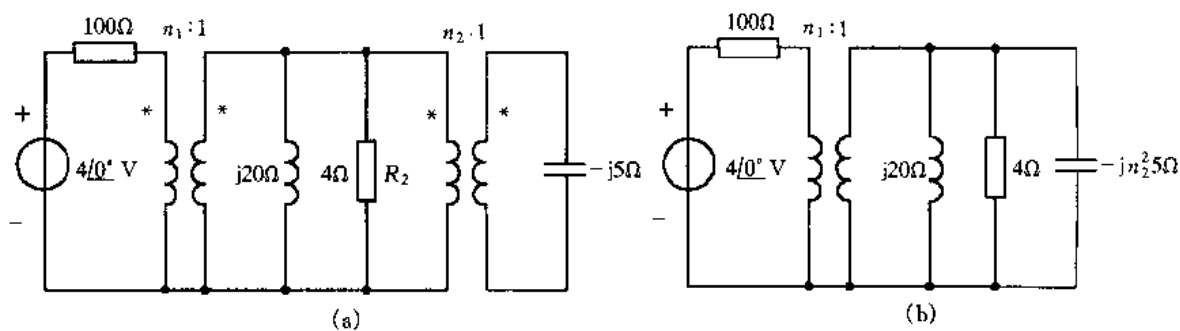
$$\dot{I}_1 = 2\dot{I}_2$$

求解此方程组,可得

$$\dot{U}_2 = 75 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$P = U_2^2 / R = 1406.25 \text{ W}$$

例 2.2.11 例图 2.2.11(a) 所示电路, 计算 n_1, n_2 为何值时, $R_2 = 4 \Omega$ 电阻可以获得最大功率并计算最大功率 P_{\max} 为何值。



例图 2.2.11

解 电压源的内阻抗是 $Z_g = 100 \Omega$, 为纯电阻。对 $n_1:1$ 变压器而言, 次级在初级的折合阻抗也应为 100Ω , 才能获得最大功率, 由于 L, C 元件均不损耗有功功率, 对 $n_2:1$ 变压器而言, 在初级折合阻抗为 $-jn_2^2/5 \Omega$, 若与 $j20 \Omega$ 电感谐振, 则初级阻抗等效为一个电阻, 如例图 2.2.11(b) 所示。

$$Y_L = \frac{1}{j20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{-jn_2^2/5} = 0.25 + j\left(\frac{1}{5n_2^2} - \frac{1}{20}\right)$$

$$\frac{1}{5n_2^2} - \frac{1}{20} = 0$$

当 $n_2=2$ 时, $-j5\ \Omega$ 的电容容抗折合到变压器 $n_2:1$ 的初级的容抗与 $j20\ \Omega$ 的电感感抗恰好谐振,对 $n_1:1$ 变压器而言,次级阻抗为 $4\ \Omega$,它在初级的折合阻抗

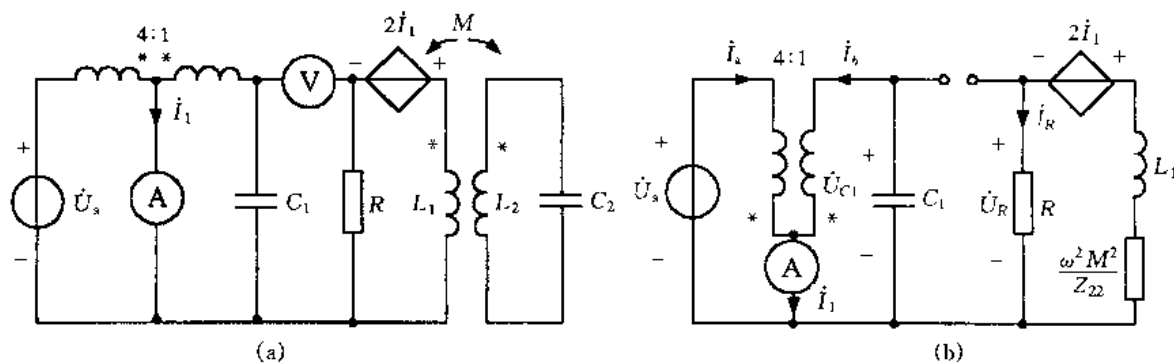
$$Z_{in} = n_1^2 R_2 = 100$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$$

故两个变压器的匝数比分别为 $n_1=5$, $n_2=2$ 时,电阻 R_2 可以获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_s^2}{4 \times R_1} = \frac{16}{4 \times 100} = 0.04\ \text{W}$$

例 2.2.12 请计算例图 2.2.12(a) 所示正弦稳态电路中电压表和电流表的读数。已知: $\omega=2\ \text{rad/s}$, $\dot{U}_s=200\angle 0^\circ\ \text{V}$, $C_1=0.05\ \text{F}$, $C_2=0.25\ \text{F}$, $R=2\ \Omega$, $L_1=4\ \text{H}$, $L_2=2\ \text{H}$, $M=1\ \Omega$ 。



例图 2.2.12

解 理想电压表⑦内阻为无穷大,可视为开路,电路如例图 2.2.12(b)所示。由于受控源 CCVS 的控制量 I_1 在左边电路,故先分析计算左边电路。利用次级阻抗折合到初级,可得初级等效电路,其中 $Z_L = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j10\ \Omega$

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_s}{n^2 Z_L} = \frac{200\angle 0^\circ}{16 \times (-j10)} = j1.25\ \text{A}$$

由理想变压器伏安关系

$$\dot{I}_b = -n\dot{I}_a = -j5\ \text{A}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_a + \dot{I}_b = j1.25 - j5 = -j3.75\ \text{A}$$

电流表④的读数为 $3.75\ \text{A}$ 。再分析计算右边电路,对空心变压器先计算副边在原边的引入阻抗,其中 $Z_{22} = j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = j4 - j2 = j2\ \Omega$

$$Z_{\pi} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4 \times 1}{j2} = -j2\ \Omega$$

计算原边等效电路

$$I_R = -\frac{2I_1}{R + j\omega L_1 + Z_H} = -\frac{2 \times (-j3.75)}{2 + j8 - j2} = 1.187 \angle 18.44^\circ \text{ A}$$

进一步计算电容 C_1 和电阻 R 上的电压,可求出电压表的读数(注意参考方向)

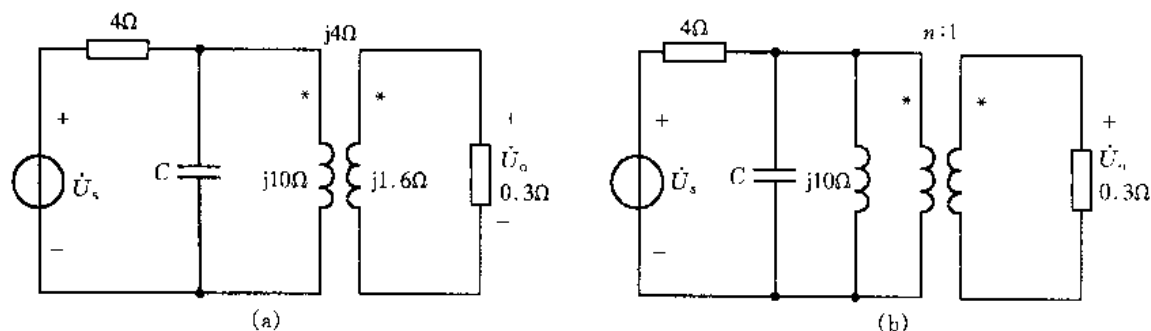
$$\dot{U}_{C_1} = -\left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right)I_b = j10 \times (-j5) = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_R = RI_R = 2 \times 1.187 \angle 18.44^\circ = 2.37 \angle 18.44^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_{C_1} - \dot{U}_R = 47.76 \angle 0.9^\circ \text{ V}$$

故电压表的读数为 47.76 V。

例 2.1.13 例图 2.2.13(a)所示正弦稳态电路。已知 $\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$, 为使输出电压 \dot{U}_o 与 \dot{U}_s 同相,则电容 C 应为何值。



例图 2.2.13

解 通过分析空心变压器自感与互感的关系可得

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{4}{\sqrt{10 \times 1.6}} = 1$$

说明是一个全耦合无损耗变压器,我们可用一个激磁线圈(感抗 $j\omega L_1 = j10 \Omega$)与一个变比 $n =$

$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{\omega L_1}{\omega L_2}} = \sqrt{\frac{10}{1.6}} = \frac{10}{4} = 2.5$ 的理想变压器的并联模型来等效,如例图 2.2.13(b)所示。

要使 \dot{U}_o 与 \dot{U}_s 同相,只要电容 C 与激磁线圈电感 L_1 并联谐振即可满足,电感 L_1 为

$$L_1 = \frac{X_L}{\omega} = \frac{10}{10} = 1 \text{ H}$$

由此可得

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{100 \times 1} = 0.01 \text{ F}$$

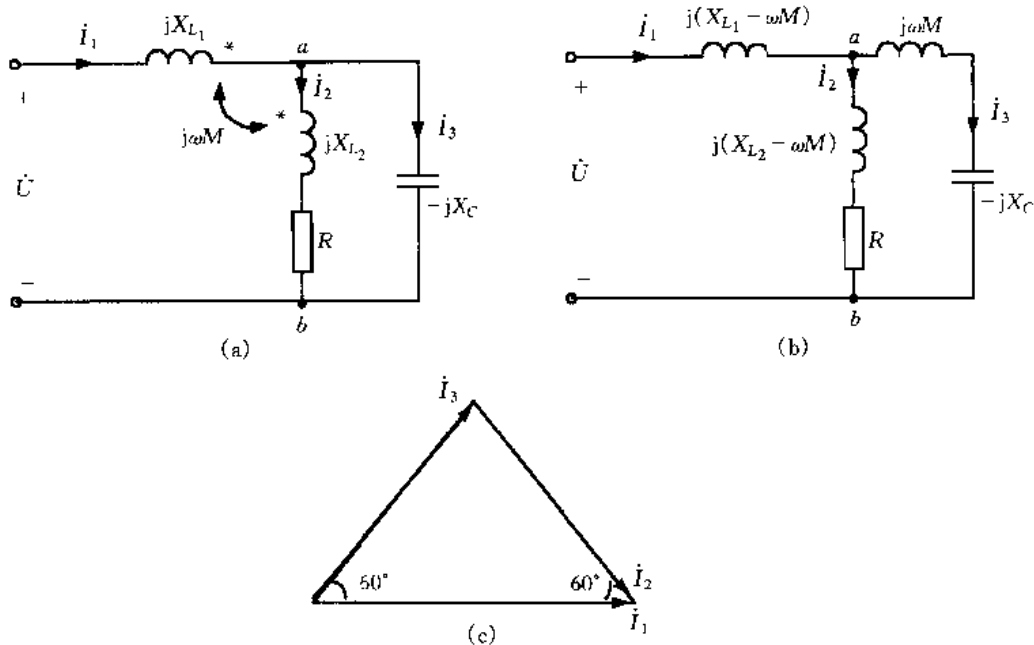
当然此题也可采用原边等效电路直接求解。

例 2.2.14 例图 2.2.14(a)所示含耦合电感电路,已知 $I_1 = I_2 = I_3 = 10 \text{ A}$, $X_C = 10 \Omega$, $P = 433 \text{ W}$, 求: R , X_{L_2} 及 ωM 的数值。

解 由例图 2.2.14(a)可利用同名端共端 T 型等效电路来求解,如例图 2.1.14(b)所示去耦等效电路。电路中电阻元件只有 R , 故平均功率

$$P = I_2^2 R$$

电阻元件的电阻



例图 2.2.14

$$R = \frac{P}{I_2^2} = \frac{433}{10^2} = 4.33 \, \Omega$$

又因为 $I_1 = I_2 = I_3$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ 故 $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ 组成等边三角形。若以 \dot{I}_1 为参考相量 $\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$, 则 $\dot{I}_2 = 10 \angle -60^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_3 = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$ 相量图如例图 2.2.14(c)所示。

电路中 ab 端电压

$$\dot{U}_{ab} = [R + j(X_{L_2} - \omega M)] \dot{I}_2 = j(\omega M - X_C) \dot{I}_3$$

$$R \dot{I}_2 + j(X_{L_2} - \omega M) \dot{I}_2 = j(\omega M - X_C) \dot{I}_3$$

$$4.33 \times 10 \angle -60^\circ + (X_{L_2} - \omega M) \times 10 \angle 30^\circ = (\omega M - X_C) \times 10 \angle 150^\circ$$

$$43.3 \cos(-60^\circ) + 10(X_{L_2} - \omega M) \cos 30^\circ = 10(\omega M - 10) \cos 150^\circ$$

$$43.3 \sin(-60^\circ) + 10(X_{L_2} - \omega M) \sin 30^\circ = 10(\omega M - 10) \sin 150^\circ$$

由此可解出

$$X_{L_2} = 7.5 \, \Omega, \quad \omega M = 5 \, \Omega$$

此题 $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$, 若 $\dot{I}_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$ 时, $\dot{I}_2 = 10 \angle 60^\circ$, $\dot{I}_3 = 10 \angle -60^\circ$, 即例图 2.2.14(b)中 \dot{I}_2 支路呈容性, \dot{I}_3 支路呈感性, 同样方法可解出

$$X_{L_2} = 12.5 \, \Omega, \quad \omega M = 15 \, \Omega$$

2.3 三相电路

2.3.1 理论提要

用 3 个频率相同、幅值相等而相位依次相差 120° 的电动势作为供电电源的电路称为三相

电路。

1. 对称三相电路

(1) 三相电源

对称三相电源的瞬时表达式为

$$u_A(t) = U_m \cos(\omega t)$$

$$u_B(t) = U_m \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$u_C(t) = U_m \cos(\omega t + 120^\circ)$$

且有 $u_A + u_B + u_C = 0$, 对应的相量表达式为

$$\dot{U}_A = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = U_p \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_B = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ = U_p \angle -120^\circ$$

$$\dot{U}_C = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle 120^\circ = U_p \angle 120^\circ$$

式中 U_p 为三相电源的有效值, $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$ 。

三相电源可作星形连接方式如图 2.3.1(a) 所示, 简称星形或 Y 形电源。亦可作三角形连接方式如图 2.3.1(b) 所示, 简称三角形或 Δ 形电源。

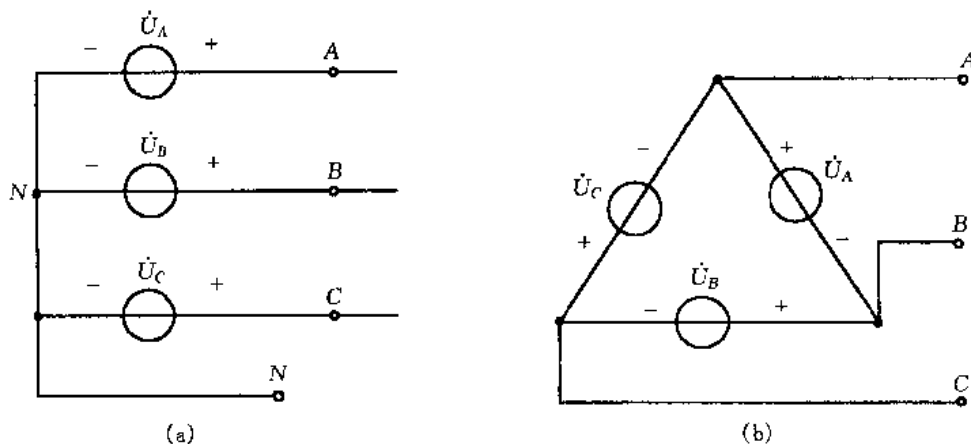


图 2.3.1 三相电源的连接

(2) 三相电路的连接

三相负载若连接成星形就构成星形负载, 若连接成三角形, 就构成三角形负载。这样一来, 将连接成星形或三角形的三相电源与连接成星形或三角形的三相负载连起来就构成三相电路。因此三相电路的连接方式有 4 种, 即 Y-Y, Y- Δ , Δ -Y 和 Δ - Δ 连接方式。图 2.3.2 表示 Y-Y, Y- Δ 两种连接方式。在 Y-Y 连接中, 如把三相电源的中心 N 与负载的中点 N' 连接起来, 构成三相四线制连接方式。

2. 对称三相电路的分析计算

对称三相电源与对称三相负载构成的电路称为对称三相电路。

(1) 线电压(电流)与相电压(电流)的关系

对称三相电源或对称三相负载作星形连接时, 如图 2.3.2(a) 所示。 $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ 或

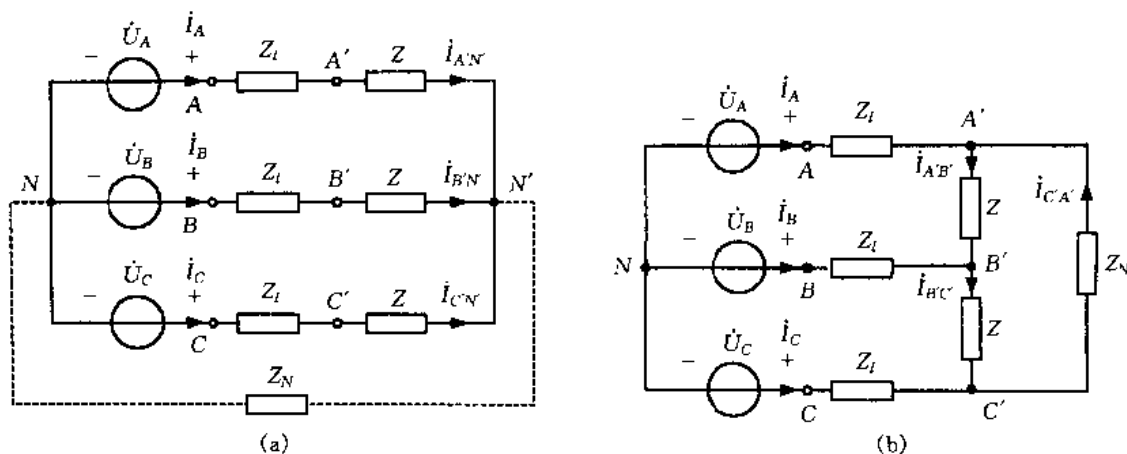


图 2.3.2 三相电路的 Y-Y, Y-Δ 连接

$\dot{U}_{A'N'}$, $\dot{U}_{B'N'}$, $\dot{U}_{C'N'}$ 均称之为相电压。 \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} 或 $\dot{U}_{A'B'}$, $\dot{U}_{B'C'}$, $\dot{U}_{C'A'}$ 称之为线电压。由 KVL 有

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ, & \dot{U}_{A'B'} &= \sqrt{3} \dot{U}_{A'N'} \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} &= \sqrt{3} \dot{U}_B \angle 30^\circ, & \dot{U}_{B'C'} &= \sqrt{3} \dot{U}_{B'N'} \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{CA} &= \sqrt{3} \dot{U}_C \angle 30^\circ, & \dot{U}_{C'A'} &= \sqrt{3} \dot{U}_{C'N'} \angle 30^\circ\end{aligned}$$

且 $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$, $\dot{U}_{A'B'} + \dot{U}_{B'C'} + \dot{U}_{C'A'} = 0$ 。此时线电流 I_A, I_B, I_C 与流过电源内部和流过负载的相电流 $I_{A'N'}, I_{B'N'}, I_{C'N'}$ 相等。

对称三相电源作星形连接,而三相负载作三角形连接时,如图 2.3.2(b)所示,则在三相负载端显然相电压就是线电压,依次分别为 $\dot{U}_{A'B'}$, $\dot{U}_{B'C'}$, $\dot{U}_{C'A'}$ 。而流过端线的线电流 I_A, I_B, I_C 与流过负载的相电流 $I_{A'B'}, I_{B'C'}, I_{C'A'}$ 却不相等,由 KCL 有

$$\begin{aligned}I_A &= \sqrt{3} I_{A'B'} \angle -30^\circ \\ I_B &= \sqrt{3} I_{B'C'} \angle -30^\circ \\ I_C &= \sqrt{3} I_{C'A'} \angle -30^\circ\end{aligned}$$

且 $I_A + I_B + I_C = 0$, 星形连接线电压与相电压的关系以及三角形连接线电流与相电流的关系均可用相量图表示,如图 2.3.3(a), (b)所示。若将三相电源按三角形连接,上述线电流与相电流的关系也适用。

(2) 对称三相电路的分析计算

对称三相电路中,电源的中点与负载的中点之间的电压

$$\dot{U}_{NN'} = 0$$

因此各相完全独立,只要知道某一相的电源和负载就可以计算出该相的电压、电流,其余二相的电压、电流可根据对称性求出。如果负载是三角形连接,可先变换为星形连接,各个星形负载的中点相对电源中点电压均为零。这就是说对称三相电路的计算可归为一相的计算方法。

3. 不对称三相电路的概念

三相电源和三相负载中只要有一部分不满足对称条件,就是不对称三相电路。

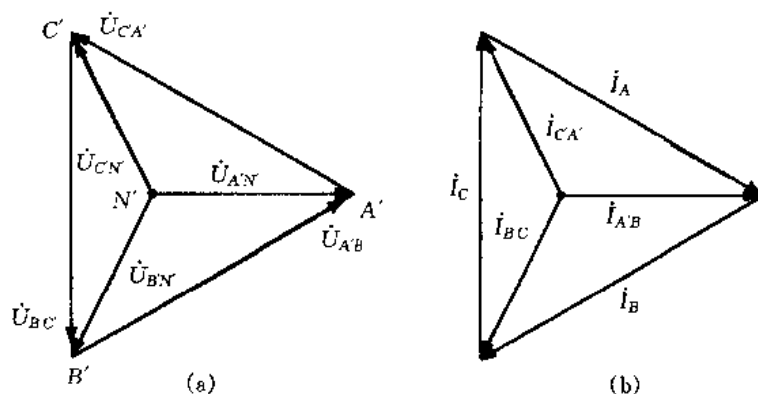


图 2.3.3 线值与相值之间的关系

不对称三相电路中,电源的中点与负载的中点之间的电压

$$\dot{U}_{N'N} \neq 0$$

各相没有互相独立的特点,因此一般先求出 $\dot{U}_{N'N}$,然后分别去计算各相的电压、电流,这时相当 3 个正弦电流电路。若其中任一相电路发生变化,一般均会牵连另外两相的电压、电流也发生变化。

不对称三相电路中,若用一条短路线将电源中点与负载中点连接起来,可以强制使

$$\dot{U}_{N'N} = 0$$

这时虽然各相没有对称三相电路中的对称关系,但可将 3 相分别独立计算。若其中某一相电路发生变化,也不会影响另外两相的工作状态。

4. 三相电路的功率

对称三相电路的复功率、平均功率、无功功率均为某一相对应功率的 3 倍。它们可以用相电压、相电流计算,也可用线电压、线电流计算。

$$\tilde{S} = 3\tilde{S}_A = 3U_p I_p \angle \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \angle \varphi$$

$$P = 3U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3U_p I_p \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi$$

上式中 U_p, I_p 为相电压、相电流, U_l, I_l 为线电压、线电流。 $\cos \varphi$ 是一相的功率因数,也是对称三相电路的功率因数。

不对称三相电路的复功率、平均功率、无功功率均为每相对应功率之和。

$$\tilde{S} = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C, \quad P = P_1 + P_2 + P_3, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

三相功率的测量中常用的一种方法是二瓦计法。三相三线制电路中,不论对称与否,三相功率均可用两个功率表进行测量。连接方式如图 2.3.4(a), (b) 所示,三相负载的平均功率是两只功率表读数之和。

$$P = P_1 + P_2$$

对图 2.3.4(a)

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi_{AC} - \varphi_A) = U_{AC} I_A \cos \varphi_1$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi_{BC} - \varphi_B) = U_{BC} I_B \cos \varphi_2$$

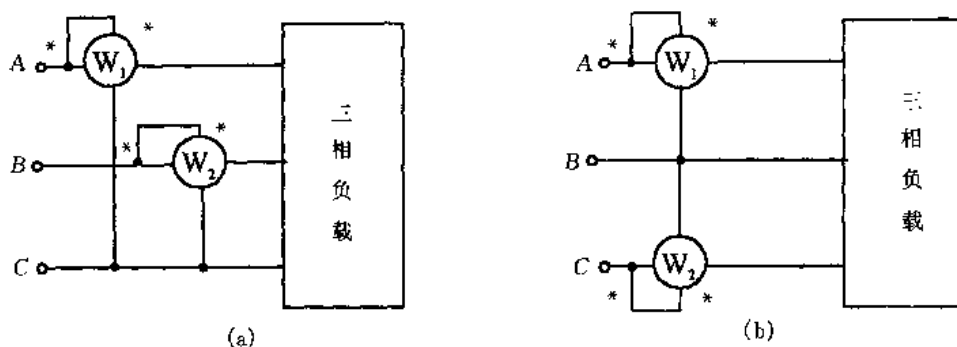


图 2.3.4 三相功率的测量

式中 U_{AC}, U_{BC} 是 AC 两线, BC 两线的线电压, I_A, I_B 是 A, B 两线的线电流。 φ_1, φ_2 是 U_{AC} 与 I_A 、 U_{BC} 与 I_B 的相位差。

若电路为对称三相电路, P_1, P_2 还可表示为

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ)$$

式中 φ 是任一相负载的阻抗角。连接方式如图 2.3.4(b) 所示时, 仍有

$$P = P_1 + P_2 = U_{AB} I_A \cos(\varphi_{AB} - \varphi_A) + U_{CB} I_C \cos(\varphi_{CB} - \varphi_C)$$

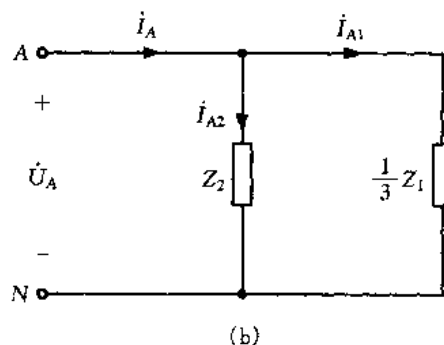
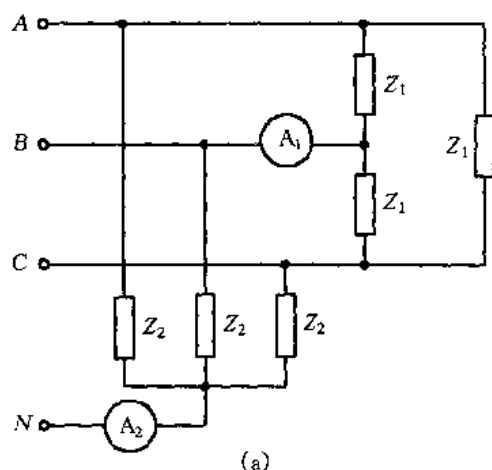
若三相负载为对称负载时

$$P = P_1 + P_2 = U_{AB} I_A \cos(\varphi + 30^\circ) + U_{CB} I_C \cos(\varphi - 30^\circ)$$

φ 为任一相负载的阻抗角。若有 $\varphi + 30^\circ > 90^\circ$ 或 $|\varphi - 30^\circ| > 90^\circ$, P_1 或 P_2 中会有某一个的读数为负值。求代数 sum 时该读数应取负值。对称三相电路三相四线制, 由于中线电流为零, 也可以用二瓦计法, 但不对称三相电路的三相四线制不能使用二瓦计法。

2.3.2 典型题解析

例 2.3.1 对称三相电路如例图 2.3.1(a) 所示。已知: $U_l = 380 \text{ V}$, 负载阻抗 $Z_1 =$



例图 2.3.1

$-j12\Omega$, $Z_2 = 3 + j4\Omega$ 。求图示两电流表的读数和三相负载吸收的平均功率和无功功率。

解 先将三角形连接的对称负载 Z_1 , 变换为星形连接, 每相负载 $Z'_1 = \frac{1}{3}Z_1$ 。由于对称负载, 故中点电位与电源中点 N 相等。可将三相电路求解变为求解 A 相电路的问题。令 $\dot{U}_A = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, 得到 A 相等效电路如例图 2.3.1(b) 所示。

$$I_{A1} = \frac{\dot{U}_A}{\frac{1}{3}Z_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{-j4} = 55 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_{A2} = \frac{\dot{U}_A}{Z_2} = \frac{220 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 44 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

根据对称性

$$I_{B1} = I_{A1} \angle -120^\circ = 55 \angle -30^\circ \text{ A}$$

故电流表 \textcircled{A}_1 的读数为 55 A。由于是对称三相电路, 中线电流为零, 所以电流表 \textcircled{A}_2 的读数为零。

Z_1 为纯容抗, 平均功率为零。 Z_2 吸收的平均功率为

$$P_A = U_A I_{A2} \cos \varphi = 220 \times 44 \times \cos(+53.1^\circ) = 5808 \text{ W}$$

$$P_{\Sigma} = 3P_A = 17.424 \text{ kW}$$

无功功率为

$$\begin{aligned} Q_A &= -U_A I_{A1} + U_A I_{A2} \sin \varphi \\ &= -220 \times 55 + 220 \times 44 \sin(+53.1^\circ) \\ &= -12100 + 7744 = -4356 \text{ var} \end{aligned}$$

$$Q_{\Sigma} = 3Q_A = -13.068 \text{ kvar}$$

此题也可先求复功率

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= 3\tilde{S}_A = 3\dot{U}_A \dot{I}_A^* = 3\dot{U}_A (\dot{I}_{A1}^* + \dot{I}_{A2}^*) \\ &= 3(U_A I_{A1} \angle -90^\circ + U_A I_{A2} \angle 53.1^\circ) \\ &= j3U_A I_{A1} \sin(-90^\circ) + 3U_A I_{A2} \cos 53.1^\circ + j3U_A I_{A2} \sin 53.1^\circ \\ &= 17.424 - j13.068 \text{ kV} \cdot \text{A} \end{aligned}$$

$$P_{\Sigma} = 17.424 \text{ kW} \quad Q_{\Sigma} = -13.068 \text{ kvar}$$

例 2.3.2 例图 2.3.2 所示对称三相电路。已知 $\dot{U}_{AN} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $Z_1 = 20 \Omega$, $Z_2 = 60 + j90 \Omega$, 求两功率表的读数。

解 先将 Δ 形负载 Z_2 变为 Y 形连接, $Z'_2 = \frac{1}{3}Z_2 = 20 + j30\Omega$ 。对 A 相电路

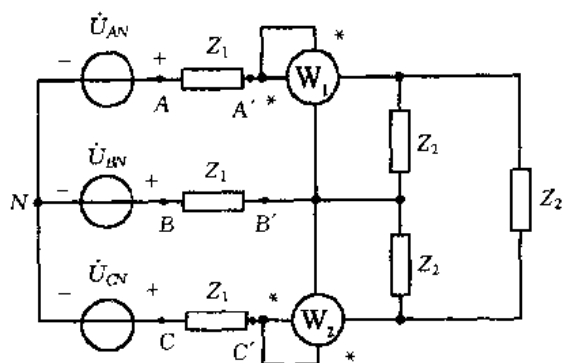
$$I_A = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_1 + Z'_2} = \frac{100 \angle 0^\circ}{20 + 20 + j30} = 2 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

由于功率表测量的是负载 Z_2 的平均功率, 先求 $Z_2 \rightarrow Z'_2$ 后每相的相电压

$$\dot{U}_{A'N'} = Z'_2 I_A = (20 + j30) \times 2 \angle -36.9^\circ = 72.2 \angle 19.4^\circ \text{ V}$$

利用相电压与线电压的关系

$$\dot{U}_{AB'} = \sqrt{3} \dot{U}_{A'N'} \angle 30^\circ = 125 \angle 49.4^\circ \text{ V}$$



例图 2.3.2

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{A'B'} I_A \cos(\phi_{A'B'} - \phi_A) \\ &= 125 \times 2 \cos[49.4^\circ - (-36.9^\circ)] \\ &= 250 \cos 86.3^\circ = 16.1 \text{ W} \end{aligned}$$

同理

$$I_C = I_A \angle 120^\circ = 2 \angle 83.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_{C'B'} = -\dot{U}_{B'C'} = -\dot{U}_{A'B'} \angle -120^\circ = -125 \angle -70.6^\circ = 125 \angle 109.4^\circ \text{ V}$$

$$P_2 = \dot{U}_{C'B'} I_C \cos(\phi_{C'B'} - \phi_C) = 125 \times 2 \cos(109.4^\circ - 83.1^\circ) = 250 \cos 26.3^\circ = 224 \text{ W}$$

此题如应用对称三相电路二瓦计法功率表读数的计算公式

$$P_1 = U_{A'B'} I_A \cos(\varphi + 30^\circ)$$

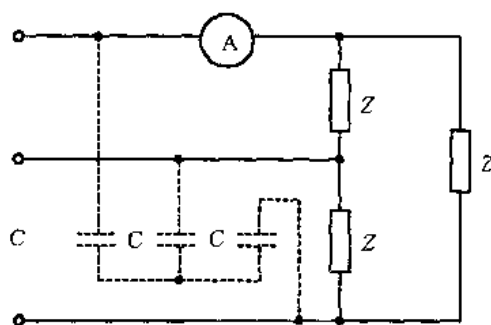
$$P_2 = U_{C'B'} I_C \cos(\varphi - 30^\circ)$$

其中 $U_{A'B'} = U_{C'B'} = 125 \text{ V}$, $I_A = I_C = 2 \text{ A}$, $\varphi = 56.3^\circ$ 是负载 Z_2 的阻抗角, 则

$$P_1 = 125 \times 2 \cos(56.3^\circ + 30^\circ) = 16.1 \text{ W}$$

$$P_2 = 125 \times 2 \cos(56.3^\circ - 30^\circ) = 224 \text{ W}$$

例 2.3.3 例图 2.3.3 所示对称三相电路中, 线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, $Z = 16 + j12 \Omega$ 。试求: (1) 电流表 A 的读数; (2) 三相吸收的总功率; (3) 接入一组星形电容负载 (图中虚线所示), 使线路功率因数 $\lambda = 0.95$, 则电容 $C = ?$ (4) 若将此电容改用与负载直接并联的 Δ 形连接, 则此时 $\lambda = ?$



例图 2.3.3

解 (1) 将 Δ 连接负载改为 Y 形连接

$$Z' = \frac{1}{3} Z = \frac{1}{3} (16 + j12) = \frac{20}{3} \angle 36.9^\circ \Omega$$

令 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ (线电压为 380 V , 故相电压为 220 V)

$$I_A = \frac{220 \angle 0^\circ}{Z'} = 33 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

则电流表的读数为 33 A 。

$$(2) P = 3 U_p I_p \cos \varphi = 3 \times 220 \times 33 \cos 36.9^\circ = 17424 \text{ W}$$

(3) 原电路 $\varphi = 36.9^\circ$, 现要 $\lambda = \cos\varphi' = 0.95$, $\varphi' = 18.19^\circ$ 原电路中

$$Q = P \tan\varphi = 17\,424 \tan 36.9^\circ = 17\,424 \times 0.75 = 13\,082.3 \text{ var}$$

现加电容负载后

$$Q' = P \tan\varphi' = 17\,424 \tan 18.19^\circ = 17\,424 \times 0.328 = 5\,725.35 \text{ var}$$

由此可得

$$C = -\frac{Q' - Q}{3\omega U^2} = 161.36 \text{ } \mu\text{F}$$

接入的一组 Y 形电容负载每相的电容为 $161.36 \text{ } \mu\text{F}$ 。

(4) 将此电容改为 Δ 形连接与负载 Z 并联, 则此时每一相的导纳为

$$\begin{aligned} Y'' &= j\omega C + \frac{1}{Z} = j314 \times 161.36 \times 10^{-6} + \frac{16}{16^2 + 12^2} - j\frac{12}{16^2 + 12^2} \\ &= j0.0507 + 0.04 - j0.03 \\ &= 0.04 + j0.0207 = 0.045 \angle 27.25^\circ \text{ S} \end{aligned}$$

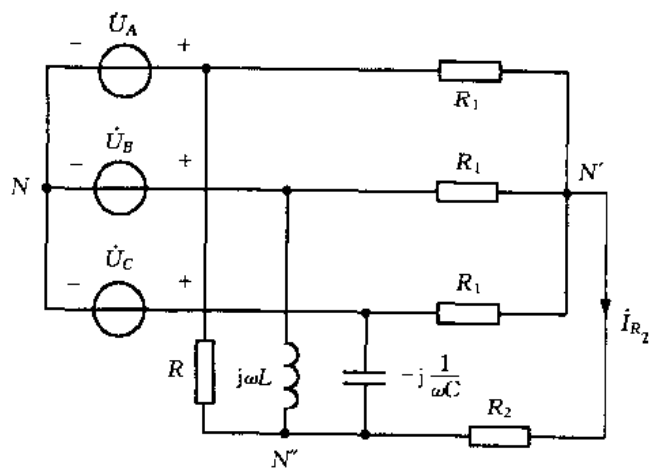
电路呈容性。这时每一相的阻抗

$$Z'' = \frac{1}{Y''} = 22.22 \angle -27.25^\circ \text{ } \Omega$$

则此时的功率因数

$$\lambda = \cos\varphi'' = \cos(-27.25^\circ) = 0.89$$

例 2.3.4 如例图 2.3.4 所示电路, 对称三相电源 $U_p = 220 \text{ V}$, $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ } \Omega$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega L$, $R_1 = 55 \text{ } \Omega$ 。求: (1) 三相电源发出的复功率; (2) 若 $R = \frac{1}{\omega C} = \omega L = 100 \text{ } \Omega$, $R_2 = 100 \text{ } \Omega$, 则流过 R_2 的电流 $I_{R_2} = ?$



例图 2.3.4

解 由于电路负载不对称故以 N 为参考结点, 建立 N' , N'' 两结点的结点电压方程

$$\left(\frac{3}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\dot{U}_{N'} - \frac{1}{R_2}\dot{U}_{N''} = \frac{1}{R_1}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)$$

$$-\frac{1}{R_2}\dot{U}_{N'} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)\dot{U}_{N'} = \frac{\dot{U}_A}{R} + \frac{\dot{U}_B}{j\omega L} + j\omega C\dot{U}_C$$

电源为三相对称电源

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$$

又因为 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega L = \frac{1}{\sqrt{3}\omega C}$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{U}_R}{R} + \frac{\dot{U}_B}{j\omega L} + j\omega C\dot{U}_C &= \sqrt{3}\omega C\dot{U}_A - j\omega C\dot{U}_B + j\omega C\dot{U}_C \\ &= \omega C[\sqrt{3}\dot{U}_A + j(\dot{U}_C - \dot{U}_B)] \\ &= \omega C[\sqrt{3}\dot{U}_A + j(\dot{U}_A \angle 120^\circ - \dot{U}_A \angle -120^\circ)] \\ &= \omega C(\sqrt{3}\dot{U}_A - \sqrt{3}\dot{U}_A) = 0\end{aligned}$$

由此可知

$$\dot{U}_{N'} = 0 \quad \dot{U}_{N''} = 0$$

这样电阻 R_2 上无电流

$$\begin{aligned}I_A &= \frac{\dot{U}_A}{R_1} + \frac{\dot{U}_A}{R} = 4 \angle 0^\circ + 3.81 \angle 0^\circ = 7.81 \angle 0^\circ \text{ A} \\ I_B &= \frac{\dot{U}_B}{R_1} + \frac{\dot{U}_B}{j\omega L} = 4 \angle -120^\circ + j2.2 \angle -120^\circ = 4.57 \angle -148.81^\circ \text{ A} \\ I_C &= \frac{\dot{U}_C}{R_1} + j\omega C\dot{U}_C = 4 \angle 120^\circ + j2.2 \angle 120^\circ = 4.57 \angle 148.81^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

三相电源发出的复功率就是所有负载吸收的复功率

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* \\ &= 220 \angle 0^\circ \times 7.81 \angle 0^\circ + 220 \angle -120^\circ \times 4.57 \angle 148.81^\circ + 220 \angle 120^\circ \times 4.57 \angle -148.81^\circ \\ &= 1718.2 + 881 + j484.5 + 881 - j484.5 \\ &= 3480.2 \text{ V} \cdot \text{A}\end{aligned}$$

也可用二瓦计法计算复功率

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \dot{U}_{AC} \dot{I}_A^* + \dot{U}_{BC} \dot{I}_B^* \\ &= \sqrt{3}\dot{U}_A \angle -30^\circ \times 7.81 + \sqrt{3}\dot{U}_B \angle 30^\circ \times 4.57 \angle 148.81^\circ \\ &\approx 3478 \text{ V} \cdot \text{A}\end{aligned}$$

当 $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 100 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$ 时, N' , N'' 的结点电压方程为

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{55} + \frac{1}{100}\right)\dot{U}_{N'} - \frac{1}{100}\dot{U}_{N''} &= 0 \\ -\frac{1}{100}\dot{U}_{N'} + \left(\frac{2}{100} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)\dot{U}_{N''} &= \frac{\dot{U}_A}{100} + \frac{\dot{U}_B}{j100} + j0.01\dot{U}_C \\ &= \frac{\dot{U}_A}{100} - \frac{\sqrt{3}}{100}\dot{U}_A = \frac{1-\sqrt{3}}{100} \times 220 \angle 0^\circ \\ &= 2.2(1-\sqrt{3})\end{aligned}$$

解此方程得

$$\dot{U}_{N'} = -13.52 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{N''} = -87.29 \angle 0^\circ \text{ V}$$

流过 R_2 的电流

$$I_{R_2} = \frac{\dot{U}_{N'} - \dot{U}_{N''}}{R_2} = \frac{-13.52 - (-87.29)}{100} = 0.74 \text{ A}$$

例 2.3.5 例图 2.3.5 所示三相电路, 已知 $R = 6 \Omega$, $Z = 1 + j4 \Omega$, $Z_1 = 10 \Omega$, $U_1 = 380 \text{ V}$, 求电源发出的平均功率。

解 由平均功率守恒定理, 电源发出的平均功率就是所有负载吸收的平均功率。 $Z_1 = 10 \Omega$ 它所吸收的平均功率

$$P_{Z_1} = \frac{U_1^2}{Z_1} = \frac{380^2}{10} = 14.44 \text{ kW}$$

将 Δ 形连接的负载 R 变换为 Y 形连接

$$R' = \frac{1}{3} R = 2 \Omega$$

流过 Z 与 R' 的电流

$$I_1 = \frac{\dot{U}_A}{Z + R'} = \frac{220 \angle 0^\circ}{1 + j4 + 2} = 44 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

由此可得

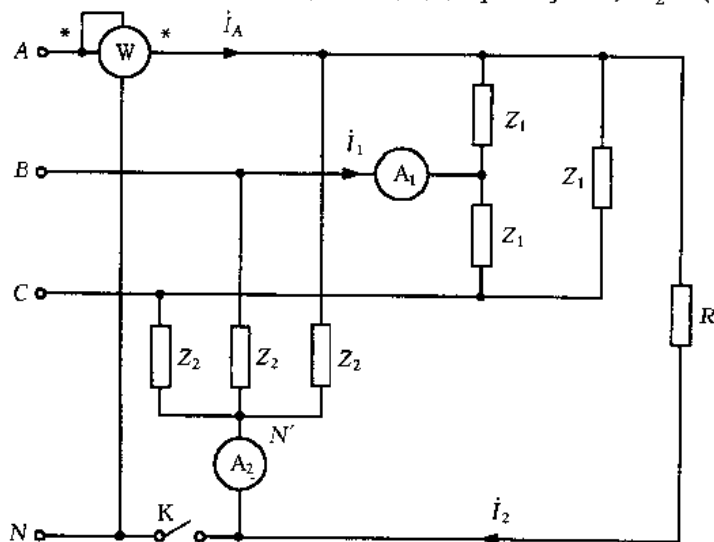
$$P_Z = I_1^2 \times 1 = 1.936 \text{ kW}$$

$$P_R = I_1^2 \times R' = 3.872 \text{ kW}$$

负载吸收的总功率也就是电源发出的平均功率

$$P = P_{Z_1} + 3P_Z + 3P_R = 31.864 \text{ kW}$$

例 2.3.6 例图 2.3.6 所示三相(四线)制电路中, $Z_1 = -j10 \Omega$, $Z_2 = (5 + j12) \Omega$, 对称三



例图 2.3.6

相电源的线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 当 K 闭合时, 电阻 R 吸收的功率为 24.2 kW 。试求:

(1) 开关 K 闭合时图中各表的读数。根据功率表的读数能否求得整个负载吸收的总功率。

(2) 开关 K 打开时图中各表的读数有无变化, 功率表的读数有无意义?

解 (1) 当开关 K 闭合时, Z_2 是对称负载, 且 N' 与 N 同电位, 故电流表④中流过的电流等于零。

将负载 Z_1 由 $\Delta \rightarrow Y$ 连接, $Z'_1 = \frac{1}{3} Z_1 = -j \frac{10}{3} \Omega$, 流过④电流表中的电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_B}{Z'_1} = \frac{U_A \angle -120^\circ}{Z'_1} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ}{-j \frac{10}{3}} = 65.82 \angle -30^\circ \text{ A}$$

④电流表的读数为 65.82 A 。由于电阻 R 吸收的功率 $P_R = 24.2 \text{ kW}$, 则 R 的阻值为

$$R = \frac{(220)^2}{24200} = 2 \Omega$$

流过功率表的电流

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{Z_2} + \frac{\dot{U}_A}{R} + \frac{\dot{U}_A}{Z'_1} \\ &= \frac{220 \angle 0^\circ}{5 + j12} + \frac{220 \angle 0^\circ}{2} + \frac{220 \angle 0^\circ}{-j \frac{10}{3}} \\ &= 126.86 \angle 23.31^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

功率表的读数

$$P = U_A I_A \cos(\phi_{uA} - \phi_{iA}) = 220 \times 126.86 \cos(-23.31^\circ) = 25.63 \text{ kW}$$

由对称性分析, 功率表的读数中去掉 R 吸收的功率就是负载 Z_1 和 Z_2 吸收的平均功率, 故可求出整个负载吸收的总功率为

$$P_{\text{总}} = 3(P - P_R) + P_R = 28.49 \text{ kW}$$

(2) 当开关 K 打开时, 电流表④的读数不会改变, 仍为 65.82 A 。由于 R 的存在, 电路不对称, N' 的电位与 N 不同, 即中点漂移。这时

$$\begin{aligned} \dot{U}_{NN'} &= \frac{\frac{1}{Z_2}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) + \frac{1}{R}\dot{U}_A}{\frac{3}{Z_2} + \frac{1}{R}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 220 \angle 0^\circ}{\frac{3}{5 + j12} + \frac{1}{2}} = 175.7 \angle 19.89^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

流过④电流表的电流就是流过 R 上的电流

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{NN'}}{R} = \frac{220 \angle 0^\circ - 175.7 \angle 19.89^\circ}{2} = 40.54 \angle -47.5^\circ \text{ A}$$

由此可知, 电流表④的读数为 40.54 A 。此时流过功率表的电流

$$\begin{aligned}
 I_A &= \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{NN}}{Z_2} + I_2 + \frac{\dot{U}_A}{Z_1'} \\
 &= 6.24 \angle -114.88^\circ + 40.54 \angle -47.5^\circ + 65.82 \angle 90^\circ \\
 &= 39.11 \angle 50.72^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

由此可得功率表的读数

$$P = U_A I_A \cos(\psi_{uA} - \psi_{iA}) = 220 \times 39.11 \cos(-50.72^\circ) = 5.45 \text{ kW}$$

但此时功率表的读数无意义。因为功率表电压线圈的电压与电路中负载电压不相同。

例 2.3.7 例图 2.3.7 所示对称三相电路中, 电源线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 角频 $\omega = 314 \text{ rad/s}$, 已知线电流 $I_l = 10 \text{ A}$, 功率表读数为 1900 W , 求: (1) 负载阻抗 $Z = ?$

(2) 三相负载的平均功率和无功功率为何值。

解 选择 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$ 为参考相量, 则

$$\dot{U}_{BC} = 380 \angle -120^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{CA} = 380 \angle 120^\circ \text{ V}$$

相电流 I_{BC} 为

$$I_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z} = \frac{380 \angle -120^\circ}{|Z| \angle \varphi} = \frac{380}{|Z|} \angle -120^\circ - \varphi$$

流过 B 线的线电流

$$I_B = \sqrt{3} I_{BC} \angle -30^\circ = \frac{\sqrt{3} \times 380}{|Z|} \angle -120^\circ - \varphi - 30^\circ$$

由已知条件 $I_l = 10 \text{ A}$ 即

$$\frac{\sqrt{3} \times 380}{|Z|} = 10$$

$$|Z| = 38\sqrt{3} = 66 \Omega$$

功率表电压线圈上的电压为 \dot{U}_{CA} , 电流线圈流过的电流为 I_B , 其测量的平均功率

$$\begin{aligned}
 P &= U_{CA} I_B \cos(\psi_{CA} - \psi_B) \\
 &= U_{CA} I_B \cos[120^\circ - (-120^\circ - \varphi - 30^\circ)] \\
 &= U_{CA} I_B \cos[270^\circ + \varphi]
 \end{aligned}$$

由此可得

$$270^\circ - \varphi = \arccos \frac{P}{U_{CA} I_B} = \arccos \frac{1900}{380 \times 10} = \arccos 0.5 = \pm 60^\circ$$

$$\varphi_{1,2} = -270^\circ \pm 60^\circ$$

$$\varphi_1 = -330^\circ = 30^\circ$$

$$\varphi_2 = -210^\circ = 150^\circ (\text{不合理, 舍去})$$

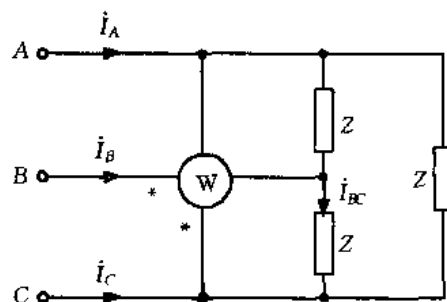
$$Z = |Z| \angle \varphi_1 = 66 \angle 30^\circ \Omega$$

进一步可求出负载的平均功率和无功功率为

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi_1 = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \cos 30^\circ = 5700 \text{ W}$$

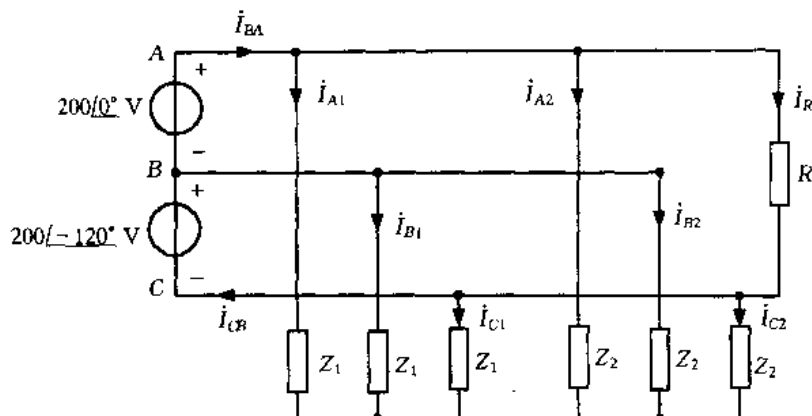
$$Q = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi_1 = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \sin 30^\circ = 3291 \text{ var}$$

例 2.3.8 例图 2.3.8 所示由两个单相电源供电的三相电路, 其中有两个对称三相负载



例图 2.3.7

和一个跨接在 A, C 两线间的单相负载。负载 $Z_1 = 20 + j10 \Omega$, 负载 Z_2 吸收的三相总功率为 2 000 W, 功率因数 $\cos \varphi_2 = 0.5$ (感性), 单相负载 $R = 20 \Omega$, 求每一电源所发出的平均功率。



例图 2.3.8

解 由图上可知 $\dot{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{BC} = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$ 。由 KVL 可知

$$\dot{U}_{CA} = -(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}) = -(220 \angle 0^\circ + 220 \angle -120^\circ) = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

由此可见,虽然只有两个电源,但 A, B, C 三点之间的线电压 \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} 仍为一组对称三相线电压,对外电路而言仍可用一组三相对称电源来等效。因此可以视为三相的相电压为

$$\dot{U}_A = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_B = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ \text{ V}$$

对 Z_2 这组负载而言,令 $Z_2 = |Z_2| \angle \varphi_2$, 由已知条件可得

$$|Z| = \frac{3U_A^2 \cos \varphi_2}{P} = \frac{3 \times \frac{220^2}{3} \times \cos \varphi_2}{2000} = 12.1 \Omega$$

$$\varphi_2 = \arccos 0.5 = 60^\circ \text{ (感性)}$$

$$Z_1 = 12.1 \angle 60^\circ \Omega$$

再计算各负载上的电流

$$I_{A1} = \frac{\dot{U}_A}{Z_1} = \frac{220 \angle -30^\circ}{\sqrt{3}(20 + j10)} = 5.68 \angle -56.56^\circ \text{ A}$$

$$I_{A2} = \frac{\dot{U}_A}{Z_2} = \frac{220 \angle -30^\circ}{\sqrt{3} \times 12.1 \angle 60^\circ} = 10.498 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$I_{C1} = \frac{\dot{U}_C}{Z_1} = \frac{220 \angle 90^\circ}{\sqrt{3}(20 + j10)} = 5.68 \angle 63.44^\circ \text{ A}$$

$$I_{C2} = \frac{\dot{U}_C}{Z_2} = \frac{220 \angle 90^\circ}{\sqrt{3} \times 12.1 \angle 60^\circ} = 10.498 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{AC}}{R} = \frac{-\dot{U}_{CA}}{R} = \frac{-220 \angle 120^\circ}{20} = 11 \angle -60^\circ \text{ A}$$

由此可求出两个电压源内的电流。参考方向如例图 2.3.8 所示

$$\begin{aligned}\dot{I}_{BA} &= \dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_R = 5.68 \angle -56.56^\circ + 10.498 \angle -90^\circ + 11 \angle -60^\circ \\ &= 26.22 \angle -70.78^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{CB} &= \dot{I}_R - \dot{I}_{C1} - \dot{I}_{C2} = 11 \angle -60^\circ - 5.68 \angle 63.44^\circ - 10.498 \angle 30^\circ \\ &= -20.78 \angle 72.84^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

两个电压源发出的平均功率为

$$\begin{aligned}P_1 &= \dot{U}_{AB} \dot{I}_{BA} \cos(\psi_{uAB} - \psi_{iBA}) \\ &= 220 \times 26.22 \times \cos[0^\circ - (-70.78^\circ)] \\ &= 5768.4 \cos 70.78^\circ \\ &= 1898.9 \text{ W} \\ P_2 &= \dot{U}_{BC} \dot{I}_{CB} \cos(\psi_{uBC} - \psi_{iCB}) \\ &= 220 \times (-20.78) \times \cos(-120^\circ - 72.84^\circ) \\ &= -4571.6 \cos(-192.84^\circ) \\ &= 4457.3 \text{ W}\end{aligned}$$

从此题的结果看,该电源系统对外虽然等效为一个对称三相电源,但两电源发出的功率不相等,就是在对称负载下,两电源发出的功率也并不相等,这说明等效仅是对外电路而言,对内部电路是不等效的。

2.4 非正弦周期电流电路

2.4.1 理论提要

1. 非正弦周期信号

非正弦周期电流和电压均称为非正弦周期信号。任何满足狄里赫利条件的周期性时间函数 $f(t)$, 其周期为 T , 可以展开成由正弦函数和余弦函数项组成的三角级数, 即傅里叶级数。工程中遇到的周期函数一般都满足狄里赫利条件, 可以用傅里叶级数展开为

$$\begin{aligned}f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \psi_k)\end{aligned}$$

式中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 为周期信号的基波角频率; $k\omega$ 为 k 次谐波角频率, 为基波角频率的 k 倍; a_0, a_k, b_k 为傅里叶系数, 其中

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k(\omega t) d(\omega t) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k(\omega t) d(\omega t)\end{aligned}$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\psi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

其中 $k=1,2,3,\dots$ 。 A_0 为直流分量(或恒定分量); $A_1\cos(\omega t + \psi_1)$ 称为 1 次谐波(或基波分量), $A_k\cos(k\omega t + \psi_k)$ 称为 k 次谐波。由此可见, 一个非正弦周期信号, 展开成傅里叶级数, 分解为直流分量和一系列谐波分量。在实际工程中遇到的非正弦周期信号一般都具有对称性, 故可利用信号的对称性, 使计算傅里叶系数的过程得到一些简化。

为了表示一个周期信号分解为傅里叶级数后包含哪些频率分量以及各分量所占“比重”, 常用频谱(图)来表示。描述各谐波分量的振幅与频率变化关系的图形称为幅度频谱。描述各谐波分量初相与频率变化关系的图形称为相位频谱。由于各谐波的角频率是 ω 的整数倍, 所以这种频谱是离散的, 也可称为线频谱。又由于高次谐波分量在幅度频谱中所占的“比重”相对较小, 因此视工程要求的精度及级数收敛的快慢, 可选择截取有限的项数, 近似地代表信号函数。

2. 有效值、平均值和平均功率

设一非正弦周期电流 $i(t)$ 可分解为傅里叶级数

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t + \psi_k)$$

电流 $i(t)$ 的有效值

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t + \psi_k) \right]^2 dt} \\ &= \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \dots} \\ &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

上式中 I_0 为直流分量, $I_1, I_2 \dots$ 为各次谐波分量的有效值。同理, 非正弦周期电压 $u(t)$ 的有效值

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \dots} \\ &= \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

由此可见, 非正弦周期信号的有效值是直流分量的平方与各次谐波分量有效值平方和的平方根。

正弦周期信号

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

其平均值

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |I_m \cos(\omega t + \psi_i)| dt$$

$$= \frac{2}{\pi} I_m \approx 0.637 I_m \approx 0.9 I$$

在实际应用中,对非正弦周期电流或电压的平均值也同样定义为它电流或电压绝对值的平均值

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |U(t)| dt$$

任意一端口的非正弦周期电流电路的瞬时功率

$$p = ui = [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega t + \psi_{uk})] \times [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t + \psi_{ik})]$$

式中 u, i 取关联参考方向。它的平均功率

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega t + \psi_{uk})] \times [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t + \psi_{ik})] dt \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \cdots \end{aligned}$$

式中 $U_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}}$, $I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}$ ($k=1, 2, \cdots$) 为各次谐波电压、电流的有效值, $\varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}$ ($k=1, 2, \cdots$) 为各次谐波电压与电流的相位差。由此可见,该一端口的平均功率等于直流分量产生的功率与各次谐波产生的平均功率的代数和。

3. 非正弦周期电流电路的分析计算

在线性电路中,周期信号激励下,其稳态响应仍为周期信号。由此,利用叠加定理可将非正弦周期电流电路的计算按以下步骤进行:

① 将给定的非正弦周期电压或电流分解为傅里叶级数,高次谐波取到哪一项截止,要依据问题要求的精确度而定。

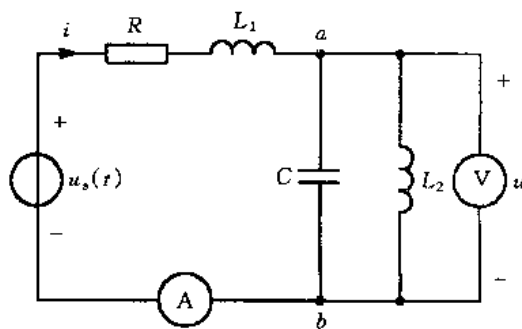
② 分别求出电压或电流的直流分量及各次谐波分量单独作用时的响应。对直流分量(可认为 $\omega=0$),求解时电容视为开路,电感视为短路。对各次谐波分量可用相量法求解,但要注意电路中的感抗、容抗是频率的函数。虽然都是用相量法,对不同角频率的谐波,其感抗、容抗是不同的。

③ 将各谐波分量的相量形式响应转换为它们分别对应的时域形式。

④ 应用叠加定理,把直流响应和各次谐波的时域形式响应进行叠加,求得所需的响应。

2.4.2 典型题解析

例 2.4.1 如例图 2.4.1 所示电路,已知 $R = 20 \Omega$, $\omega L_1 = 0.625 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 45 \Omega$, $\omega L_2 = 5 \Omega$, $u_s(t) = 100 + 276 \cos \omega t + 100 \cos(3\omega t + 40^\circ) + 50 \cos(9\omega t - 30^\circ) \text{ V}$, 求电流表Ⓐ、电表压Ⓥ的读



例图 2.4.1

数以及电阻 R 消耗的平均功率。

解 由于电压源是由直流分量及各次谐波分量组成, 将他们分别单独作用到电路上。

(1) 直流分量 $u_s^{(1)} = 100 \text{ V}$, 此时 L_1, L_2 相当短路, C 相当开路, 此时电流 I 、电压 U 及 R 消耗的功率分别为

$$I^{(1)} = \frac{u_s}{R} = 5 \text{ A}, \quad U^{(1)} = 0$$

$$P^{(1)} = I^{(1)^2} R = 25 \times 20 = 500 \text{ W}$$

(2) 基波分量 $\dot{U}_s^{(2)} = \frac{276}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V}$, 此时 $j\omega L_1 = j0.625 \Omega$, $-j\frac{1}{\omega C} = -j45 \Omega$, $j\omega L_2 = j5 \Omega$

$$I^{(2)} = \frac{\dot{U}_s^{(2)}}{20 + j0.625 + \frac{j5 \times (-j45)}{j5 - j45}} = \frac{\frac{276}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{20.95 \angle 17.35^\circ} = 9.3 \angle -17.35^\circ \text{ A}$$

$$U^{(2)} = \frac{j5 \times (-j45)}{20.95 \angle 17.35^\circ} \dot{U}_s^{(2)} = 52.4 \angle 72.65^\circ \text{ V}$$

$$P^{(2)} = I^{(2)^2} R = (9.3)^2 \times 20 = 1729.8 \text{ W}$$

(3) 3 次谐波分量 $\dot{U}_s^{(3)} = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 40^\circ \text{ V}$, 此时 $j3\omega L_1 = j1.875 \Omega$, $-j\frac{1}{3\omega C} = -j15 \Omega$, $j3\omega L_2 = j15 \Omega$ 。由此可见 CL_2 并联谐振。

$$I^{(3)} = 0 \quad \dot{U}^{(3)} = \dot{U}_s^{(3)} = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 40^\circ \text{ V}$$

$$P^{(3)} = 0$$

(4) 9 次谐波分量 $\dot{U}_s^{(4)} = \frac{50}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \text{ V}$, 此时 $j9\omega L_1 = j5.625 \Omega$, $-j\frac{1}{9\omega C} = -j5 \Omega$, $j9\omega L_2 = j45 \Omega$ 。 $L_2 C$ 并联阻抗 Z_{ab} 为

$$Z_{ab} = \frac{(j9\omega L_2)(-j\frac{1}{9\omega C})}{j9\omega L_2 - j\frac{1}{9\omega C}} = \frac{j45 \times (-j5)}{j45 - j5} = -j5.625 \Omega$$

Z_{ab} 与 L_1 串联谐振

$$I^{(4)} = \frac{\dot{U}_s^{(4)}}{R + j\omega L_1 + Z_{ab}} = \frac{\frac{50}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ}{20} = \frac{2.5}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ = 1.768 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$U^{(4)} = \frac{-j5.625}{20} \dot{U}_s^{(4)} = 9.94 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$P^{(4)} = I^{(4)^2} R = (1.768)^2 \times 20 = 62.5 \text{ W}$$

由此可得电流表的读数

$$I = \sqrt{I^{(1)^2} + I^{(2)^2} + I^{(3)^2} + I^{(4)^2}} = \sqrt{5^2 + (9.3)^2 + (1.768)^2} = 10.7 \text{ A}$$

电压表的读数

$$U = \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(3)^2} + U^{(4)^2}} = \sqrt{(52.4)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + (9.94)^2} = 88.57 \text{ V}$$

电阻 R 消耗的平均功率

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + P^{(4)} = 500 + 1\,729.8 + 62.5 = 2\,292.3 \text{ W}$$

例 2.4.2 例图 2.4.2 所示电路。已知 $L_1 = 0.12 \text{ H}$, $\omega = 314 \text{ rad/s}$, $u_1(t) = U_{1m} \cos \omega t + U_{3m} \cos 3\omega t$, $u_2(t) = U_{1m} \cos \omega t$, 求: C_1, C_2 的数值。

解 输入电压 u_1 含基波和 3 次谐波, 而输出电压仅含基波, 且与输入电压基波分量大小、相位均相同, 由此可以看出电阻 R 上无 3 次谐波电流, 故 $L_1 C_1$ 对 3ω 并联谐振, 故

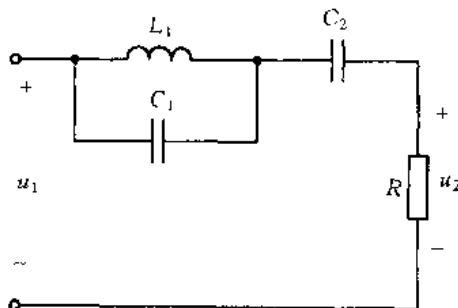
$$(3\omega)^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{(3\omega)^2 L_1} = \frac{1}{(3 \times 314)^2 \times 0.12} = 9.39 \mu\text{F}$$

当基波通过电路时, 要使 R 处的输出电压与输入基波电压同相, 则 C_2 与 $L_1 C_1$ 并联电路将对 ω 频率串联谐振

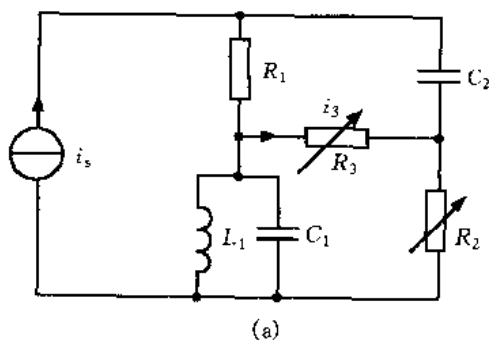
$$\frac{j\omega L_1 \times (-j\frac{1}{\omega C_1})}{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}} - j\frac{1}{\omega C_2} = 0$$

$$C_2 = \frac{(1 - \omega^2 L_1 C_1)}{\omega^2 L_1} = 75.14 \mu\text{F}$$

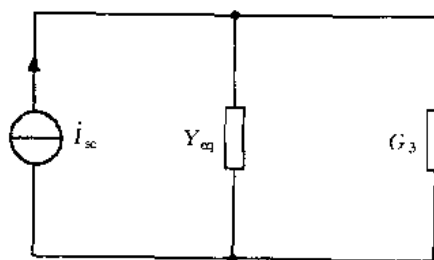


例图 2.4.2

例 2.4.3 例图 2.4.3(a) 所示电路中 $R_1 = 1 \Omega$, $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $L_1 = \frac{2}{3} \text{ H}$, 电流源 $i_s = 15 + 12\sqrt{2} \cos t + 16\sqrt{2} \cos 3t \text{ A}$ 。两个可调电阻的调节过程为: 先调节 R_2 , 使 i_3 中不含基波电流, 然后再调节 R_3 , 使它获得最大平均功率。试求: (1) i_s 的有效值; (2) R_2 的值; (3) R_3 的值; (4) R_3 获得的最大平均功率 $P_{3\max} = ?$



(a)



(b)

例图 2.4.3

解 (1) i_s 的有效值

$$I = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25 \text{ A}$$

(2) 对基波分量, 调节 R_2 使 $i_3 = 0$ 即电桥平衡, 各元件参数满足下面的关系式

$$\frac{1}{R_1 R_2} = j\omega C_2 (j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1})$$

代入数值可得

$$R_2 = 2 \Omega$$

(3) R_3 中无基波电流通过, 再看直流分量, 由于 L_1 短路、 C_2 开路, R_3 中无直流分量电流。因此 R_3 获得的功率仅由 3 次谐波电流产生。由此对 3 次谐波分量求 R_3 以外的诺顿等效电路。当 R_3 断开时, 从断开处看入的等效导纳

$$\begin{aligned} Y_{eq} &= \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j3\omega C_2}} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j3\omega C_1 + \frac{1}{j3\omega L_1}}} \\ &= \frac{1}{1 - j\frac{1}{3}} + \frac{1}{2 - j0.4} = 1.881 + j0.496 \text{ S} \end{aligned}$$

R_3 处短路的短路电流

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \left[\frac{\frac{1}{j3\omega C_2}}{R_1 + \frac{1}{j3\omega C_2}} - \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j3\omega C_1 + \frac{1}{j3\omega L_1}}} \right] I_s \\ &= [(0.1 - j0.3) - (1.962 + j0.392)] \times 16 \angle 0^\circ \\ &= 31.783 \angle -159.61^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

诺顿等效电路如例图 2.3.3(b)所示。令 $G_3 = \frac{1}{R_3}$, 由诺顿等效电路, R_3 吸收的平均功率

$$P_3 = \frac{G_3}{|Y_{eq} + G_3|^2} I_{sc}^2 = \frac{G_3}{(G_{eq} + G_3)^2 + B_{eq}^2} I_{sc}^2$$

求 P_3 的极值点, $\frac{dP_3}{dG_3} = 0$ 可得

$$G_3 = \sqrt{G_{eq}^2 + B_{eq}^2} = \sqrt{(1.881)^2 + (0.496)^2} = 1.945 \text{ S}$$

此时 $R_3 = \frac{1}{G_3} = 0.514 \Omega$, 可获得最大平均功率

$$\begin{aligned} P_{3max} &= \frac{G_3}{(G_{eq} + G_3)^2 + B_{eq}^2} I_{sc}^2 \\ &= \frac{1.945}{(1.881 + 1.945)^2 + (0.496)^2} \times (31.783)^2 \\ &= 132 \text{ W} \end{aligned}$$

例 2.4.4 例图 2.4.4 所示电路中, $u(t) = 500 + 100\sqrt{2}\cos 377t + 30\sqrt{2}\cos(3 \times 377t + 30^\circ) + 40\sqrt{2}\cos(5 \times 377t + 50^\circ) \text{ V}$, $R = 10^4 \Omega$, $L = 10 \text{ H}$, $C = 4 \mu\text{F}$, 试求 $i(t)$ 和 $i_R(t)$ 。

解 可先将一端口的入端阻抗表示出

$$Z_{ab} = \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R(1 - jR\omega C)}{1 + R^2\omega^2 C^2}$$

$$Z_{in} = j\omega L + Z_{ab} = j\omega L + \frac{R(1 - jR\omega C)}{1 + R^2\omega^2 C^2}$$

分别求出当电压为直流分量和各次谐波分量时, 电流 i 和 i_R 。

(1) 直流分量时, $U_0 = 500$ V, L 为短路, C 为开路。

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{500}{10^4} = 0.05 = 50 \text{ mA}$$

$$I_{R0} = I_0 = 50 \text{ mA}$$

(2) 基波分量时, $\dot{U}_1 = 100 \angle 0^\circ$ V

$$\begin{aligned} I_1(\omega) &= \frac{\dot{U}_1}{j\omega L + \frac{R(1 - jR\omega C)}{1 + R^2\omega^2 C^2}} \\ &= \frac{100 \angle 0^\circ}{j377 \times 10 + \frac{10^4 \times (1 - j377 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-6})}{1 + (10^4 \times 377 \times 4 \times 10^{-6})^2}} \\ &= \frac{100 \angle 0^\circ}{43.78 + j3109.8} = 32.1 \angle -89.2^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

$$I_{R1}(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} I_1(\omega) = 2.124 \angle -175.4^\circ \text{ mA}$$

(3) 3 次谐波分量时 $\dot{U}_3 = 30 \angle 30^\circ$ V

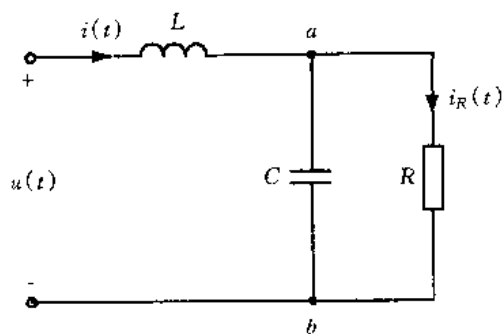
$$\begin{aligned} I_3(3\omega) &= \frac{30 \angle 30^\circ}{j3 \times 377 \times 10 + \frac{10^4 \times (1 - j3 \times 377 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^4)}{1 + (10^4 \times 3 \times 377 \times 4 \times 10^{-6})^2}} \\ &= 2.7 \angle -57.5^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

$$I_{R3}(3\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j3\omega C}} I_3(3\omega) = 0.06 \angle -146.2^\circ \text{ mA}$$

(4) 5 次谐波分量时 $\dot{U}_5 = 40 \angle 50^\circ$ V

$$\begin{aligned} I_5(5\omega) &= \frac{40 \angle 50^\circ}{j5 \times 377 \times 10 + \frac{10^4 \times (1 - j5 \times 377 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^4)}{1 + (10^4 \times 5 \times 377 \times 4 \times 10^{-6})^2}} \\ &= 2.12 \angle -40^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

$$I_{R5}(5\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j5\omega C}} I_5(5\omega) = 0.028 \angle -129.2^\circ \text{ mA}$$



例图 2.4.4

将直流分量与各次谐波分量的时域形式叠加可得电路中的电流 $i(t)$ 和 $i_R(t)$

$$i(t) = 50 + 32.1\sqrt{2}\cos(377t - 89.2^\circ) + 2.7\sqrt{2}\cos(3 \times 377t - 57.5^\circ) + 2.12\sqrt{2}\cos(5 \times 377t - 40^\circ) \text{ mA}$$

$$i_R(t) = 50 + 2.124\sqrt{2}\cos(377t - 175.4^\circ) + 0.06\sqrt{2}\cos(3 \times 377t - 146.2^\circ) + 0.028\sqrt{2}\cos(5 \times 377t - 129.2^\circ) \text{ mA}$$

进一步分析输出电压的情况:

直流分量输出电压 $U_0 = RI_0 = 500 \text{ V}$, 占直流分量输入电压的 100%。基波分量输出电压的有效值 $U_1(\omega) = 21.24 \text{ V}$, 占基波分量输入电压有效值的 21.24%; 3 次谐波分量输出电压的有效值 $U_3(3\omega) = 0.6 \text{ V}$, 占 3 次谐波输入电压有效值的 2%, 5 次谐波分量输出电压的有效值 $U_5(5\omega) = 0.28 \text{ V}$, 占 5 次谐波输入电压有效值的 0.7%。这说明电路对高频的谐波分量衰减大, 这种电路可称之为低通滤波电路。

例 2.4.5 一电感线圈接到电压为 8 V 的直流电源, 流经的电流为 2 A, 而接到电压为 10 V 的正弦电源时, 电流为 2 A。同一线圈接到有效值为 50 V 的非正弦周期电源, 这时电流的有效值为 9 A。已知该非正弦电源只含基波和 3 次谐波, 且其周期与上述的正弦电源的周期相等, 求电源电压各谐波分量的有效值。

解 电感线圈由电阻 R 和电感 L 串联所构成, 如例图 2.4.5 所示。

当 $U_0 = 8 \text{ V}$ 时, $I_0 = 2 \text{ A}$, L 相当短路

$$R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{8}{2} = 4 \Omega$$

当 $U = 10 \text{ V}$, $I = 2 \text{ A}$, 设角频率为 ω

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U}{I} = 5$$

$$R^2 + \omega^2 L^2 = 25$$

$$\omega L = 3 \Omega$$

当 $U = 50 \text{ V}$ 的非正弦周期电流作用时, 设基波分量作用时

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_1}{5}$$

3 次谐波作用时

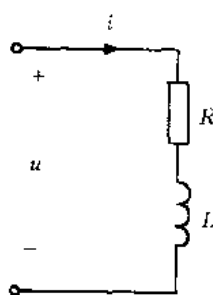
$$I_3 = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3\omega L)^2}} = \frac{U_3}{\sqrt{16 + 81}} = \frac{U_3}{\sqrt{97}}$$

由已知条件可知

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 50$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{\frac{U_1^2}{25} + \frac{U_3^2}{97}} = 9$$

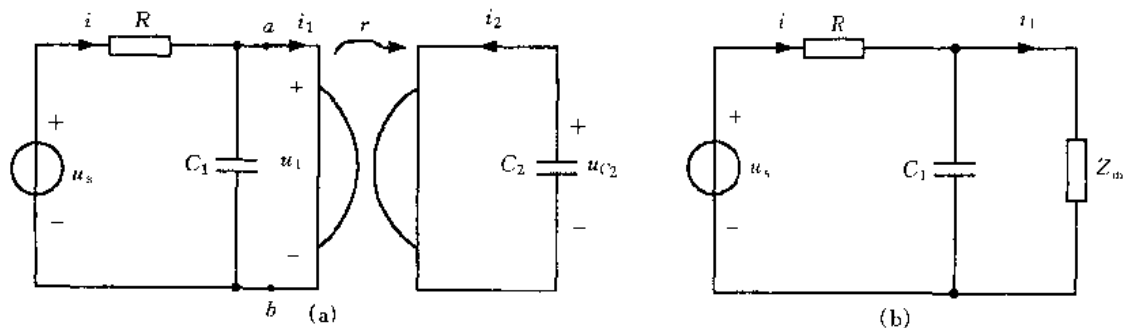
两式联立求解



例图 2.4.5

$$U_1 = 43.13 \text{ V}, \quad U_3 = 25.30 \text{ V}$$

例 2.4.6 例图 2.4.6(a) 所示非正弦周期电流电路, 已知理想回转器的回转电阻 $r = 100 \Omega$, $R = 8 \Omega$, $C_1 = 0.01 \text{ F}$, $u_s(t) = 80 + 48\sqrt{2}\cos 100t + 36\sqrt{2}\cos(300t + 30^\circ) \text{ mV}$, 已知 $i(t)$ 中不含 3 次谐波。求 (1) $u_s(t)$ 的有效值; (2) 电压源发出的平均功率; (3) 电压 $u_{C_2}(t)$ 。



例图 2.4.6

解 (1) 电压源电压的有效值

$$U_s = \sqrt{80^2 + 48^2 + 36^2} = 100 \text{ mV}$$

(2) 回转器 T 参数矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$, 从 ab 端向右看的输入阻抗

$$Z_m = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = r^2 \frac{1}{Z_L}$$

式中 Z_L 为输出端负载阻抗, 基波时 $Z_{L1} = \frac{1}{j\omega C_2}$, 3 次谐波时 $Z_{L3} = \frac{1}{j3\omega C_2}$ 。由于 $i(t)$ 中不含 3 次谐波分量, 则 C_1 与 Z_m 对 3 次谐波并联谐振

$$j3\omega C_1 + \frac{1}{Z_{in}} = j3\omega C_1 - j \frac{1}{3\omega r^2 C_2} = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{9\omega^2 r^2 C_1} = \frac{1}{9} \mu\text{F}$$

作出回转器初级等效电路, 如例图 2.4.6(b) 所示。对基波分量 $Z_m = jr^2\omega C_2$, 等效一个电感。

当直流分量作用时 $U_0 = 80 \text{ V}$, 此时电容 C_1 相当开路, Z_m 电感相当短路

$$I_0 = I_{10} = \frac{80}{8} = 10 \text{ mA}$$

当基波分量作用时, $\dot{U}_s^{(1)} = 48 \angle 0^\circ \text{ mV}$, $-j \frac{1}{\omega C_1} = -j \Omega$, $Z_{in} = j \frac{1}{9} \Omega$ 。

$$\begin{aligned} \dot{I}^{(1)} &= \frac{\dot{U}_s^{(1)}}{R + \frac{Z_m \times (-j \frac{1}{\omega C_1})}{Z_{in} - j \frac{1}{\omega C_1}}} = \frac{48 \angle 0^\circ}{8 + \frac{j \frac{1}{9} \times (-j)}{j \frac{1}{9} - j}} \\ &= \frac{48 \angle 0^\circ}{8 + j \frac{1}{8}} = 6 \angle -0.9^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

3 次谐波分量作用时 $I^{(3)}=0$, 由此可得电压源发出的平均功率

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 = 80 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} + 48 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-3} \cos 0.9^\circ \\ &= 1.088 \times 10^{-6} \text{ W} = 1.088 \text{ mW} \end{aligned}$$

(3) 利用回转器的伏安关系

$$I_1 = \frac{U_2}{r}, \quad U_2 = rI_1$$

当直流分量作用时, $I_0 = I_{10} = 10 \text{ mA}$

$$u_{20} = rI_{10} = 100 \times 10 \times 10^{-3} = 1.000 \text{ mV}$$

当基波分量作用时 $I^{(1)} = 6 \angle -0.9^\circ \text{ mA}$, 则

$$I_1^{(1)} = \frac{-j}{j\frac{1}{9} - j} I^{(1)} = \frac{27}{4} \angle -0.9^\circ \text{ mA}$$

$$U_2^{(1)} = rI_1^{(1)} = 100 \times \frac{27}{4} \angle -0.9^\circ = 675 \angle -0.9^\circ \text{ mV}$$

当 3 次谐波作用时, $I^{(2)}=0$, 但 $I_1^{(3)}$ 不为零

$$I_1^{(3)} = \frac{\dot{U}_s^{(3)}}{Z_m^{(3)}} = \frac{36 \angle 30^\circ}{(100)^2 \times j300 \times \frac{1}{9} \times 10^{-6}}$$

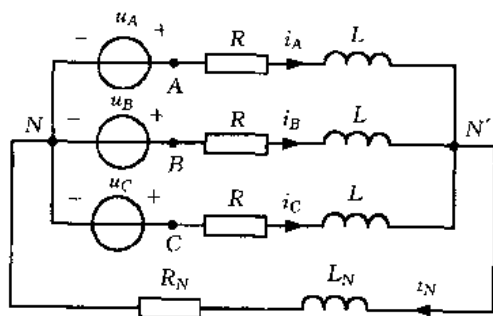
$$= 108 \angle -60^\circ \text{ mA}$$

$$U_{C_2}^{(3)} = rI_1^{(3)} = 10.800 \angle -60^\circ \text{ mV}$$

由此可得电容 C_2 处输出电压

$$u_{C_2}(t) = 1.000 + 675\sqrt{2}\cos(100t - 0.9^\circ) + 10.8 \times 10^3 \sqrt{2}\cos(300t - 60^\circ) \text{ mV}$$

例 2.4.7 例图 2.4.7 所示对称三相电源电路, 已知 $u_A(t) = 311\cos\omega t - 10\cos 3\omega t + 50\cos 5\omega t \text{ V}$, $R = 15 \Omega$, $\omega L = 4 \Omega$, $R_N = 1 \Omega$, $\omega L_N = 1 \Omega$ 。求: 各相电流、中线电流及各相负载消耗的功率。



例图 2.4.7

解 三相电源为非正弦周期电压的对称电源, 每相电源均可相当 3 个不同频率电源串联构成。按 3 个不同频率分别讨论。

基波分量电源作用时:

$$\begin{aligned}u_A^{(1)} &= 311\cos\omega t \text{ V} & \dot{U}_{Am}^{(1)} &= 311\angle 0^\circ \text{ V} \\u_B^{(1)} &= 311\cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V} & \dot{U}_{Bm}^{(1)} &= 311\angle -120^\circ \text{ V} \\u_C^{(1)} &= 311\cos(\omega t + 120^\circ) \text{ V} & \dot{U}_{Cm}^{(1)} &= 311\angle 120^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

这三个电源称正序对称三相电源。由于各相负载为对称负载, $\dot{U}_{NN}^{(1)}=0$, 中线电流 $I_N^{(1)}=0$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{Am}^{(1)} &= \frac{\dot{U}_{Am}^{(1)}}{R + j\omega L} = \frac{311\angle 0^\circ}{15 + j4} = 20.03\angle -14.93^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_{Bm}^{(1)} &= 20.03\angle -134.93^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_{Cm}^{(1)} &= 20.03\angle 105.07^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

3 次谐波分量作用时:

$$\begin{aligned}u_A^{(3)} &= -10\cos 3\omega t \text{ V} & \dot{U}_{Am}^{(3)} &= -10\angle 0^\circ \text{ V} \\u_B^{(3)} &= -10\cos 3(\omega t - 120^\circ) \\ &= -10\cos(3\omega t - 360^\circ) \\ &= -10\cos 3\omega t \text{ V} & \dot{U}_{Bm}^{(3)} &= -10\angle 0^\circ \text{ V} \\u_C^{(3)} &= -10\cos 3(\omega t + 120^\circ) \\ &= -10\cos 3\omega t \text{ V} & \dot{U}_{Cm}^{(3)} &= -10\angle 0^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

这三个电源称零序三相电源。利用结点法可先求出中线电压

$$\begin{aligned}\dot{U}_{NN} &= \frac{\frac{\dot{U}_{Am}^{(3)}}{R + j3\omega L} + \frac{\dot{U}_{Bm}^{(3)}}{R + j3\omega L} + \frac{\dot{U}_{Cm}^{(3)}}{R + j3\omega L}}{\frac{3}{R + j3\omega L} + \frac{1}{R_N + j\omega L_n}} \\ &= \frac{3 \times \frac{-10\angle 0^\circ}{15 + j12}}{\frac{3}{15 + j12} + \frac{1}{1 + j3}} \\ &= 3.42\angle 202.165^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

由此可得各相电流及中线电流分别为:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{Am}^{(3)} &= \frac{\dot{U}_{Am}^{(3)} - \dot{U}_{NN}}{R + j3\omega L} = \frac{-10\angle 0^\circ - 3.43\angle 20.165^\circ}{15 + j12} \\ &= 0.36\angle 130.63^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_{Bm}^{(3)} &= 0.36\angle 130.63^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_{Cm}^{(3)} &= 0.36\angle 130.63^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_N &= \dot{I}_{Am}^{(3)} + \dot{I}_{Bm}^{(3)} + \dot{I}_{Cm}^{(3)} = 3\dot{I}_{Am}^{(3)} = 1.08\angle 130.63^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

5 次谐波分量作用时:

$$\begin{aligned}u_A^{(5)} &= 50\cos 5\omega t \text{ V} & \dot{U}_{Am}^{(5)} &= 50\angle 0^\circ \text{ V} \\u_B^{(5)} &= -50\cos 5(\omega t - 120^\circ) \\ &= 50\cos(5\omega t - 600^\circ) \\ &= 50\cos(5\omega t + 120^\circ) \text{ V} & \dot{U}_{Bm}^{(5)} &= 50\angle 120^\circ \text{ V} \\u_C^{(5)} &= 50\cos 5(\omega t + 120^\circ) \\ &= 50\cos(5\omega t - 120^\circ) \text{ V} & \dot{U}_{Cm}^{(5)} &= 50\angle -120^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

这三个电源称负序对称三相电源。由于各相负载对称, $\dot{U}_{N'N}=0$, 中线电流 $\dot{I}_N^{(5)}=0$

$$\dot{I}_{Am}^{(5)} = \frac{\dot{U}_{Am}^{(5)}}{R + j5\omega L} = \frac{5 \angle 0^\circ}{15 + j20} = 2 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{Bm}^{(5)} = 2 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{Cm}^{(5)} = 2 \angle -173.13^\circ \text{ A}$$

化成时域形式叠加后

$$i_A = 20.03\cos(\omega t - 14.93^\circ) + 0.36\cos(3\omega t + 130.63^\circ) + 2\cos(5\omega t - 53.13^\circ) \text{ A}$$

$$i_B = 20.03\cos(\omega t - 134.93^\circ) + 0.36\cos(3\omega t + 130.63^\circ) + 2\cos(5\omega t + 66.87^\circ) \text{ A}$$

$$i_C = 20.03\cos(\omega t + 105.07^\circ) + 0.36\cos(3\omega t + 130.63^\circ) + 2\cos(5\omega t - 173.13^\circ) \text{ A}$$

$$i_N = 1.08\cos(3\omega t + 130.63^\circ) \text{ A}$$

A 相负载消耗的功率

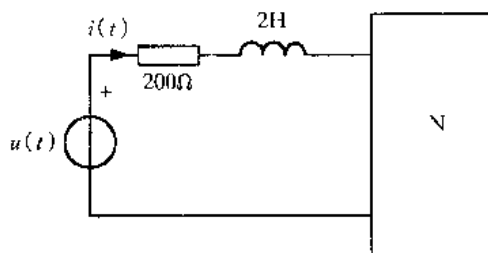
$$\begin{aligned} P_A &= R \left[\left(\frac{I_{Am}^{(1)}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{I_{Am}^{(3)}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{I_{Am}^{(5)}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \\ &= 15 \times [200.6 + 0.0648 + 2] \\ &= 3039.972 \approx 3040 \text{ W} \end{aligned}$$

三相负载消耗的总功率

$$P = 3P_A = 9120 \text{ W} = 9.12 \text{ kW}$$

2.5 阶段测试题

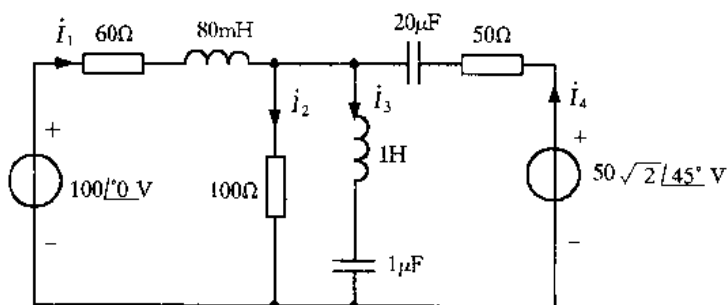
[题 2.1] 如题图 2.1 所示, N 为无源线性网络, 电压源电压 $u(t) = 400\sqrt{2}\cos 100t \text{ V}$, 电流 $i(t) = \sqrt{2}\cos(100t - 45^\circ) \text{ A}$ 。求网络 N 吸收的复功率。



题图 2.1

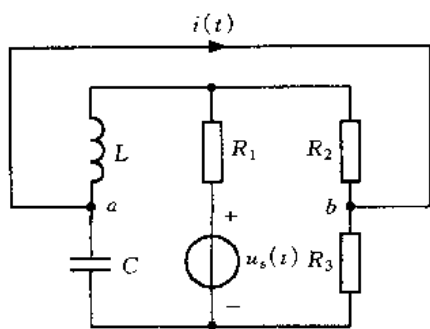
[题 2.2] 题图 2.2 所示正弦稳态电路。已知 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, 计算:

(1) 电流 i_1, i_2, i_3, i_4 ; (2) 两个电压源发出的复功率。

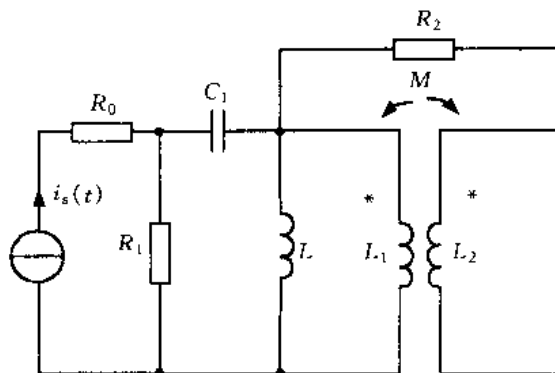


题图 2.2

[题 2.3] 题图 2.3 所示正弦稳态电路中, 已知 $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = R_3 = 100 \Omega$, 电压源电压 $u_s(t) = 120\cos 10^3 t \text{ V}$, 求图中电流 $i(t)$ 。



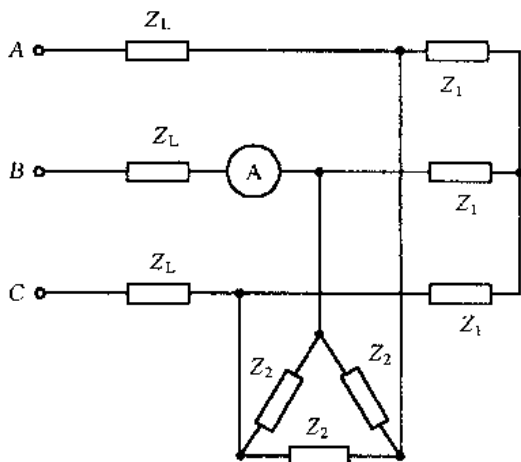
题图 2.3



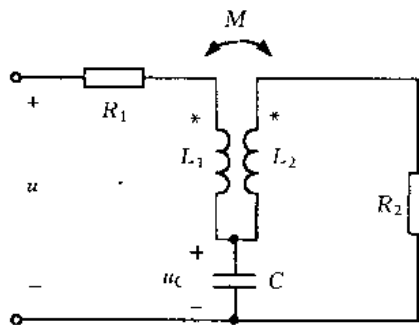
题图 2.4

[题 2.4] 题图 2.4 所示正弦电流电路, 已知 $i_s = 4\sqrt{2}\cos 100t$ A, $R_0 = R_1 = R_2 = 200\ \Omega$, $L_1 = 7$ H, $L_2 = 8$ H, $M = 4$ H, $C_1 = 10^{-4}$ F。求: 当 L 为何值时该电路发生谐振。

[题 2.5] 题图 2.5 所示对称三相电路。电源的线电压 380 V, 线路阻抗 $Z_L = (1 + j1)\ \Omega$, 负载 $Z_1 = 5 + j12\ \Omega$, $Z_2 = 15 + j12\ \Omega$ 。试求 (1) 电流表的读数; (2) 负载的功率因数。



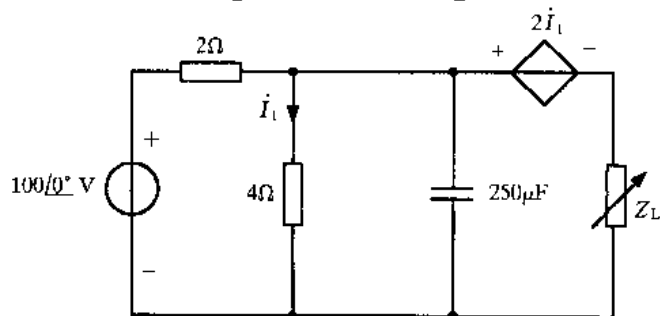
题图 2.5



题图 2.6

[题 2.6] 电路如题图 2.6 所示, 已知: $R_1 = R_2 = 200\ \Omega$, $C = 10\ \mu\text{F}$, $L_1 = 0.3$ H, $L_2 = 0.2$ H, $M = 0.1$ H, $u = 10 + 50\cos 1000t$ V。求电容电压的瞬时值 u_C 和有效值 U_C 。

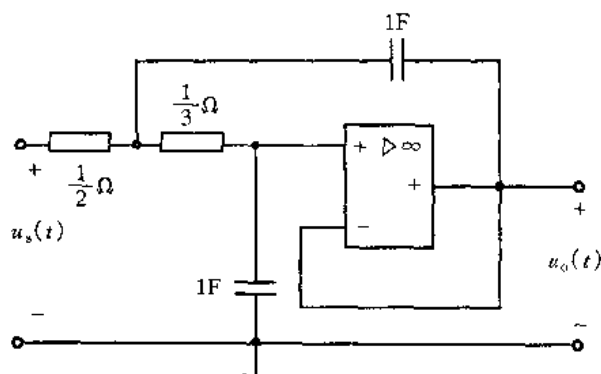
[题 2.7] 题图 2.7 所示电路, 已知 Z_L 可调, 求负载 Z_L 为何值时, 能获最大功率, 最大功率



题图 2.7

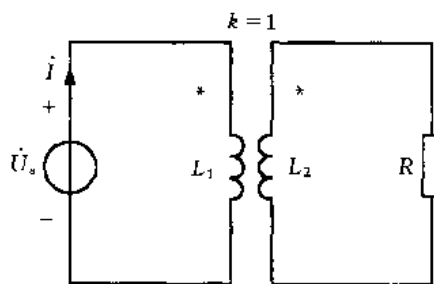
为何值。

- [题 2.8] 如题图 2.8 所示含运算放大器的正弦稳态电路。已知激励 $u_s(t) = 4\cos 2t$ V, 求输出电压 $u_o(t)$ 。

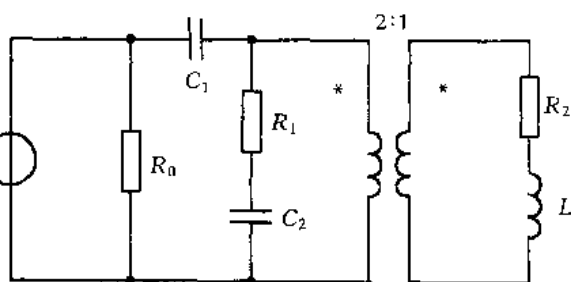


题图 2.8

- [题 2.9] 题图 2.9 所示电路含全耦合变压器。其中 $R = 8 \Omega$, $\dot{U}_s = 1 \angle 0^\circ$ V, $j\omega L_1 = j2 \Omega$, $j\omega L_2 = j8 \Omega$ 。求: 图示中电压源中流过的电流 \dot{I} 及 R 处的输出电压 \dot{U}_o 。



题图 2.9



题图 2.10

- [题 2.10] 题图 2.10 所示电路, 已知: $u_s(t) = 50 + 200\sqrt{2}\cos 100t$ V, $R_0 = 50 \Omega$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 25 \Omega$, $C_1 = C_2 = 10^{-4}$ F, $L = 0.25$ H。求: (1) 电压源电压有效值; (2) 电压源发出的有功功率。

2.6 阶段测试题答案

[题 2-1] $\tilde{S}_N = 200(2 - \sqrt{2}) \angle 45^\circ \approx 117.2 \angle 45^\circ$ V·A

[题 2-2] $i_1(t) = \sqrt{2}\cos(1000t - 53.13^\circ)$ A $i_2 = 0$

$i_4(t) = \sqrt{2}\cos(1000t + 90^\circ)$ A $i_3(t) = \sqrt{2}0.63\cos(1000t + 20.5^\circ)$ A

[题 2-3] $i_{ab} = \cos(10^3t - 90^\circ)$ A

[题 2-4] $L = 3.3$ H

[题 2-5] (1) 电流表的读数 $I = 37.8$ A

(2) 负载的功率因数 $\cos\varphi = 0.67$

[题 2-6] (1) $u_C(t) = 5 + \sqrt{2}12.5\cos(1\,000t - 135^\circ)$ V

(2) $u_C = 13.46$ V

[题 2-7] $Z_L = 0.6 + j0.2\ \Omega$ $P_m = 416.6$ W

[题 2-8] $u_o(t) = 2.35\cos(2t - 78.69^\circ)$ V

[题 2-9] 初级电流 $\dot{I}_1 = 0.707 \angle -45^\circ$ V

输出电压 $\dot{U}_o = 2 \angle 0^\circ$ V

[题 2-10] (1) $U_s = 206.15$ V

(2) $P = P_0 + P_1 = 50 + 1\,000.2 = 1\,050.2$ W

第3章 动态电路

3.1 一阶电路与二阶电路

3.1.1 理论提要

电感、电容是动态元件,含有动态元件的电路称为动态电路,当动态电路换路时,也即从一个稳定状态变化到另一个稳定状态时,在一般情况下有过渡过程。研究这一过程是电路分析计算的一个重要内容。

1. 经典法求解一阶、二阶电路

根据基尔霍夫定律和电路元件的约束关系建立描述电路的方程,由于动态元件的 $u-i$ 关系是微分或积分关系,因此所建立的方程是线性常微分方程。求解微分方程,得到所要求解的变量,这种分析方法称为经典法,它是一种在时域进行的分析方法。微分方程的解就是电路的响应。

(1) 确定独立的初始条件

用经典法求解常微分方程时,必须根据电路的初始条件确定解答中的积分常数。如果描述电路的微分方程是一阶微分方程,则初始条件就是指电路中所求变量在 $t=0_+$ 时的值。如果描述电路的方程是二阶微分方程,则初始条件是指电路中所求变量在 $t=0_+$ 时的值和其一阶导数在 $t=0_+$ 时的值。电容电压 u_C 和电感电流 i_L 的初始值,即 $u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$ 称为独立的初始条件,其余的称为非独立的初始条件。如果在换路前后,即 0_- 到 0_+ 的瞬间,电容电流和电感电压为有限值时,则换路前后瞬间电容电压和电感电流不能改变,即 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$,这是在一般情况下的换路定则。确定初始条件的步骤为:

① 根据换路前的电路,确定 $u_C(0_-)$ 与 $i_L(0_-)$ 。

② 根据换路定则确定 $u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$ 。

③ 画出 0_+ 等效电路,将电容 C 所在处用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代,将电感 L 处用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代,激励源则用 $u_s(0_+)$ 与 $i_s(0_+)$ 的直流电源替代,这样处理后的 0_+ 电路是一个直流电阻网络,然后确定各电路变量的初始值。

(2) 微分方程的特征根

微分方程所对应的特征方程的根,称为特征根,用 p_k 表示,它与电路中的激励无关,仅与电路的结构、参数有关。一阶微分方程的特征根的负倒数为时间常数 τ (单位为 s),在一阶 RC 电路中 $\tau = RC$,在一阶 RL 电路中 $\tau = \frac{L}{R}$ 。二阶微分方程的特征根一般有两个,有时会出现两根相等的情况。在 RLC 串联的二阶电路中,当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时 p_1, p_2 为两个不相等的负实数,过渡过程呈现过阻尼。当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, p_1, p_2 为两个相等的负实数,过渡过程呈现临界

阻尼。当 $R < 2\sqrt{\frac{R}{L}}$ 时, p_1, p_2 为一对共轭复数, 电路呈现欠阻尼。当 $R = 0$ 时, p_1, p_2 为相反的纯虚数, 电路无阻尼, 电流、电压为等幅振荡。由此可见, 特征根关系到过渡过程的快慢和性质。

(3) 微分方程的解

微分方程的解由两部分组成

全解 $f(t)$ = 非齐次方程的特解 $f_S(t)$ + 非齐次方程的通解 $\sum A_k e^{p_k t}$ 。

微分方程的全解即电路的全响应为

$$f(t) = f_S(t) + \sum A_k e^{p_k t}$$

式中 $f_S(t)$ 是特解, 又称为强制响应, 其变化规律与外施激励的变化规律相同, 如果换路后电路存在稳态响应, 则 $f_S(t)$ 可取新的稳态解。(对于直流电源激励的电路, 这个解用分析直流电路的方法求取; 对于正弦函数激励的电路, 这个解通过相量法分析求得; 对于斜坡函数、负指数函数等激励的电路, 可用比较系数法求此特解。)

式中 $\sum A_k e^{p_k t}$ 是齐次方程的通解, p_k 为特征根, 仅与电路结构参数有关, 与外施激励无关, 所以通解又称为自由响应。 A_k 是由电路的初始状态所确定的积分常数, A_k 的个数等于微分方程的阶数。

2. 一阶电路的三要素法

一阶电路的积分常数只有一个, 因此其通解表达式为

$$f(t) = f_S(t) + A e^{pt}$$

当 $t = 0_+$ 时, 解得 $A = f(0_+) - f_S(0_+)$

而时间常数 $\tau = -\frac{1}{p}$, 所以

$$f(t) = f_S(t) + [f(0_+) - f_S(0_+)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

在上述全响应表达式中, 含有 $f(0_+)$, $f_S(0_+)$ 和 τ , 即初始值、特解和时间常数 τ 三个要素, 只要直接求得这三个要素就能写出全响应, 这种方法称为三要素法, 上述公式又称为三要素公式。

对于直流激励的一阶电路, 公式中 $f_S(t)$ 和 $f_S(0_+)$ 是相等的, 就是直流稳态解, 可用 $f(\infty)$ 表示, 所以三要素公式可写为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

对于正弦激励的一阶电路, 公式中 $f_S(t)$ 是正弦稳态解, $f_S(0_+)$ 是正弦稳态解在 $t = 0_+$ 时的值。

3. 零输入响应、零状态响应、全响应

把电路的全响应看成是零输入响应和零状态响应的叠加, 是线性电路叠加性质在动态电路中的体现。

电路中没有外施激励, 仅由动态元件的初始储能引起的响应称为零输入响应。如果电路是直流激励的一阶电路, 用 $f_{ci}(t)$ 表示零输入响应, 则

$$f_{ci}(t) = f(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电路在零初始状态下 (动态元件初始储能为零), 由外施激励引起的响应称为零状态响应。

如果电路是直流激励的一阶电路,用 $f_{\infty}(t)$ 表示零状态响应,则

$$f_{\infty}(t) = f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

全响应 $f(t)$ 为

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{\text{cf}}(t) + f_{\infty}(t) \\ &= f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

与直流激励的一阶电路的三要素公式相同。

零输入响应、零状态响应的求解可按经典法的一般步骤进行,也可以分别直接用三要素公式求解。

4. 阶跃响应和冲激响应

动态电路在单位阶跃电压源 $\epsilon(t)$ 或电流源作用下产生的零状态响应称为单位阶跃响应,用 $s(t)$ 表示。若激励在 $t=0$ 时刻接入,则 $s(t) = g(t)\epsilon(t)$ 。

动态电路在单位冲激电压源或电流源作用下产生的零状态响应称为单位冲激响应,用 $h(t)$ 表示。若激励在 $t=0$ 时刻接入,则 $h(t) = y(t)\epsilon(t)$ 。

单位阶跃响应和单位冲激响应符合线性原理,即若激励为 $A\epsilon(t)$, $A\delta(t)$ 则相应的阶跃响应和冲激响应为

$$\begin{aligned} s(t) &= Ag(t)\epsilon(t) \\ h(t) &= Ah(t)\epsilon(t) \end{aligned}$$

如果阶跃或冲激激励是在 $t = \tau$ 时刻介入电路的,则相应的阶跃响应和冲激响应为

$$\begin{aligned} s(t - \tau) &= g(t - \tau)\epsilon(t - \tau) \\ h(t - \tau) &= h(t - \tau)\epsilon(t - \tau) \end{aligned}$$

阶跃响应和冲激响应有重要的一一对应关系

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt}s(t) \\ s(t) &= \int_0^t h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

需要指出的是,当电路接入阶跃或冲激电源时,电路可以是零状态,也可以是非零状态,如果是非零状态,则解为零状态电路的阶跃响应与由初始状态引起的零输入响应的叠加。

阶跃响应的求解,实质是求在 $t=0$ 时刻接入直流激励或正弦激励的响应,可以直接用三要素公式求得。

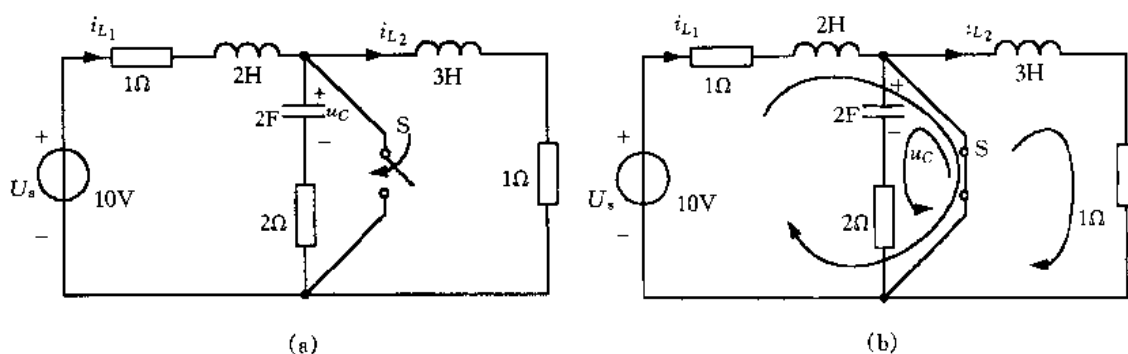
冲激响应可以通过对阶跃响应求导得出,也可以根据 $\delta(t)$ 的性质,当 $t=0$ 时, $\delta(t)$ 的作用是建立起电路的初始状态,求出 $u_C(0_+)$, $i_L(0_+)$, 当 $t \geq 0_+$ 时,由于 $\delta(t)=0$, 电路转为求零输入响应,仍可按三要素公式求解。

3.1.2 典型题解析

例 3.1.1 例图 3.1.1(a) 所示电路开关 S 闭合前电路已达稳态, $t=0$ 开关闭合, 试求:

$$(1) u_C(0_+), i_{L_1}(0_+), i_{L_2}(0_+), \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+}, \left. \frac{di_{L_1}}{dt} \right|_{0_+}, \left. \frac{di_{L_2}}{dt} \right|_{0_+}$$

(2) 电流 i_{L_1} , i_{L_2} , u_C 的稳态值。设电路中电压源为直流电压源。



例图 3.1.1

解 开关未动作前电路已达稳态,电感相当于短路,电容相当于开路,所以

$$i_{L_1}(0_-) = i_{L_2}(0_-) = \frac{U_s}{1+1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

$$i_{L_1}(0_+) = i_{L_2}(0_+) = 5 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = \frac{U_s}{1+1} \times 1 = 5 \text{ V}$$

$$u_C(0_+) = 5 \text{ V}$$

开关 S 闭合后,按例图 3.1.1 的(b)所示回路列得方程

$$1 \times i_{L_1} + 2 \frac{di_{L_1}}{dt} = U_s$$

$$1 \times i_{L_2} + 3 \frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$u_C + 2 \times C \frac{du_C}{dt} = 0$$

将 $i_{L_1}(0_+)$, $i_{L_2}(0_+)$, $u_C(0_+)$ 代入上述各式有

$$1 \times 5 + 2 \left. \frac{di_{L_1}}{dt} \right|_{0_+} = 10$$

$$1 \times 5 + 3 \left. \frac{di_{L_2}}{dt} \right|_{0_+} = 0$$

$$5 + 2 \times 2 \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = 0$$

解得

$$\left. \frac{di_{L_1}}{dt} \right|_{0_+} = 2.5 \text{ A/s}$$

$$\left. \frac{di_{L_2}}{dt} \right|_{0_+} = -\frac{5}{3} \text{ A/s}$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = -1.25 \text{ V/s}$$

(2) 当开关 S 闭合很久, 电路达到稳定状态时, 电感相当于短路, 电容相当于开路, 则

$$i_{L_1}(\infty) = \frac{U_s}{1} = 10 \text{ A}$$

$$i_{L_2}(\infty) = 0$$

$$u_C(\infty) = 0$$

例 3.1.2 例图 3.1.2 所示电路中激励为冲激电流源, 求 u_C, i_L 的零状态响应。

解 $u_C(0_-) = 0$

$$u_C(t) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\zeta) d\zeta$$

$$= \frac{1}{10^{-6}} \int_0^t 10\delta(\zeta) d\zeta$$

$$= 10^7 \varepsilon(t) \text{ V}$$

求 i_L 零状态响应, 首先求出初始电流 $i_L(0_+)$ 。列

出电路方程

$$\frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} + i_L = 10\delta(t)$$

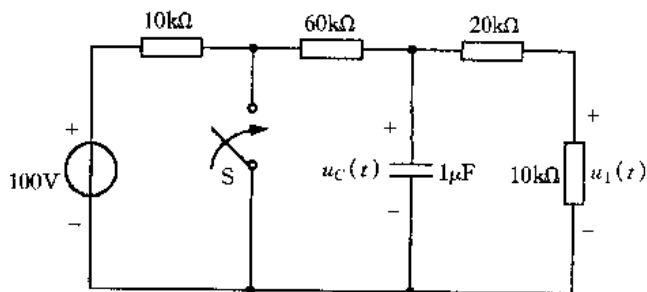
将上式在 $(0_-, 0_+)$ 时间范围内积分得

$$i_L(0_+) = 20 \text{ A}$$

所以

$$i_L(t) = 20e^{-2t} \varepsilon(t) \text{ A}$$

例 3.1.3 例图 3.1.3 所示电路原处于稳定状态, $t = 0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的 $u_1(t)$ 。



例图 3.1.3

解 $u_C(0_-) = 30 \text{ V}, u_C(0_+) = 30 \text{ V}, u_C(\infty) = 0$

所以开关 S 闭合后, 电压 $u_1(t)$ 为零输入响应, 时间常数

$$\tau = \frac{60 \times (10 + 20) \times 10^6}{(60 + 10 + 20) \times 10^3} \times 1 \times 10^{-6} = 20 \times 10^{-3} \text{ s}$$

所以

$$u_C(t) = 30e^{\frac{t}{\tau}} = 30e^{-50t} \text{ V}$$

$$u_1(t) = \frac{1}{3} u_C(t) = 10e^{-50t} \text{ V}$$

例 3.1.4 例图 3.1.4 所示电路,欲使开关 S 闭合后 $i(t)$ 立刻进入稳态,各参数间应满足什么关系? 设电源为直流。且 $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$ 均为零。

$$\text{解 } i_L(t) = \frac{U}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L_1}t})$$

$$i_C(t) = \frac{U}{R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C_2}t}$$

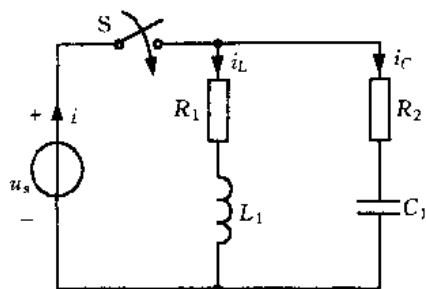
$$i(t) = i_L(t) + i_C(t)$$

$$= \frac{U}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1}{L_1}t}) - \frac{U}{R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C_2}t}$$

$$= \frac{U}{R_1} + \left(\frac{U}{R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C_2}t} - \frac{U}{R_1} e^{-\frac{R_1}{L_1}t} \right)$$

欲使开关闭合后 $i(t)$ 立刻进入稳态,必须令暂态分量为零,参数间应满足的关系是:

$$R_1 = R_2 \text{ 及 } R_1 R_2 = \frac{L_1}{C_2}$$



例图 3.1.4

例 3.1.5 例图 3.1.5 所示电路中开关 S 原打开, $t=0$ 时 S 闭合,试求 $t \geq 0$ 时的电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

解 因电感中无初始电流, $i_2(0_-) = 0$, 在 $t=0_+$ 时, $i_2(0_+) = 0$, 电感相当于开路。所以:

$$i_1(0_+) = \frac{10}{\frac{(1+4)(2+3)}{1+4+2+3}} = 4 \text{ A}$$

$$i_1(\infty) = \frac{10}{\frac{(1 \times 2)}{1+2} + \frac{4 \times 3}{4+3}} = 4.2 \text{ A}$$

$$i_2(\infty) = 4.2 \times \frac{2}{1+2} - 4.2 \times \frac{3}{3+4} = 1 \text{ A}$$

S 闭合后,时间常数

$$\tau = \frac{5}{\frac{1 \times 4}{1+4} - \frac{2 \times 3}{2+3}} = 2.5 \text{ s}$$

即

$$i_1(t) = 4.2 + (4 - 4.2)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4.2 - 0.2e^{-0.4t} \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-0.4t} \text{ A}$$

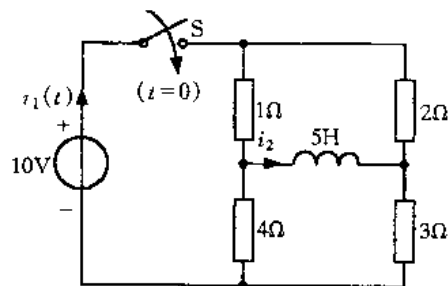
例 3.1.6 例图 3.1.6 所示电路中电源均为直流电源,开关 S 在 $t=0$ 时闭合,设开关闭合前电路已达稳态,求 $t \geq 0$ 时的电容电压 $u_C(t)$, 电流 $i_C(t)$ 。

解 S 闭合前电路已达稳态,求得 $u_C(0_-) = 5 \text{ V}$

$$u_C(0_+) = 5 \text{ V}$$

S 闭合后

$$u_C(\infty) = \frac{20}{3} \text{ V}$$



例图 3.1.5

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{10 \times 10}{10 + 10} // 10 \right) \times 10^{-2} \\ &= \frac{5 \times 10}{5 + 10} \times 10^{-2} = \frac{1}{30} \text{ s}\end{aligned}$$

所以

$$u_C(t) = \frac{20}{3} + \left(5 - \frac{20}{3} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{20}{3} - \frac{5}{3} e^{-30t}$$

$$i_C(t) = 10^{-2} \frac{du_C}{dt} = 0.5 e^{-30t} \text{ A}$$

例 3.1.7 例图 3.1.7 所示电路中,原处于稳态, $t=0$ 时 S 打开,求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$, $u_L(t)$ 。

解 开关动作前,电感相当于短路,求得

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{12}{8} = 1.5 \text{ A}$$

开关动作后

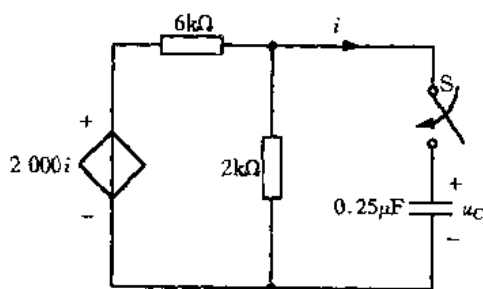
$$\begin{aligned}i_L(\infty) &= \frac{12}{8 + \frac{8 \times 8}{8 + 8}} \times \frac{1}{2} = 0.5 \text{ A} \\ \tau = \frac{L}{R} &= \frac{3}{\frac{(\frac{8 \times 8}{8 + 8} + 8)(12)}{\frac{8 \times 8}{8 + 8} + 8 + 12}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ s}\end{aligned}$$

故

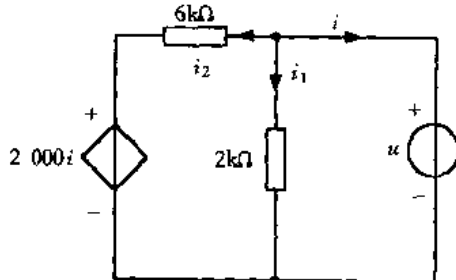
$$i_L(t) = 0.5 + (1.5 - 0.5) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.5 + e^{-2t} \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{d}{dt} (0.5 + e^{-2t}) = -6e^{-2t} \text{ V}$$

例 3.1.8 例图 3.1.8(a)所示电路中,已知 $u_C(0_-) = 6 \text{ V}$, $t=0$ 时将开关 S 闭合,求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。



(a)



(b)

例图 3.1.8

解 已知 $u_C(0_-) = 6 \text{ V}$ 则 $u_C(0_+) = 6 \text{ V}$, 换路后电路的响应为零输入响应, 从电容两端看进去的等效电阻用外施电源法求解, 如例图 3.1.8(b)所示。

$$R_{\text{eq}} = -\frac{u}{i}$$

其中

$$i_1 = \frac{u}{2 \times 10^3}$$

$$i_2 = -(i + i_1) = -\left(i + \frac{u}{2 \times 10^3}\right)$$

$$u = 6 \times 10^3 \times i_2 + 2\,000i = -6 \times 10^3 \times \left(i + \frac{u}{2 \times 10^3}\right) + 2\,000i$$

得

$$\frac{u}{i} = -1\,000$$

所以

$$R_{\text{eq}} = -\frac{u}{i} = 1\,000\ \Omega$$

$$\tau = R_{\text{eq}}C = 1\,000 \times 0.25 \times 10^{-6} = 0.25 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

所以

$$u_C = 6e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-4 \times 10^3 t}\ \text{V}$$

$$i = C \frac{du}{dt} = 0.25 \times 10^{-6} \frac{d}{dt}(6e^{-4 \times 10^3 t}) = -6 \times 10^{-3} e^{-4 \times 10^3 t}\ \text{A}$$

例 3.1.9 例图 3.1.9 所示电路中, $i_L(0_-) = 0$, $t = 0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 。

解 已知 $i_L(0_-) = 0$, 则开关 S 闭合后电路的响应为零状态响应。首先求电感元件以外部分的戴维宁等效电路。端口开路时

$$u_{\infty} = 10i_1 + 10i_1 = 20i_1$$

而

$$i_1 = \frac{25}{15 + 10} = 1\ \text{A}$$

所以

$$u_{\infty} = 20i_1 = 20\ \text{V}$$

端口短路时

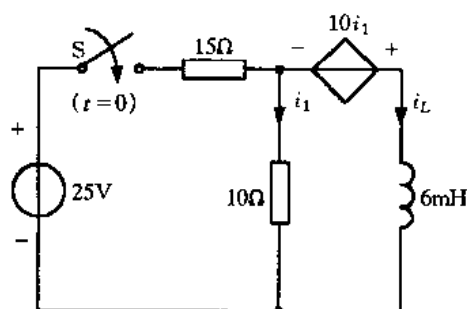
$$i_1 = \frac{-10i_1}{10} = -i_1$$

$$i_1 = 0$$

所以

$$i_{\infty} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}\ \text{A}$$

故



例图 3.1.9

$$R_{eq} = \frac{u_{\infty}}{i_{sc}} = \frac{20}{\frac{5}{3}} = 12 \Omega$$

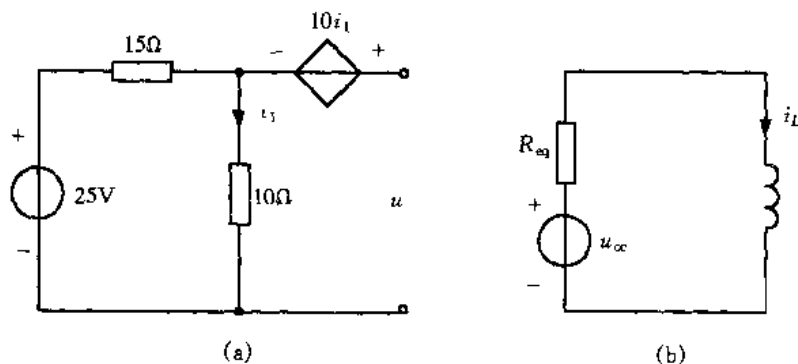
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{6 \times 10^{-3}}{12} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$i_L(0_{\infty}) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{ A}$$

所以

$$i_L = \frac{5}{3}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{5}{3}(1 - e^{-2000t}) \text{ A}$$

解题图如例图 3.1.10(a),(b)所示。



例图 3.1.10

例 3.1.10 例图 3.1.11 所示电路中,开关 S 闭合前电路已达稳态, $t=0$ 时 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时的电压 u_C 的零状态响应、零输入响应、全响应,并定性绘出波形图。

解 首先求 $u_C(0_-)$, 电路如例图 3.1.12(a), 因开关动作前电路已达稳态, 电容

相当于开路, 有 $\frac{u_1}{2} - 1.5u_1 = 1$

$$u_1 = -1 \text{ V}$$

$$u_C(0_-) = 4 \times 1.5u_1 + u_1 = 7u_1 = -7 \text{ V}$$

开关 S 闭合后, 求出电容 C 两端的戴维宁等效电路, 电路如例图 3.1.12(b)

$$u_{\infty} = 1.5u_1 \times 4 + u_1 = 7u_1$$

而

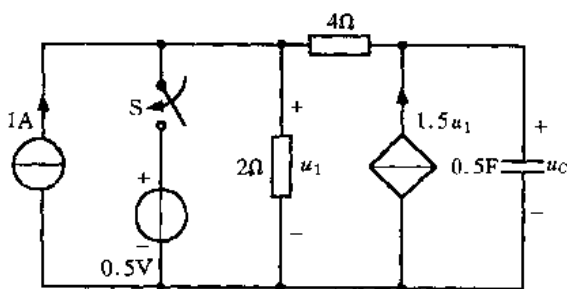
$$u_1 = 0.5 \text{ V}$$

所以

$$u_{\infty} = 7u_1 = 3.5 \text{ V}$$

用外施电源法或 $\frac{u_{\infty}}{i_{sc}}$ 等方法求出

$$R_{eq} = 4 \Omega$$



例图 3.1.11

$$\tau = R_{\text{eq}}C = 4 \times 0.5 = 2 \text{ s}$$

所以零状态响应

$$u_C^{(1)} = 3.5(1 - e^{-0.5t}) \text{ V}$$

零输入响应

$$u_C^{(2)} = -7e^{-0.5t} \text{ V}$$

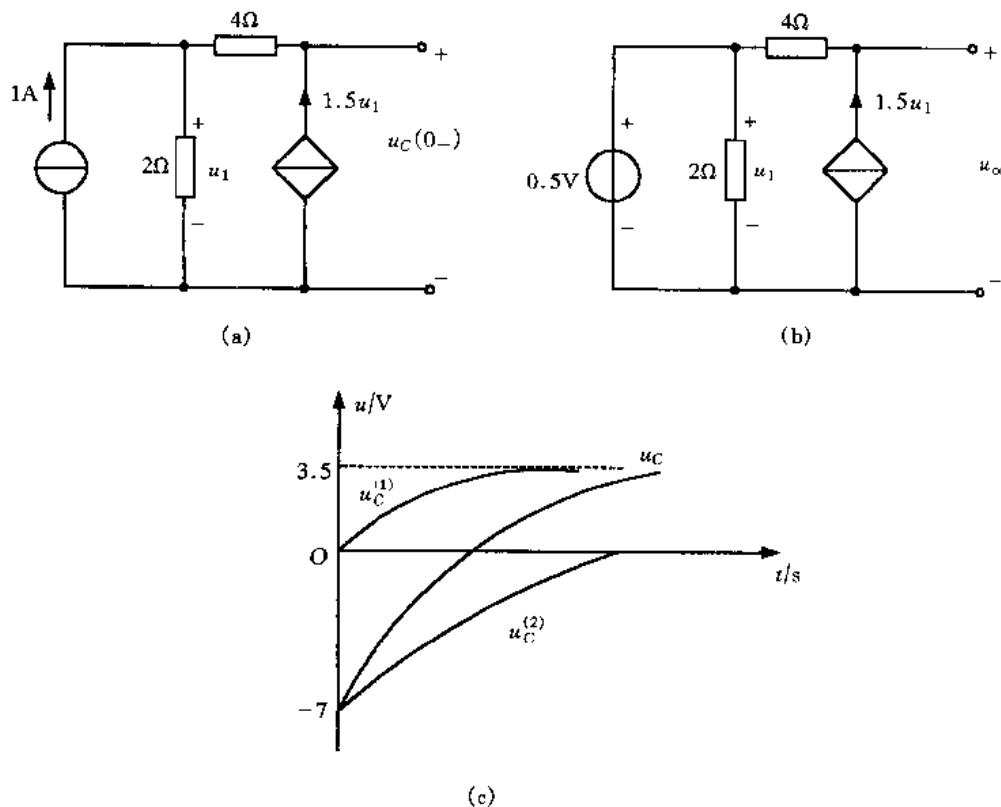
全响应

$$u_C = u_C^{(1)} + u_C^{(2)} = 3.5(1 - e^{-0.5t}) - 7e^{-0.5t} = 3.5 - 10.5e^{-0.5t} \text{ V}$$

或用三要素公式

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 3.5 + [-7 - 3.5]e^{-0.5t} \\ &= 3.5 - 10.5e^{-0.5t} \text{ V} \end{aligned}$$

波形图如例图 3.1.12(c)所示。



例图 3.1.12

例 3.1.11 例图 3.1.13 所示电路中, 已知电压 $u_s = 200\cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$, (1) 当 S_2 闭合, 电路达到稳态后, $t=0$ 时将 S_1 闭合, 求: (1) $i_C(0_+)$; (2) 若 S_2 打开, S_1 闭合已久, 当 u_s 为负最大值时再将 S_2 闭合, 求: 此时刻的电流 i_1 。

解 (1) S_2 闭合电路达稳态时, 电容上电压为零。

所以

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$i_C(0_+) = \frac{u_s(0_+)}{20} = \frac{200\cos 60^\circ}{20} = 5 \text{ A}$$

(2) S_2 闭合前电路已处于稳态, 电容电压为正弦稳态解。

$$\dot{U}_{Cm} = \frac{200 \angle 60^\circ}{20 - j20} \times (-j20) = \sqrt{2}100 \angle 15^\circ \text{ V}$$

$$u_C = \sqrt{2}100\cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V}$$

设 $t = t_1$ 时 u_s 为负的最大值

$$u_s(t_1) = 200\cos(\omega t_1 + 60^\circ) = -200 \text{ V}$$

由此得到

$$\cos(\omega t_1 + 60^\circ) = -1$$

所以

$$\omega t_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

此时刻对应的电容电压的瞬时值为

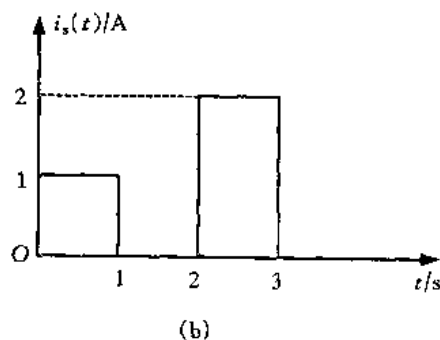
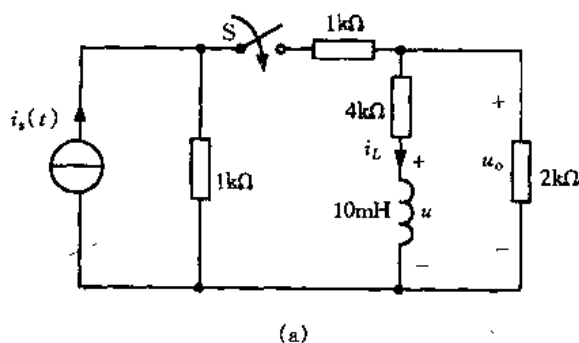
$$u_C(t_1) = \sqrt{2}100\cos(\omega t_1 + 15^\circ) = \sqrt{2}100\cos(120^\circ + 15^\circ) = -100 \text{ V}$$

由于

$$u_C(t_{1+}) = u_C(t_{1-}) = -100 \text{ V}$$

$$i_1(t_{1+}) = \frac{u_s(t_{1+}) - u_C(t_{1+})}{20} = \frac{-200 + 100}{20} = -5 \text{ A}$$

例 3.1.12 例图 3.1.14(a) 所示电路中, 已知电流源 $i(t)$ 的波形如图(b) 所示, 试求开关 S 闭合后, 电压 $u_o(t)$ 在 $t \in (2, 3)$ 区间的表达式。



例图 3.1.14

解 先求电感以外部分的戴维宁等效电路

$$u_{\infty} = i_s(t) \times \frac{1 \times 10^3}{(1+3) \times 10^3} \times 2 \times 10^3 = 500i_s(t)$$

而

$$i_s(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3) \text{ A}$$

$$R_{eq} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

在 $t \in (1, 2)$ 期间, 由于 $1 \gg 5\tau$, 可认为过渡过程已结束, 所以

$$i_L(t) = \frac{2(t-2) \times 500}{5 \times 10^3} (1 - e^{-\frac{(t-2)}{\tau}}) = 0.2(1 - e^{-5 \times 10^5(t-2)}) \text{ A}$$

$$\begin{aligned} u_o(t) &= 4 \times 10^3 \times i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \\ &= 4 \times 10^3 \times 0.2(1 - e^{-5 \times 10^5(t-2)}) + 10 \times 10^{-3} \frac{d}{dt} [0.2(1 - e^{-5 \times 10^5(t-2)})] \\ &= [800 + 200e^{-5 \times 10^5(t-2)}] \text{ V} \end{aligned}$$

例 3.1.13 例图 3.1.15 所示电路中, 已知 $u_C(0_-) = 1 \text{ V}$, $i_L(0_-) = 2 \text{ A}$, 电路激励为阶跃电流源, 求电压 u_{ab} 。

解

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1 \text{ V}$$

$$u_C(\infty) = 2 \text{ V}$$

$$\tau_1 = RC = 2 \times 0.5 = 1 \text{ s}$$

所以

$$u_C(t) = 2 + (1 - 2)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 - e^{-t} \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

$$i_L(\infty) = 1 \text{ A}$$

$$\tau_2 = \frac{L}{R} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ s}$$

所以

$$i_L(t) = 1 + (2 - 1)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + e^{-2t} \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -2e^{-2t} \text{ V}$$

$$u_{ab} = u_C + u_L = 2 - e^{-t} + L \frac{di_L}{dt} = 2 - e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ V}$$

例 3.1.14 例图 3.1.16(a) 所示电路中, 已知理想回转器的回转电阻 $r = 1 \text{ k}\Omega$, 试求阶跃响应 $u_2(t)$ 。

解 电容 C 经回转器回转为电感 L , 如图示

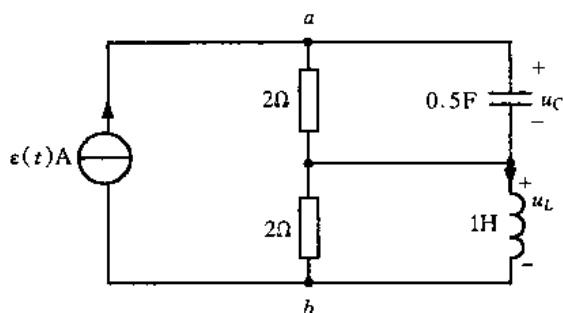
$$L = r^2 C = (1000)^2 \times 1 \times 10^{-6} = 1 \text{ H}$$

电流 i_1 为零状态响应

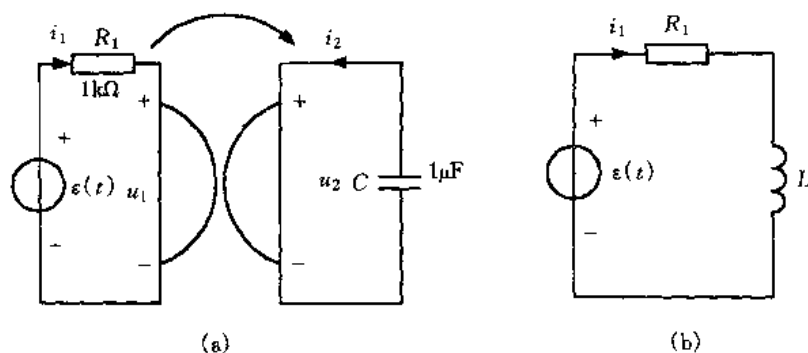
$$i_1(t) = \frac{1}{10^3} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10^{-3} (1 - e^{-10^3 t})$$

根据回转器方程:

$$u_1 = -ri_2$$



例图 3.1.15



例图 3.1.16

$$u_2 = -ri_1$$

所以

$$u_2 = ri_1 = 1\,000 \times 10^{-3}(1 - e^{-10^3 t}) = 1 - e^{-10^3 t} \text{ V}$$

例 3.1.15 例图 3.1.17 所示电路为含理想运放的电路,试计算电容电压的单位阶跃响应和单位冲激响应。

解 先求电容以外部分的戴维宁等效电路,由于该部分为同相比值电路,所以当 $u_s(t) = \varepsilon(t)$ 时

$$u_\infty = \frac{R_3}{R_1} u_s(t) = \frac{3 \times 10^3}{1 \times 10^3} \varepsilon(t) = 3\varepsilon(t) \text{ V}$$

当 $u_s(t) = \delta(t)$ V 时

$$u_\infty = 3\delta(t) \text{ V}$$

等效电阻 $R_{eq} = 3 \text{ k}\Omega$

$$\text{时间常数 } \tau = 3 \times 10^3 \times \frac{1}{3} \times 10^{-6} = 10 \times 10^{-3}$$

s

阶跃响应

$$s(t) = 3(1 - e^{-\frac{1}{10^{-3}}t})\varepsilon(t) = 3(1 - e^{-10^3 t})\varepsilon(t) \text{ V}$$

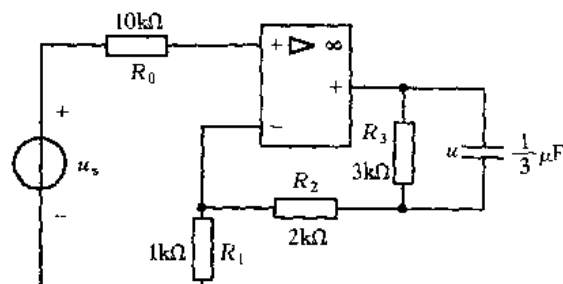
$$\text{冲激响应: } h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 3\,000e^{-10^3 t}\varepsilon(t) \text{ V}$$

例 3.1.16 例图 3.1.18 所示电路为含有理想运放的电路,设 $u_C(0_-) = 0$,求 $t = 2 \text{ s}$ 时电流 i_o 的值。

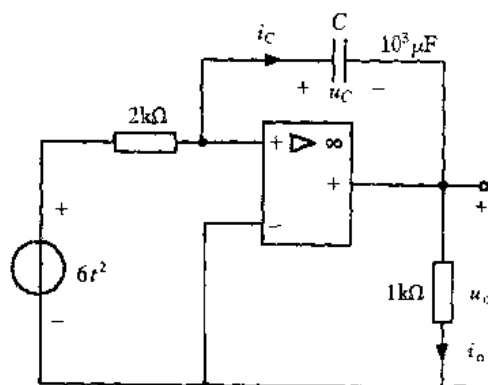
$$\text{解 } u_o = -u_C$$

$$\text{而 } u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\zeta) d\zeta$$

流过电容的电流



例图 3.1.17



例图 3.1.18

$$i_C(t) = \frac{6t^2}{2 \times 10^3} = 3 \times 10^{-3} t^2 \text{ A}$$

所以

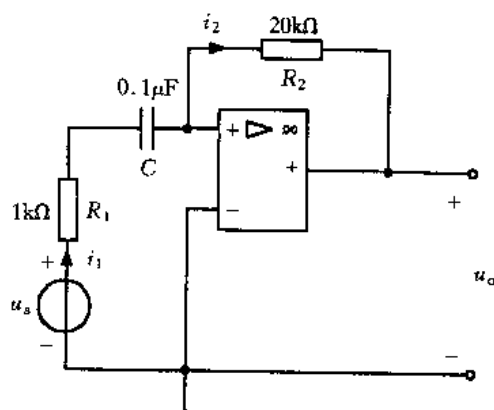
$$u_C = \frac{1}{10^{-3}} \int_0^t 3 \times 10^{-3} \zeta^2 d\zeta = t^3 \text{ V}$$

$t = 2 \text{ s}$ 时, $u_C(2) = 2^3 = 8 \text{ V}$

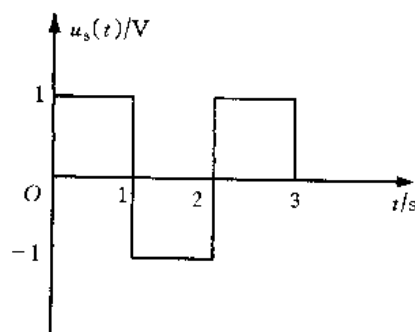
所以

$$i_o(2) = \frac{u_o(2)}{10^3} = -8 \text{ mA}$$

例 3.1.17 例图 3.1.19(a) 所示电路是含有理想运算放大器的电路, 已知 $u_C(0_-) = 0$, 电压源 $u_s(t)$ 的波形如图(b)所示, 试绘出输出电压 $u_o(t)$ 的波形。



(a)



(b)

例图 3.1.19

解 $u_o(t) = -20 \times 10^3 \times i_2 = -20 \times 10^3 \times i_1$

而 i_1 的单位阶跃响应为

$$i_1 = \frac{1}{R_1} e^{-\frac{1}{R_1 C} t} = \frac{1}{R_1} e^{-10^4 t} \epsilon(t)$$

由于

$$u_s(t) = \epsilon(t) - 2\epsilon(t-1) + 2\epsilon(t-2) - 2\epsilon(t-3) \text{ V}$$

则

$$i_1(t) = \frac{\epsilon(t)}{R_1} e^{-10^4 t} - \frac{2}{R_1} e^{-10^4(t-1)} \epsilon(t-1) + \frac{2}{R_1} e^{-10^4(t-2)} \epsilon(t-2) - \frac{2}{R_1} e^{-10^4(t-3)} \epsilon(t-3)$$

故

$$u_o(t) = -R_2 i_1$$

$$= -\frac{R_2}{R_1} e^{-10^4 t} \epsilon(t) + \frac{2R_2}{R_1} e^{-10^4(t-1)} \epsilon(t-1) - \frac{2R_2}{R_1} e^{-10^4(t-2)} \epsilon(t-2) + \frac{2R_2}{R_1} e^{-10^4(t-3)} \epsilon(t-3)$$

$$= -20e^{-10^4 t} \epsilon(t) + 40e^{-10^4(t-1)} \epsilon(t-1) - 40e^{-10^4(t-2)} \epsilon(t-2) + 40e^{-10^4(t-3)} \epsilon(t-3) \text{ V}$$

输出波形如例图 3.1.20 所示。

例 3.1.18 例图 3.1.21 所示电路原处于稳态, $t=0$ 时 S 闭合, 求 $u_2(t)$ 。

解 开关动作前电路已达稳态

$$i_1(0_-) = \frac{10}{2.5 + \frac{5 \times 5}{5 + 5}} \times \frac{1}{2} = 1 \text{ A}$$

$$i_1(0_+) = 1 \text{ A}$$

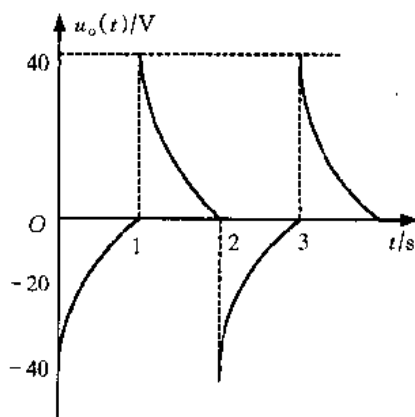
开关动作后, 电流 i_1 为零输入响应

$$i_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A}$$

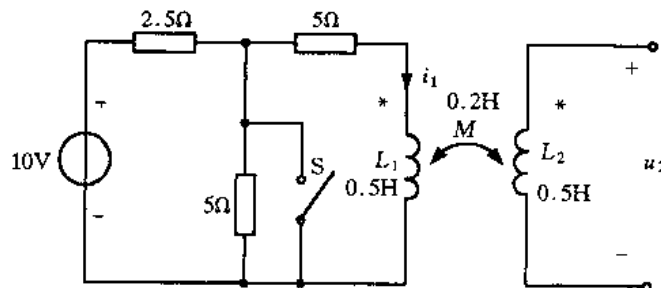
而

$$\tau = \frac{L_1}{5} = \frac{0.5}{5} = 0.1 \text{ s}$$

所以



例图 3.1.20



例图 3.1.21

$$i_1(t) = e^{-10t}$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} = 0.2 \frac{d}{dt}(e^{-10t}) = -2e^{-10t} \text{ V}$$

例 3.1.19 例图 3.1.22(a) 所示电路中, 耦合系数 $k=1$, 试求开关 S 闭合后的电流 $i_1(t), i_2(t)$ 。

解 因为耦合系数 $k=1$, 可知电路是全耦合的耦合电感电路, 其含理想变压器的等效电路如例图 3.1.22(b) 所示。匝比为

$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 0.5$$

应用理想变压器的阻抗变换关系, 可得 240Ω 电阻折算到理想变压器原边, 其折合到原边的等效电阻为 $n^2 \times 240 \Omega$

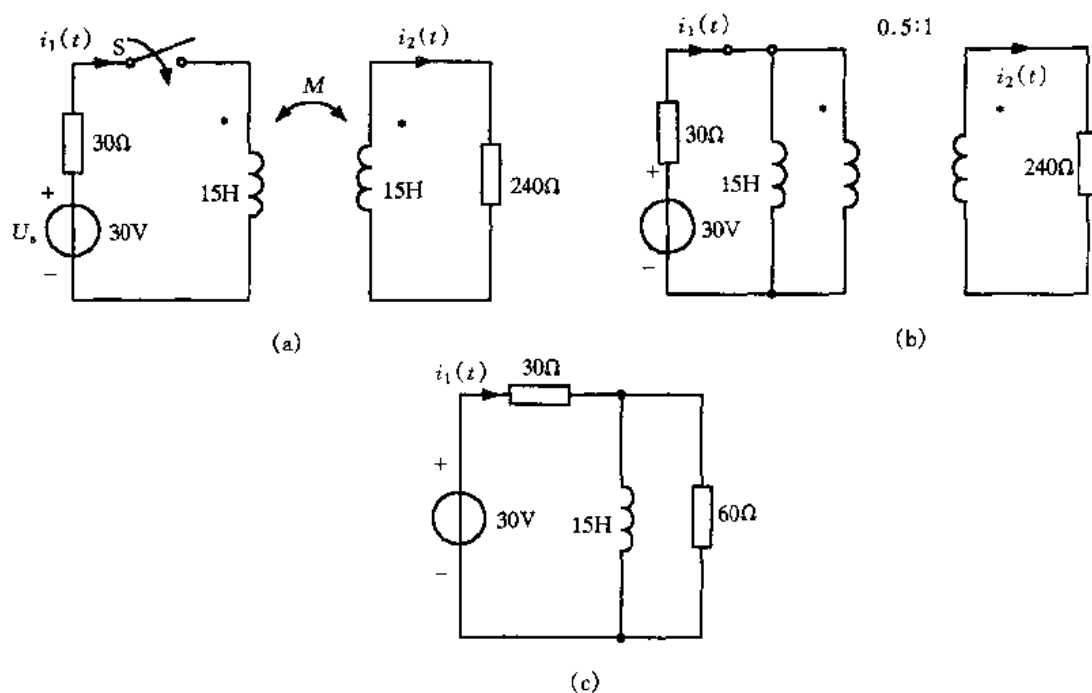
$$n^2 \times 240 = 0.5^2 \times 240 = 60 \Omega$$

电路如例图 3.1.22(c) 所示。从所给条件

$$i_L(0_+) = 0$$

则电感所在处用开路代替, 求出 $i_1(0_+)$

$$i_1(0_+) = \frac{30}{30 + 60} = \frac{1}{3} \text{ A}$$



例图 3.1.22

开关闭合达另一稳态时,由于电压源为 30 V 直流电压源,所以电感相当于短路。

$$i_1(\infty) = \frac{30}{30} = 1 \text{ A}$$

时间常数 τ

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{15}{\frac{30 \times 60}{90 + 60}} = \frac{3}{4} \text{ s}$$

应用三要素公式

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)e^{-\frac{4}{3}t} = 1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{4}{3}t} \end{aligned}$$

根据理想变压器原副边电流关系

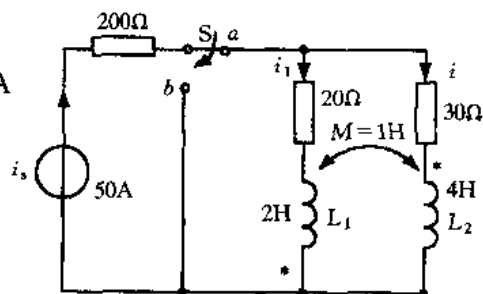
$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{1}{n}$$

$$i_2(t) = ni_1(t) = 0.5 \times \left(1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{4}{3}t}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}t} \text{ A}$$

例 3.1.20 例图 3.1.23 所示电路,原已达稳态, $t=0$ 时开关 S 由位置 a 打向位置 b,求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。设电源 $i_s(t)=50 \text{ A}$ 。

解 开关动作前

$$i(0_-) = 50 \times \frac{20}{20 + 30} = 20 \text{ A}$$



例图 3.1.23

$$i_1(0_-) = 50 \times \frac{30}{20+30} = 30 \text{ A}$$

换路后两电感串联

$$L' = L_1 + L_2 + 2M = 2 + 4 + 2 = 8 \text{ H}$$

根据换路前后磁通链守恒定律有

$$L_2 i(0_-) - L_1 i_1(0_-) + M i(0_-) - M i_1(0_-) = L' i(0_+)$$

$$4 \times 20 - 2 \times 30 + 1 \times 20 - 1 \times 30 = 8 \times i(0_+)$$

$$i(0_+) = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ A}$$

$$\tau = \frac{L'}{R} = \frac{8}{50} \text{ s}$$

所以

$$i(t) = 1.25e^{-\frac{50}{8}t} = 1.25e^{-6.25t} \text{ A}$$

例 3.1.21 已知 RL 串联电路的时间常数 $\tau = 1 \text{ ms}$, $L = 1 \text{ H}$, 在不改变电流响应的情况下, 欲使电感电压减少一半, 求所需的新电感和电阻的数值。

解 因为 $\tau = \frac{L}{R}$, 而 $L = 1 \text{ H}$, $\tau = 1 \text{ ms}$

所以 $R = \frac{L}{\tau} = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} = 1000 \Omega$

因为 $i(t)$ 不变, 所以 $\frac{di(t)}{dt}$ 不变, τ 不变, $u_L = L \frac{di}{dt}$, 若使 u_L 减少一半, 则 L 必须为原值的 $\frac{1}{2}$, 为使 $i(t)$ 不变电阻亦应为原来的 $\frac{1}{2}$ 。

所以 $L_1 = \frac{1}{2} \text{ H}$, $R_1 = 500 \Omega$ 。

例 3.1.22 例图 3.1.24 所示电路开关动作前已达稳态, 设 $t = 0$ 时开关 S 闭合, 已知 $t = t_1$ 时, $u_C(t_1) = 2 \text{ V}$, $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t_1} = 10 \text{ (V/s)}$, 求电容参数 C 。

解 设 u_C 为全响应, 根据三要素公式

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t_1) = 2 \text{ V}, u_C(\infty) = 3 \text{ V}$$

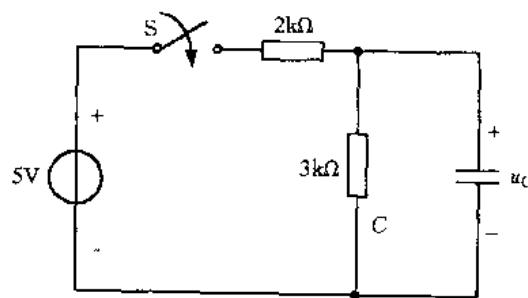
$$\tau = \frac{2 \times 3}{2 + 3} \times 10^3 \times C = 1200C$$

所以有

$$2 = 3 + [u_C(0_+) - 3]e^{-\frac{t_1}{1200C}}$$

即 $[u_C(0_+) - 3]e^{-\frac{t_1}{1200C}} = -1$, 又有 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t_1} = 10$, 得

$$\frac{d}{dt} \{ u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{1200C}} \} = -\frac{1}{1200C} [u_C(0_+) - 3]e^{-\frac{t}{1200C}}$$



例图 3.1.24

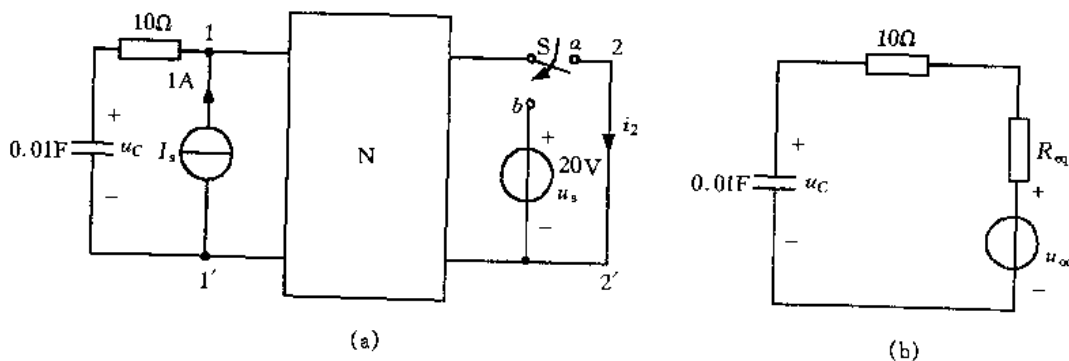
当 $t = t_1$ 时有

$$-\frac{1}{12000C}[u_C(0_+) - 3]e^{-\frac{1}{12000C}t_1} = 10$$

联立(1),(2)两式解得

$$C = \frac{1}{12000} \text{ F}$$

例 3.1.23 图示电路中网络 N 仅由线性电阻组成, 开关 S 在位置 a 闭合已久, 已知 $u_C(0_-) = 10 \text{ V}$, $i_2(0_-) = 0.2 \text{ A}$, $t = 0$ 时, 开关合向 b, 求 $t > 0$ 时的 $u_C(t)$ 。



例图 3.1.25

解 $u_C(0_+) = 10 \text{ V}$ 。根据叠加定理 1-1' 端口的开路电压是由 1 A 电流源和 u_s 共同作用产生的。1 A 电流源单独作用时产生的电压 $u_{\infty}^{(1)} = u_C(0_-) = 10 \text{ V}$, u_s 在 1-1' 产生的开路电压通过互易定理求得。因 1 A 电流源单独作用时在 2-2' 产生电流为 0.2 A, 所以将 1 A 电流源互易到 2-2', 再扩大 20 倍, 即相当于 u_s 在 1-1' 产生的开路电压 $u_{\infty}^{(2)} = \frac{20}{1} \times 0.2 = 4 \text{ V}$

所以

$$u_{\infty} = u_{\infty}^{(1)} + u_{\infty}^{(2)} = 14 \text{ V}$$

网络 N 的输入电阻为

$$R_{\text{eq}} = \frac{u_C(0_-)}{I_s} = \frac{u_{\infty}^{(1)}}{I_s} = \frac{10}{1} = 10 \Omega$$

参看例图 3.1.25(b)

$$\tau = (R_{\text{eq}} + 10)C = 20 \times 0.01 = 0.2 \text{ s}$$

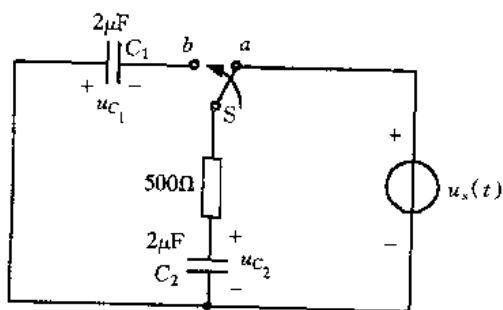
$$u_C(\infty) = u_{\infty} = 14 \text{ V}$$

所以

$$u_C(t) = 14 + (10 - 14)e^{-\frac{t}{\tau}} = 14 - 4e^{-5t} \text{ V}$$

例 3.1.24 例图 3.1.26 所示电路中, 已知 $u_s(t) = 100\sin 1000t \text{ V}$, 开关原闭合在 a, $t = 0$ 时开关由 a 合向 b。换路前电路已处于稳定状态, 且 $u_{C_1}(0_-) = 0$, 求 $t \geq 0$ 时 $u_{C_2}(t)$ 。

解 开关合在 a 时电路已达稳态, 用相量法求出电容 C_2 两端的电压 \dot{U}_{C_2}



例图 3.1.26

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C_2} &= \frac{\dot{U}_s}{R - j\frac{1}{\omega C_2}} \times \left(-j\frac{1}{\omega C_2} \right) = \frac{100 \angle -90^\circ}{500 - j\frac{1}{1000 \times 2 \times 10^{-6}}} \times \left(-j\frac{1}{1000 \times 2 \times 10^{-6}} \right) \\ &= \frac{100 \angle -90^\circ}{500 - j500} \times (-j500) = 50\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V} \\ u_{C_2} &= 50\sqrt{2} \cos(1000t - 135^\circ) \end{aligned}$$

当 $t=0$ 时

$$u_{C_2}(0_-) = 50\sqrt{2} \cos(-135^\circ) = -50 \text{ V}$$

$$u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-) = -50 \text{ V}$$

当开关闭合很久, 电路又达到稳态时, 应根据电荷守恒原理求出 $u_{C_2}(\infty)$ 。因为要达到稳态, 两电容上电压必须相等, 即有 $u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty) = u_C(\infty)$ 所以

$$C_1 u_{C_1}(\infty) + C_2 u_{C_2}(\infty) = C_2 u_{C_2}(0_+)$$

$$u_C(\infty)(C_1 + C_2) = C_2 u_{C_2}(0_+)$$

代入数据

$$u_C(\infty) = u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty) = \frac{2 \times 10^{-6} \times (-50)}{2 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-6}}$$

解得

$$u_{C_2}(\infty) = -25 \text{ V}$$

$$\tau = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \times 500 = 500 \times 10^{-6}$$

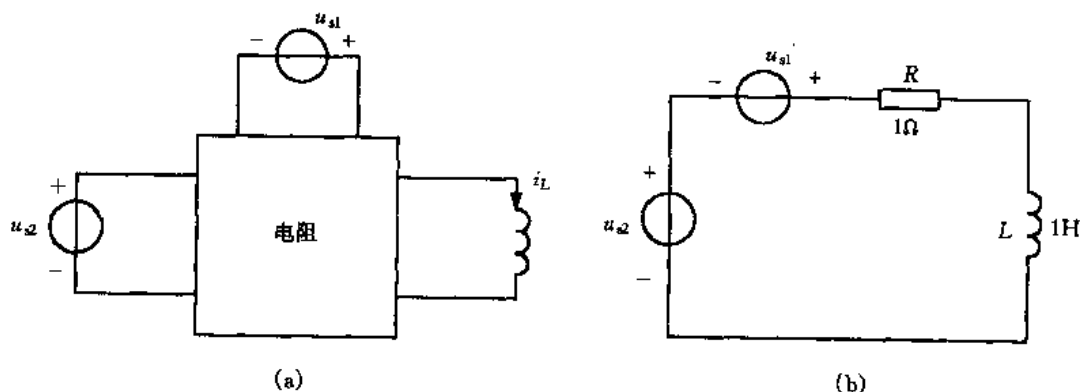
$$u_{C_2}(t) = -25 + [-50 - (-25)]e^{-\frac{1}{500 \times 10^{-6}}t} = -25(1 + e^{-2000t}) \text{ V}$$

例 3.1.26 例图 3.1.27(a) 所示电路中, 电路初始条件不详。电路中 $u_{s1}(t) = \varepsilon(t) \text{ V}$, $u_{s2}(t) = 2\cos t \varepsilon(t) \text{ V}$, 电流 $i_L(t)$ 的全响应为

$$i_L(t) = 1 - 3e^{-t} + \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) \text{ A}$$

试求: (1) 电路的初始条件;

(2) $u_{s1}(t)$ 和 $u_{s2}(t)$ 分别激励时的响应;



例图 3.1.27

(3) 试给出一等效的电路模型。

解 (1) 根据 $i_L(t) = 1 - 3e^{-t} + \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$, 将 $t=0$ 代入即可求得电路初始条件 $i_L(0_+)$

$$\begin{aligned} i_L(0_+) &= 1 - 3e^{0_+} + \sqrt{2}\cos(0_+ - \frac{\pi}{4}) \\ &= 1 - 3 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \text{ A} \end{aligned}$$

(2) 当 $u_{s1}(t) = \epsilon(t)$, 电路的零状态响应为

$$u_L^{(1)}(t) = 1 - e^{-t}$$

当 $u_{s2}(t) = 2\epsilon(t)\cos t$, 电路的零状态响应为

$$i_L^{(1)}(t) = \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) + [0 - \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4})]e^{-t} = \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4}) - e^{-t}$$

而

$$i_L(0_+) = -1 \text{ A}$$

零输入响应为

$$i_L^{(3)}(t) = -e^{-t}$$

所以 $i_L(t)$ 的全响应为

$$i_L(t) = i_L^{(1)}(t) + i_L^{(2)}(t) + i_L^{(3)}(t) = 1 - 3e^{-t} + \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$$

若给出一个最简单的等效电路如例图 3.1.27(b) 所示, 其中 $R = 1 \Omega, L = 1 \text{ H}$ 。

例 3.1.27 例图 3.1.28 所示电路, 换路前已达稳态, $t=0$ 时开关 S 打开, 欲使电路产生临界阻尼响应, R 应为何值? 并求换路后的 $u_C(t)$ 。

解 开关 S 打开后电路的临界电阻

$$R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{10^{-3}}{100 \times 10^{-6}}} = 6.32 \Omega$$

当 $R = 6.32 \Omega$ 时, 电路为临界阻尼

$$u_C = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} = 3162$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = -\delta A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{-\delta t} - \delta A_2 t e^{-\delta t} \Big|_{0_+}$$

因为

$$u_C(0_+) = [A_1 + A_2(0_+)]e^{-\delta(0_+)}$$

$$0 = A_1$$

而

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = -\frac{100}{1000C} = -1000$$

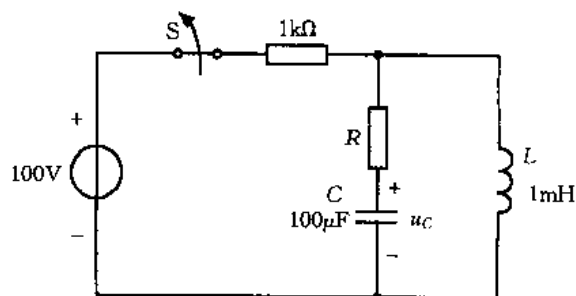
代入式 $A_2 = 1000$

所以

$$u_C(t) = -1000te^{-3162t} \text{ V}$$

例 3.1.28 例图 3.1.29 所示电路, 欲使电路产生过阻尼响应, 两线圈应怎样联接? 耦合系数 k 至少应为多少?

解 $2\sqrt{\frac{L}{C}} < 1000$, 即 $L < 2.5 \text{ mH}$



例图 3.1.28

由于 $L < L_1 + L_2$, 故两电感必须反接

$$L_1 + L_2 - 2M < 2.5$$

$$M > \frac{-2.5 + (L_1 + L_2)}{2} > 2.25 \text{ mH}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.25 \times 10^{-3}}{\sqrt{2 \times 4.5 \times 10^{-6}}} = 0.75$$

耦合系数 k 至少应为 0.75。

例 3.1.29 例图 3.1.30 所示电路, 设换路前电路已达稳定, $u_s = 200\sqrt{2}\cos(200t - 45^\circ) \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 50 \mu\text{F}$, $t = 0$ 时, S 打开, 求 $u_C(t)$ 。

解 $u_s = 200 \angle -45^\circ \text{ V}$

S 打开前

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_s}{R + j\omega L} = \frac{200 \angle -45^\circ}{100 + j200 \times 0.5} = \sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$i_L = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos(200t - 90^\circ) = 2 \sin 200t \text{ A}$$

$$u_C(0_+) = u_s(0_+) = \sqrt{2} \times 200 \cos(-45^\circ) = 200 \text{ V}$$

开关打开后

$$2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0.5}{50 \times 10^{-6}}} = 200 \Omega$$

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 电路为欠阻尼振荡放电

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{100}{2 \times 0.5} = 100$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 100\sqrt{3}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5 \times 50 \times 10^{-6}}} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \arctan \frac{\omega}{\delta} = \arctan \frac{100\sqrt{3}}{100} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

所以

$$u_C(t) = \frac{\omega_0 U_0}{\omega} e^{-\delta t} (\omega t + \beta) = 230.9 e^{-100t} \sin(173.2t + 60^\circ) \text{ V}$$

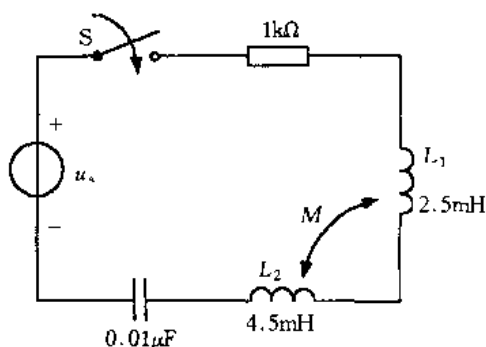
例 3.1.31 例图 3.1.31(a) 所示电路中, 激励为单位阶跃函数, 试求 $u_C(t)$ 。

解 电路中含理想变压器, 利用理想变压器的阻抗变换关系, 将副边电阻折算到原边, 原边等效电路如例图 3.1.31(b) 所示, 其中

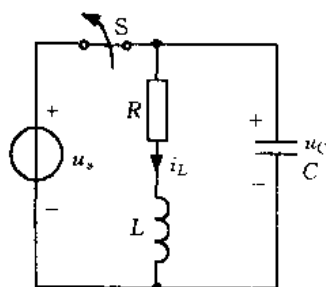
$$R = 20 + n^2 \times 50 = 220 \Omega$$

临界电阻

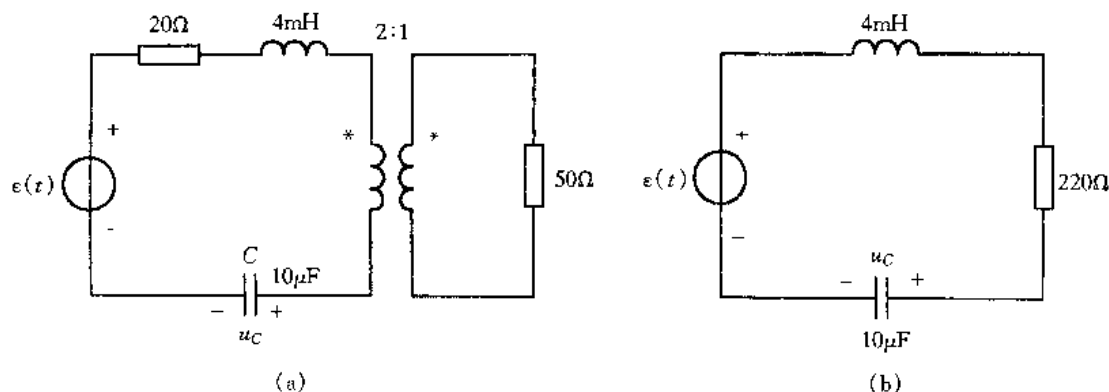
$$R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{4 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-6}}} = 40 \Omega$$



例图 3.1.29



例图 3.1.30



例图 3.1.31

所以, $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 是非振荡响应

$$u_C = u'_C + u''_C$$

$$u'_C = 1 \text{ V}$$

$$u''_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

特征根 $p_1 = -22\,500$, $p_2 = -32\,500$

根据初始条件确定 A_1, A_2

$$u_C = u' + u'' = 1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C(0_+) = 0 \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = 0$$

所以

$$0 = 1 + A_1 + A_2$$

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2$$

所以

$$A_1 = 1.25$$

$$A_2 = -2.25$$

所以

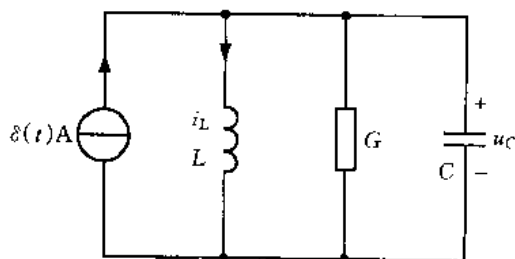
$$u_C(t) = 1 + 1.25e^{-22\,500t} - 2.25e^{-32\,500t} \text{ V}$$

例 3.1.31 例图 3.1.32 所示电路, 激励为冲激电流源, 已知 $G = 2 \text{ S}$, $L = \frac{1}{2} \text{ H}$, $C = \frac{1}{2} \text{ F}$, 试求单位冲激响应 $u_C(t)$ 。

解 由于 $t = 0$, 电感 L 开路, 电容 C 短路, 故冲激电流 $\delta(t)$ 全部流过电容 C , 使

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{0.5} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = 2 \text{ V}$$

由于 $u_L(0_+) = u_C(0_+) = 2 \text{ V}$ 为有限值, 所以 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, $t > 0$ 时, 电路微分方程为



例图 3.1.32

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

特征方程

$$LCp^2 + GLp + 1 = 0$$

特征根

$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -2$$

$$i_L(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

$$i_L(0_+) = 0$$

又因为

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_0 = \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{2}{0.5} = 4$$

所以

$$\begin{cases} 0 = (A_1 + A_2 \times 0_+)e^{-2 \times (0_+)} \\ 4 = -A_1 e^{-2(0_+)} + A_2 e^{-2 \times (0_+)} - 2A_2(0_+)e^{-2 \times (0_+)} \end{cases}$$

解得

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = 4$$

所以

$$i_L(t) = 4te^{-2t} \text{ A}$$

$$u_C(t) = u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (4te^{-2t}) \right] = [2e^{-2t} - 4te^{-2t}] \varepsilon(t) \text{ V}$$

例 3.1.32 例图 3.1.33 所示电路中, 已知 $u_{C_1}(0_-) = 10 \text{ V}$, $u_{C_2}(0_-) = 0$, 求换路后的 u_{C_2} 。

解 $t = 0_+$ 时两电容并联 $u_{C_1}(0_-) = u_{C_2}(0_+)$, 可用电荷守恒定律来求初值。

$$C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-)$$

$$\text{得 } u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = 4 \text{ V}$$

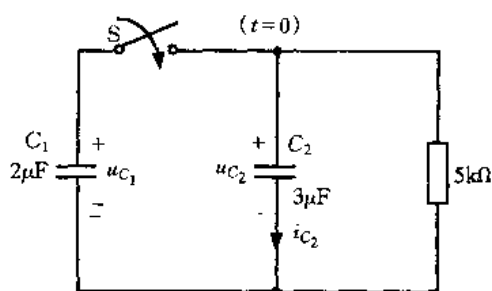
又

$$u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned} \tau &= (C_1 + C_2)R \\ &= (2 + 3) \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3 \\ &= 0.025 \text{ s} \end{aligned}$$

所以

$$u_{C_2}(t) = 4e^{-40t} \varepsilon(t) \text{ V}$$



例图 3.1.33

3.2 拉普拉斯变换

3.2.1 理论提要

经典法求解动态电路,物理概念清楚,可以用来求解简单电路的过渡过程。但对具有多个动态元件的复杂电路,由于方程组的个数较多、方程的阶数较高,直接求解微分方程就显得困难。而拉普拉斯变换法就是求解高阶复杂动态电路的行之有效的办法之一。拉普拉斯变换法又称运算法。

1. 拉普拉斯变换

(1) 拉普拉斯正变换

一个定义在 $[0, \infty]$ 区间的函数 $f(t)$,它的拉普拉斯变换式定义为

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数,称为复频率, $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的像函数, $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。通过拉普拉斯正变换将一个时域函数 $f(t)$ 变换到频域函数 $F(s)$ 。通常用符号记作 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 。

(2) 拉普拉斯反变换

如果复频域函数 $F(s)$ 已知,要求与之对应的时间函数 $f(t)$,则由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换,定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

式中 c 为正的有限常数,通常记作 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$

(3) 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换有许多重要性质,与分析线性电路有关的一些基本性质有

① 线性性质 $\mathcal{L}[A_1 f_1(t) \pm A_2 f_2(t)] = A_1 F_1(s) \pm A_2 F_2(s)$

② 微分性质 $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$

③ 积分性质 $\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$

④ 延迟性质 $\mathcal{L}[f(t-t_0)\epsilon(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

(4) 求拉普拉斯反变换的部分分式展开法

电路响应的像函数通常可以表示为两个实系数的 s 的多项式之比,即关于 s 的一个有理分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}$$

式中 m, n 为正整数,且 $n > m$,为真分式。

用部分分式展开有理分式 $F(s)$ 时,需要对分母多项式作因式分解,求出 $D(s)=0$ 的根, $D(s)=0$ 的根可以是单根、共轭复根和重根几种情况。

① 设 $D(s)=0$ 的根为 n 个单根 $p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_n$ 则 $F(s)$ 可展开为

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_i}{s-p_i} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

式中系数 $K_i = (s-p_i)F(s) \Big|_{s=p_i}$

或 $K_i = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=p_i}$

确定了各系数后, $F(s)$ 所对应的 $f(t)$ 为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

② 如果 $D(s)=0$ 具有共轭复根 $p_1 = \alpha + j\omega$, $p_2 = \alpha - j\omega$, 则

$$K_1 = [(s - \alpha - j\omega)F(s)]_{s=\alpha+j\omega} \text{ 或 } K_1 = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=\alpha+j\omega}$$

$$K_2 = [(s - \alpha + j\omega)F(s)]_{s=\alpha-j\omega} \text{ 或 } K_2 = \frac{N(s)}{D'(s)} \Big|_{s=\alpha-j\omega}$$

K_1, K_2 为共轭复数, 设 $K_1 = |K_1| e^{j\theta_1}$, 则 $K_2 = |K_1| e^{-j\theta_1}$, $F(s)$ 所对应的 $f(t)$ 为

$$f(t) = 2|K_1| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta_1)$$

③ 如果 $D(s)$ 具有 q 阶重根, $F(s)$ 的部分分式为

$$F(s) = \frac{K_{1q}}{s-p_1} + \frac{K_{1(q-1)}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1i}}{(s-p_1)^i} + \cdots + \frac{K_{11}}{(s-p_1)^q}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{(i-1)}}{ds^{(i-1)}} [F(s)(s-p_1)^i]_{s=p_1}$$

式中 $i=1, 2, \cdots, q$ 。

2. 电路定律及元件伏安关系的运算形式

将时域形式的电路定律及元件伏安关系进行拉氏变换, 就得到电路定律和元件伏安关系的运算形式。主要有

$$\text{KCL} \quad \sum i = 0 \longrightarrow \sum I(s) = 0$$

$$\text{KVL} \quad \sum u = 0 \longrightarrow \sum U(s) = 0$$

$$\text{VCR} \quad u_R = Ri_R \longrightarrow U_R(s) = RI_R(s)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \longrightarrow U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$

$$u_C = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C dt \longrightarrow U_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{1}{sC} I_C(s)$$

将电路元件用相对应的运算关系表示, 就得到了元件的运算电路模型。如图 3.2.1 所示。在运算电路图中, 动态元件的非零独立初始条件用与之相应的电源等效, 它们称为附加电源, 要特别注意它们的参考方向。

3. 应用拉普拉斯变换分析动态电路

用运算法分析动态电路的步骤为:

- (1) 根据换路前的电路, 求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$, 用于确定运算电路中的附加电源。
- (2) 画出正确的运算电路图。
- (3) 应用电路分析的一般方法, 如结点法、回路法或应用电路定理求出响应的像函数。

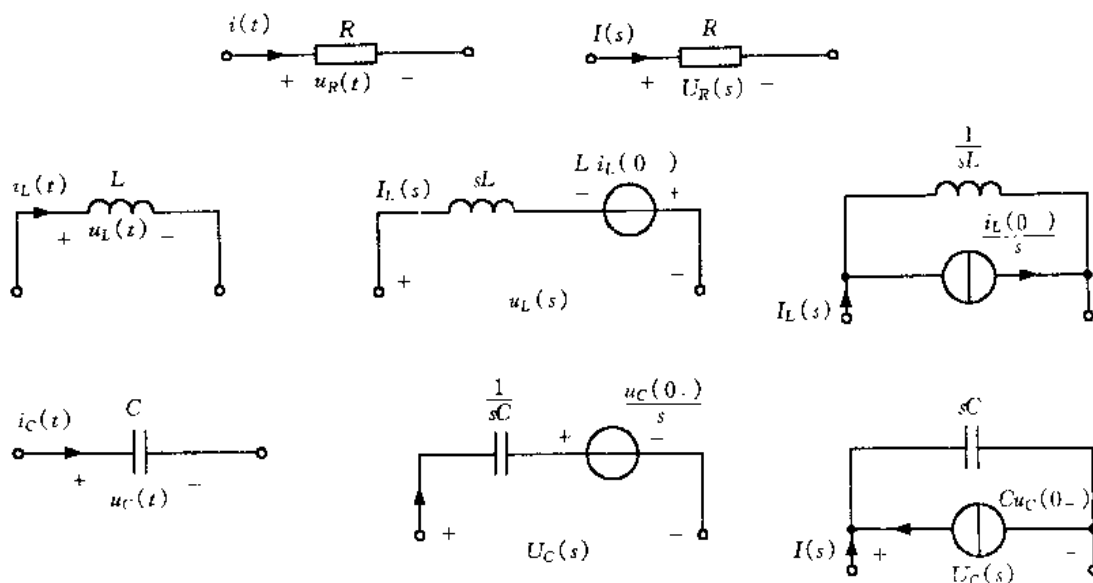


图 3.2.1

(4) 利用拉普拉斯反变换,求得时域响应。

4. 网络函数

(1) 网络函数的定义与零点、极点

电路在单一的独立源激励下,其零状态响应的像函数 $R(s)$ 与激励 $e(t)$ 的像函数 $E(s)$ 之比定义为该电路的网络函数 $H(s)$,即

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

由于网络函数的分子和分母都是 s 的多项式,故其一般形式可写为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= H_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_i)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_i)\cdots(s-p_n)} \end{aligned}$$

式中 H_0 为一常数, z_1, z_2, \cdots, z_m 为网络函数的零点; p_1, p_2, \cdots, p_n 为网络函数的极点;将网络函数的零点与极点在 s 平面上表示出来,就得到网络函数的零点、极点分布图。

(2) 网络函数与频率响应间的关系

如果令网络函数 $H(s)$ 中的复频率 s 等于 $j\omega$,分析 $H(j\omega)$ 随 ω 变化的情况就可以预见网络函数在正弦稳态情况下的频率特性。

(3) 网络函数与冲激响应间的关系

网络函数是单位冲激响应的像函数,单位冲激响应是网络函数的像函数,即

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

由于一般情况下 $h(t)$ 的特性就是时域响应中自由分量的特性,所以分析网络函数的极点与冲激响应的关系,就可预见时域响应的特点。

5. 卷积积分

(1) 应用卷积积分求电路响应

设电路的单位冲激响应为 $h(t)$, 则该电路对任意激励 $e(t)$ 的零状态响应 $r(t)$ 可以通过以下积分求得

$$r(t) = \int_0^t e(t-\zeta)h(\zeta)d\zeta$$

上式所示积分即为卷积积分, 简称卷积, 还可写作 $e(t) * h(t)$ 。卷积是一种通过积分直接获得动态电路时域响应的方法。

(2) 应用卷积定理求电路响应

函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 其像函数分别为 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$, 有

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\zeta)f_2(\zeta)d\zeta\right] = F_1(s)F_2(s)$$

上式是拉普拉斯变换的卷积定理

可以应用卷积定理求电路响应。设外施激励 $e(t)$ 的像函数为 $E(s)$, 网络响应为 $R(s)$, 网络函数为 $H(s)$, 则

$$R(s) = E(s)H(s)$$

求 $R(s)$ 的反变换, 得到时域响应

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)H(s)] = \int_0^t e(\zeta)h(t-\zeta)d\zeta$$

上式还可写为

$$r(t) = \int_0^t e(t-\zeta)h(\zeta)d\zeta$$

3.2.2 典型题解析

例 3.2.1 试计算: (1) $f(t) = 1 - e^{-\beta t}$; (2) $f(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t$ 的像函数。

解 (1) 已知 $f(t) = 1 - e^{-\beta t}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[1 - e^{-\beta t}] = \int_{0_-}^{\infty} (1 - e^{-\beta t})e^{-st}dt \\&= \int_{0_-}^{\infty} e^{-st}dt - \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s+\beta)t}dt \\&= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} - \frac{1}{s+\beta}e^{-(s+\beta)t}\Big|_{0_-}^{\infty} \\&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\beta} = \frac{\beta}{s(s+\beta)}\end{aligned}$$

(2) 已知 $f(t) = e^{-\beta t} \sin \omega t = e^{-\beta t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{1}{2j} [e^{-(\beta-j\omega)t} - e^{-(\beta+j\omega)t}]$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[e^{-\beta t} \sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{-(\beta-j\omega)t} - e^{-(\beta+j\omega)t})\right] \\&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s + (\beta - j\omega)} - \frac{1}{s + (\beta + j\omega)} \right] \\&= \frac{1}{2j} \left[\frac{2j\omega}{(s + \beta)^2 + \omega^2} \right] = \frac{\omega}{(s + \beta)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

例 3.2.2 求 (1) $F(s) = \frac{2s^2 + 2s + 2}{s^2 + s + 1}$; (2) $F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)^2(s+2)}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解 (1) $F(s) = \frac{2s^2 + 2s + 2}{s^2 + s + 1} = 2 + \frac{1}{s^2 + s + 1}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{1}{s^2 + s + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}[2] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + s + 1}\right]$$

$$= 2\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] = 2\delta(t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

(2) 令 $F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)}$

$D(s)=0$ 的根 $p_1, p_2 = -1, p_2 = -2$, 因为有重根, 所以

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+1)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

根据

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [F(s)(s-p_1)^i]_{s=p_1}$$

求得

$$K_1 = -2$$

$$K_2 = 3$$

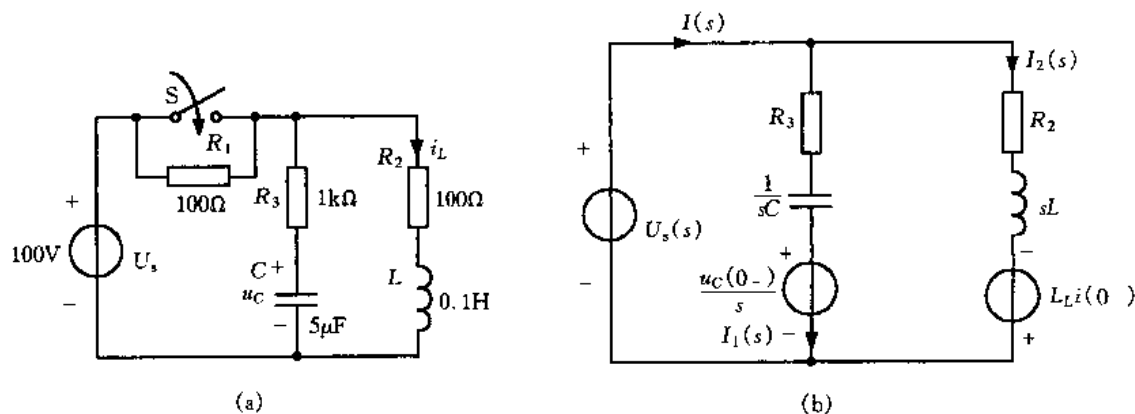
$s = -2$ 是单根, 求得 $K_3 = 3$

所以

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+2}\right]$$

$$= -2e^{-t} + 3te^{-t} + 3e^{-2t}$$

例 3.2.3 例图 3.2.1(a) 所示电路, 电压源为直流 100 V, 开关 S 原打开, 电路已达稳态, $t=0$ 时开关 S 闭合, 试求 $t>0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 、电感电流 $i_L(t)$ 、电总电流 $i(t)$ 。



例图 3.2.1

解 按照运算法求电路响应的步骤, 首先求 $u_C(0_-), i_L(0_-)$, 进而求得 $u_C(0_+), i_L(0_+)$

$$u_C(0_-) = \frac{100}{100 + 100} \times 100 = 50 \text{ V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{100}{100 + 100} = 0.5 \text{ A}$$

即

$$u_C(0_+) = 50 \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = 0.5 \text{ A}$$

画出运算电路图如例图 3.2.1(b)所示,从运算电路图可知,电阻与电容串联、电阻与电感串联的支路分别并联在电压源上。

$$I_1(s) = \frac{U_s(s) - \frac{u_C(0_-)}{s}}{R_3 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{100}{s} - \frac{50}{s}}{1000 + \frac{1}{s \times 5 \times 10^{-6}}} = \frac{0.05}{s + 200}$$

$$I_2(s) = \frac{\frac{100}{s} + Li_L(0_-)}{R_3 + sL} = \frac{\frac{100}{s} + 0.1 \times 0.5}{100 + s \times 0.1} = \frac{1000 + 0.5s}{s(s + 1000)}$$

$$u_C(s) = \frac{1}{sC} I_1(s) + \frac{u_C(0_-)}{s} = \frac{2 \times 10^4 + 50s}{s(s + 200)}$$

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2 \times 10^4 + 50s}{s(s + 200)}\right]$$

$$= 100 - 50e^{-200t} \text{ V}$$

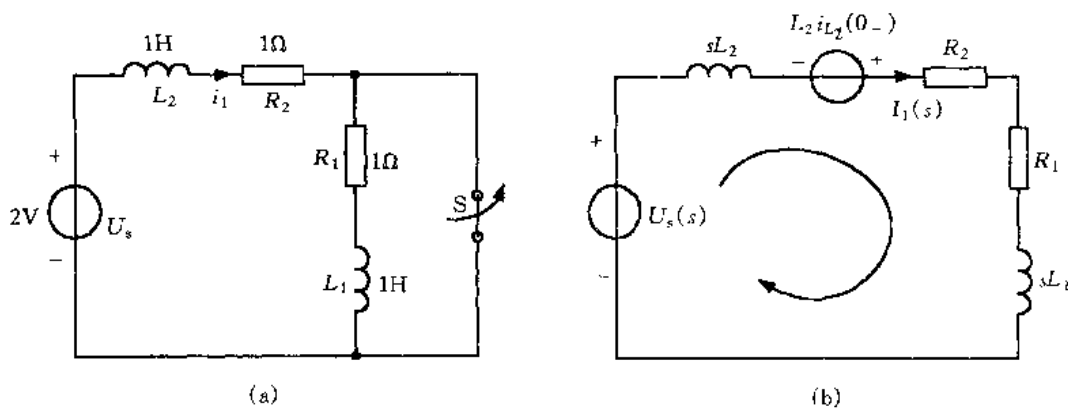
$$i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1000 + 0.5s}{s(s + 1000)}\right]$$

$$= 1 - 0.5e^{-1000t} \text{ A}$$

$$i_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(s)] = 0.05e^{-200t}$$

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = 1 - 0.5e^{-1000t} + 0.05e^{-200t} \text{ A}$$

例 3.2.4 例图 3.2.2(a)所示电路中,电压源 U_s 为直流电压源,开关 S 原闭合。若 $t = 0$ 时打开开关 S,试求 $t \geq 0$ 时的 $i_1(t)$ 。



例图 3.2.2

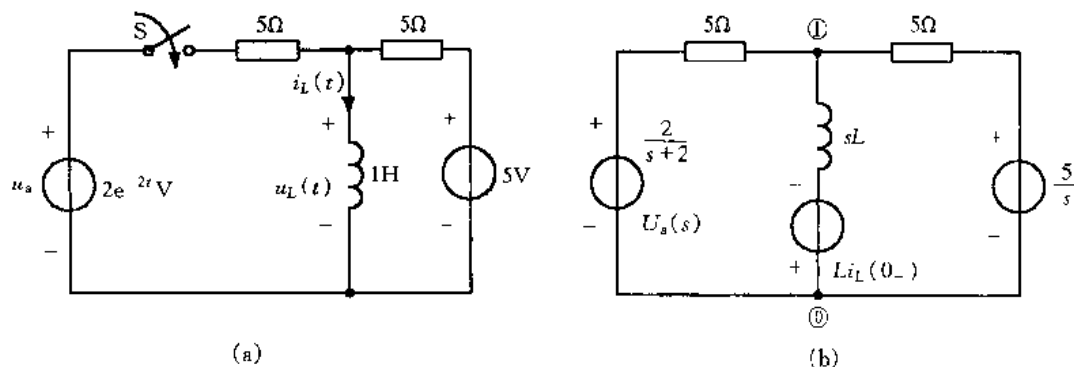
解 根据已知条件求得 $i_{L_2}(0_-) = \frac{U_s}{R_2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ A}$ 作出运算电路图如例图 3.2.2(b)所示。

$$I_1(s) = \frac{U_s(s) + L_2 i_{L_2}(0_-)}{R_1 + R_2 + sL_1 + sL_2} = \frac{\frac{2}{s} + 1 \times 2}{1 + 1 + s + s} = \frac{1}{s}$$

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(s)] = \epsilon(t) \text{ A}$$

在 $t=0$ 时电感 L_1 的电流和电感 L_2 的电流都发生了跃变, 由于拉氏变换积分下限为 0_- , 所以, 在计算有跃变发生的问题时就显得简单。否则, 用经典法求解此题, 则要用磁通链守恒来计算电感电流在 $t=0_+$ 时刻的值。

例 3.2.5 例图 3.2.3(a) 所示电路, 开关 S 原打开, 电路已达稳态。 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t>0$ 时的 $u_L(t)$ 。



例图 3.2.3

解 $i_L(0_-) = \frac{5}{5} = 1 \text{ A}$

运算电路图如例图 3.2.3(b) 所示, 列出结点①方程, 结点电压 $U_1(s)$ 即 $U_L(s)$

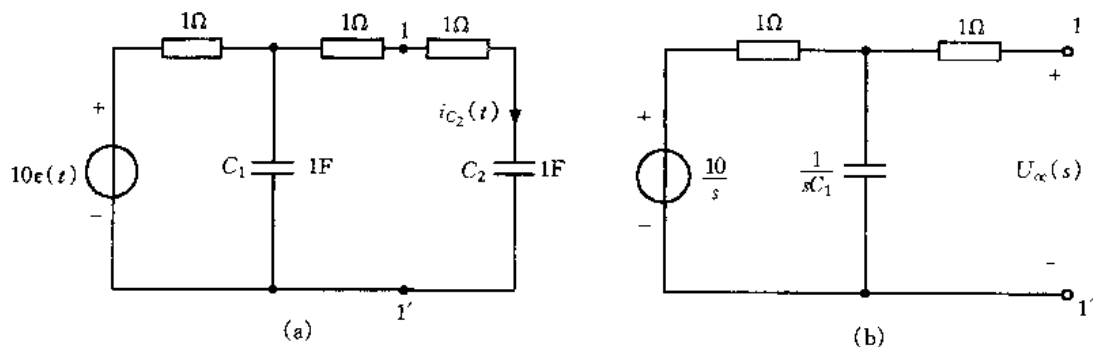
$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{sL}\right)U_L(s) = \frac{\frac{2}{s+2}}{5} + \frac{5}{s} - \frac{Li_L(0_-)}{sL}$$

将 $L=1 \text{ H}$, $i_L(0_-)=1 \text{ A}$ 代入上式, 解得

$$U_L(s) = \frac{2s}{(s+2)(2s+5)}$$

$$u_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_L(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s+2)(2s+5)}\right] = 5e^{-2.5t} - 4e^{-2t} \text{ V}$$

例 3.2.6 已知例图 3.2.4(a) 所示电路, 试求电流 $i_{C_2}(t)$ 。



例图 3.2.4

解 画出运算电路如例图 3.2.4(b)所示,求 1-1' 端左边的戴维宁等效电路。

$$U_{oc}(s) = \frac{\frac{10}{s}}{1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{1}{sC_1} = \frac{10}{s(s+1)}$$

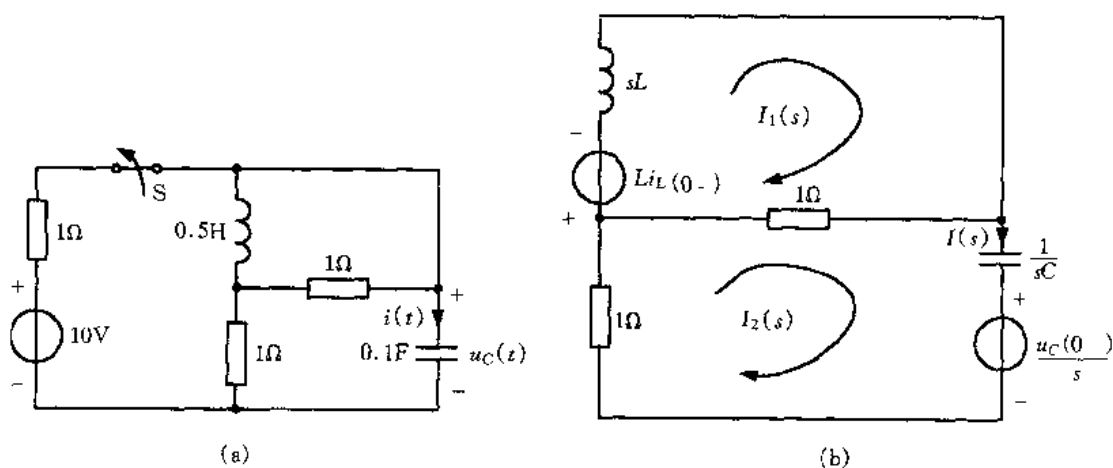
$$Z_{eq} = 1 + \frac{1 \times \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{s+2}{s+1}$$

将待求支路接上

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{U_{oc}(s)}{Z_{eq}(s) + 1 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{\frac{s+2}{s+1} + \frac{1}{s} + 1} = \frac{10}{2s^2 + 4s + 1} \\ &= \frac{10}{2(s + \frac{2+\sqrt{2}}{2})(s + \frac{2-\sqrt{2}}{2})} \end{aligned}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = 2.5\sqrt{2}e^{-t}[e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}]$$

例 3.2.7 电路如例图 3.2.5(a)所示,电路原处于稳态,已知电源为直流电源 $U_s = 10\text{ V}$, $t=0$ 时开关 S 打开,试求 $t>0$ 时的 $i(t)$, $u_C(t)$ 。



例图 3.2.5

解 从已知条件求得 $i_L(0_-) = \frac{10}{1+1} = 5\text{ A}$

$$u_C(0_-) = \frac{10}{1+1} = 5\text{ V}$$

运算电路如例图 3.2.5(b)所示,列出网孔方程

$$\begin{aligned} (sL + 1)I_1(s) - I_2(s) &= -Li_L(0_-) \\ -I_1(s) + (1 + 1 + \frac{1}{sC})I_2(s) &= -\frac{u_C(0_-)}{s} \end{aligned}$$

代入参数

$$\begin{aligned}(0.5s + 1)I_1(s) - I_L(s) &= -2.5 \\ -I_1(s) + (2 + \frac{10}{s})I_2(s) &= -\frac{5}{s}\end{aligned}$$

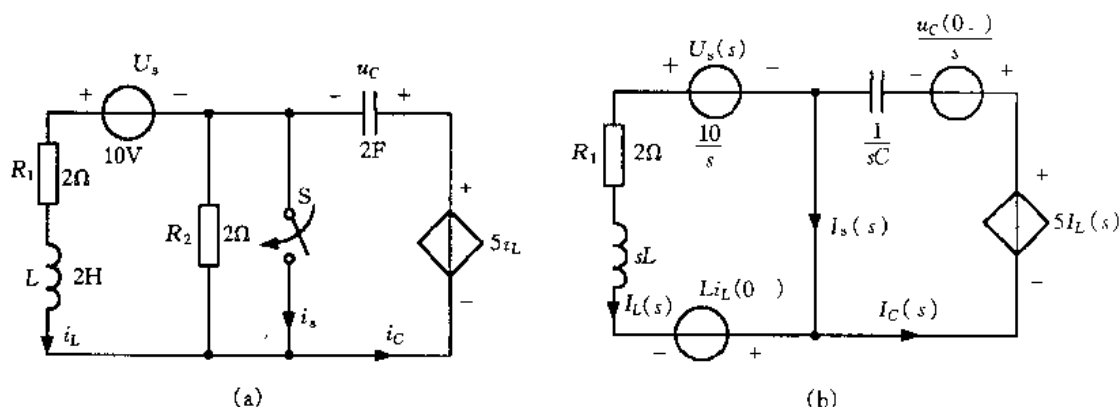
解得

$$I_2(s) = I(s) = \frac{-5(s+3) + 10}{(s+3)^2 + 1}$$

求其反变换

$$\begin{aligned}i(t) &= \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = 11.2e^{-3t}\cos(t + 116.6^\circ) \text{ A} \\ U_C(s) &= \frac{u_C(0_-)}{s} + I(s) \frac{1}{sC} = \frac{5}{s} + \frac{-5(s+1)}{s^2 + 6s + 10} \frac{1}{s \times 0.1} \\ &= \frac{5s^2 - 20s}{s(s^2 + 6s + 10)} = \frac{5(s-4)}{s^2 + 6s + 10} \\ &= \frac{5(s+3)}{(s+3)^2 + 1} - \frac{35}{(s+3)^2 + 1} \\ u_C(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5(s+3)}{(s+3)^2 + 1} - \frac{35}{(s+3)^2 + 1}\right] \\ &= 5e^{-3t}\cos t - 35e^{-3t}\sin t\end{aligned}$$

例 3.2.8 例图 3.2.6(a)所示电路原已达稳定状态。 $t=0$, 开关 S 闭合, 试求开关闭合后流过开关 S 的电流 i_{s0}



例图 3.2.6

解 首先求出

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2+2} = 2.5 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = R_1 i_L(0_-) + R_2 i_2 = 5 \times 2.5 + 2 \times 2.5 = 17.5 \text{ V}$$

$t > 0$ 的运算电路如例图 3.2.6(b)所示。由于开关 S 闭合后, 电路两边各自为独立回路, 所以

$$I_L(s) = \frac{U_s(s) + Li_L(0_-)}{R_1 + sL} = \frac{\frac{10}{s} + 2 \times 2.5}{2 + 2s} = \frac{2.5s + 5}{s(s+1)} = \frac{5}{s} - \frac{2.5}{s+1}$$

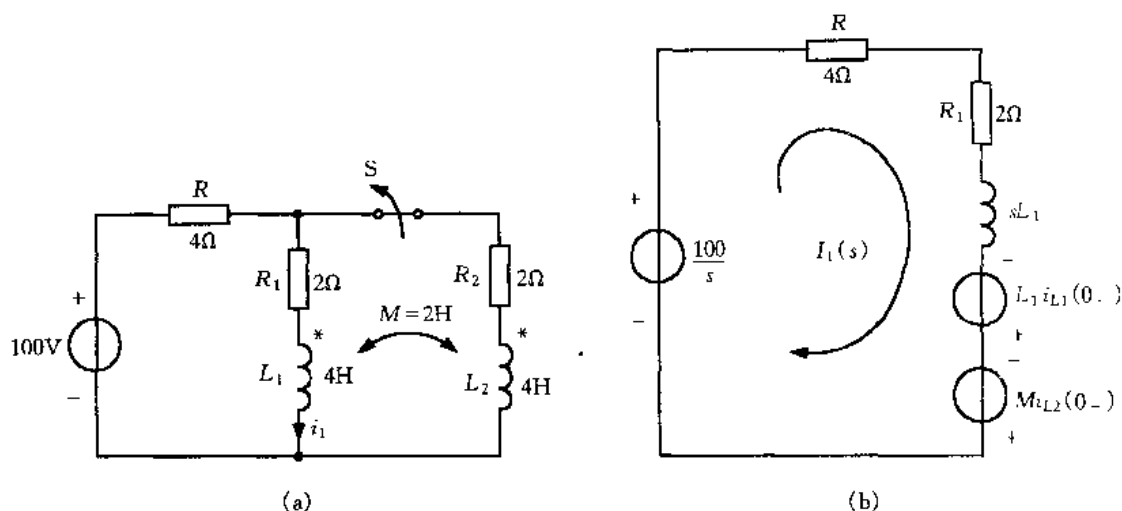
$$I_C(s) = \frac{rI_L(s) - \frac{u_C(0_-)}{s}}{\frac{1}{sC}} = \frac{5 \times (\frac{5}{s} - \frac{2.5}{s+1}) - \frac{17.5}{s}}{\frac{1}{2s}} = \frac{25}{s+1} - 10$$

$$I_s(s) = I_C(s) - I_L(s) = \frac{25}{s+1} - 10 - \frac{5}{s} + \frac{2.5}{s+1} = \frac{27.5}{s+1} - \frac{5}{s} - 10$$

$$i_s(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_s(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{27.5}{s+1} - \frac{5}{s} - 10\right] = 27.5e^{-t} - 10\delta(t) - 5 \text{ A}$$

解答中含有冲激电流,说明了在换路瞬间电容电压发生了跃变。

例 3.2.9 例图 3.2.7(a)所示电路中, $t=0$ 时 S 打开,在此之前电路处于稳态。求 $t>0$ 时的 $i_1(t)$ 。



例图 3.2.7

解 从例图 3.2.7(a)可知

$$i_{L_1}(0_-) = i_{L_2}(0_-) = 10 \text{ A}$$

题目中含有互感元件,在作运算电路时,特别要注意 $Mi(0_-)$ 项产生的原因及其方向。打开开关后另一电感支路电流为零,所以在所列回路中没有 sM 与另一支路电流的乘积,列得电路方程为

$$(R + R_1 + sL_1)I_1(s) = L_1 i_{L_1}(0_-) + M i_{L_2}(0_-) + \frac{100}{s}$$

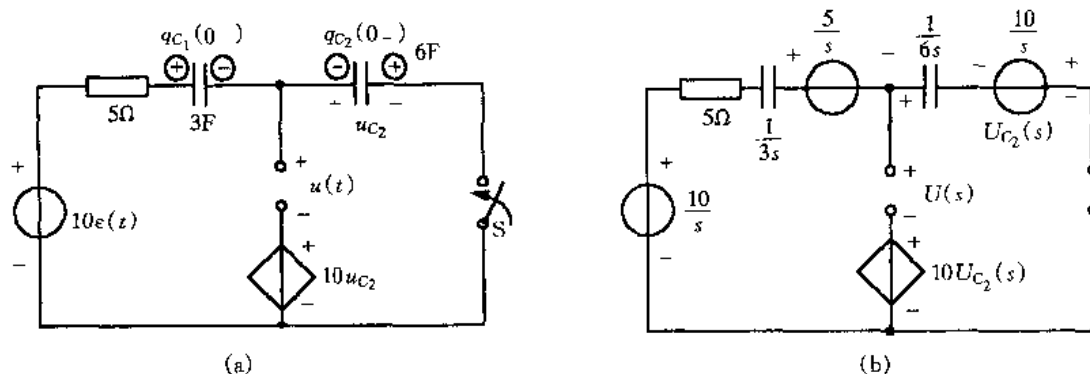
代入参数

$$(4 + 2 + 4s)I_1(s) = 4 \times 10 + 2 \times 10 + \frac{100}{s}$$

$$I_1(s) = \frac{30s + 50}{s(2s + 3)} = \frac{15s + 25}{s(s + \frac{3}{2})}$$

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15s + 25}{s(s + \frac{3}{2})}\right] = \frac{50}{3} - \frac{5}{3}e^{-\frac{3}{2}t} \text{ A}$$

例 3.2.10 例图 3.2.8(a)所示电路中, $q_{C_1}(0_-) = 15 \text{ C}$, $q_{C_2}(0_-) = 60 \text{ C}$, 求开关 S 闭合后电压 $u(t)$ 。



例图 3.2.8

解 电容器上有初始电压,若用经典法求解需要应用电荷守恒原理。而应用运算法求解只需要把初始电荷转化为初始电压,成为运算电路中的附加电源即可。

$$u_{C_1}(0_-) = \frac{q_{C_1}(0_-)}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ V}$$

$$u_{C_2}(0_-) = \frac{q_{C_2}(0_-)}{6} = \frac{60}{6} = 10 \text{ V}$$

初始电压引起的附加电源方向如例图 3.2.8(b)所示。列出回路方程(顺时针方向)

$$(5 + \frac{1}{3s} + \frac{1}{6s})I(s) = \frac{10}{s} - \frac{5}{s} + \frac{10}{s}$$

$$I(s) = \frac{30}{10s + 1}$$

$$U(s) = U_{C_2}(s) - 10U_{C_2}(s) = -9U_{C_2}(s)$$

而

$$U_{C_2}(s) = \frac{1}{6s}I(s) - \frac{10}{s}$$

所以

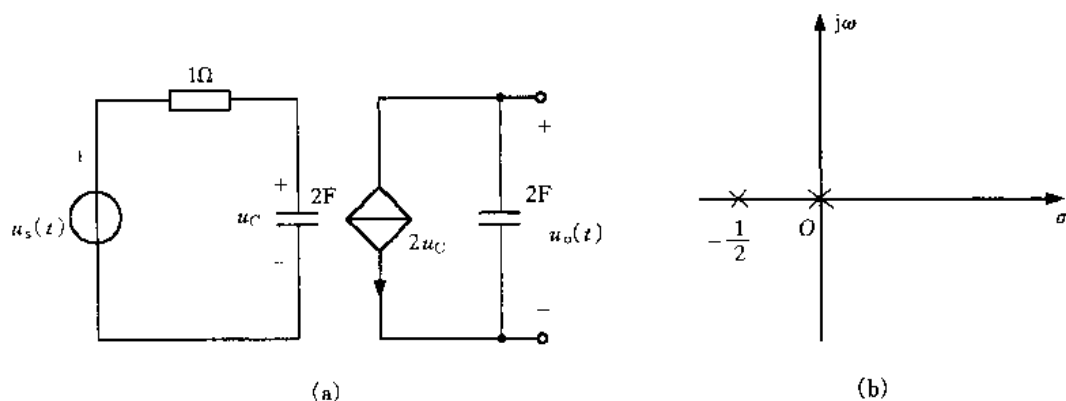
$$U(s) = -9 \times \left[\frac{1}{6s}I(s) - \frac{10}{s} \right] = \frac{90s + 4.5}{s(s + \frac{1}{10})}$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{90s + 45}{s(s + \frac{1}{10})}\right] = 45(1 + e^{-0.1t}) \text{ V}$$

例 3.2.11 已知例图 3.2.9(a)所示电路中, $u_s(t) = 2\epsilon(t) \text{ V}$, 求: (1) 网络函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_s(s)}$; (2) 绘出 $H(s)$ 的零点、极点图。

$$\text{解 } U_C(s) = \frac{U_s(s)}{1 + \frac{1}{2s}} \times \frac{1}{2s} = \frac{1}{1 + 2s} U_s(s)$$

$$U_o(s) = -2U_C(s) \times \frac{1}{2s} = \left(\frac{-2}{1 + 2s} \times \frac{1}{2s} \right) U_s(s)$$

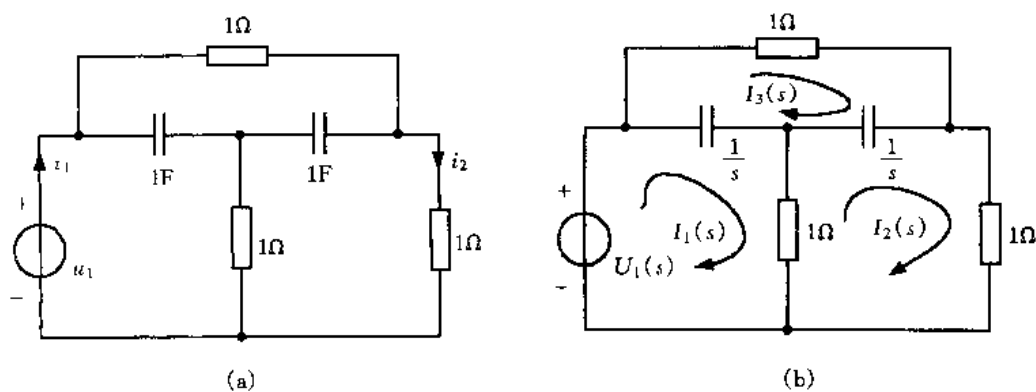


例图 3.2.9

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{U_o(s)}{U_s(s)} \\
 &= \frac{-1}{s(1+2s)} = \frac{-1}{2s(s+\frac{1}{2})}
 \end{aligned}$$

极点 $p_1=0, p_2=-\frac{1}{2}$, 无零点, 零点、极点图如例图 3.2.9(b)所示。

例 3.2.12 电路如例图 3.2.10(a)所示, 初始状态为零, 试求出网络函数(1) $H_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)}$; (2) $H_2(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$



例图 3.2.10

解 所要求解的网络函数 $H_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)}$ 为驱动点导纳函数, 可用 $Y_{11}(s)$ 表示; $H_2(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$ 为转移导纳函数, 可用 $Y_{21}(s)$ 表示。由于是导纳函数, 选用网孔法计算方便。按例图 3.2.10(b)列出运算电路的网孔方程

$$\begin{cases} (1 + \frac{1}{s})I_1(s) - I_2(s) - \frac{1}{s}I_3(s) = U_1(s) \\ -I_1(s) + (2 + \frac{1}{s})I_2(s) - \frac{1}{s}I_3(s) = 0 \\ -\frac{1}{s}I_1(s) - \frac{1}{s}I_2(s) + (1 + \frac{2}{s})I_3(s) = 0 \end{cases}$$

解得

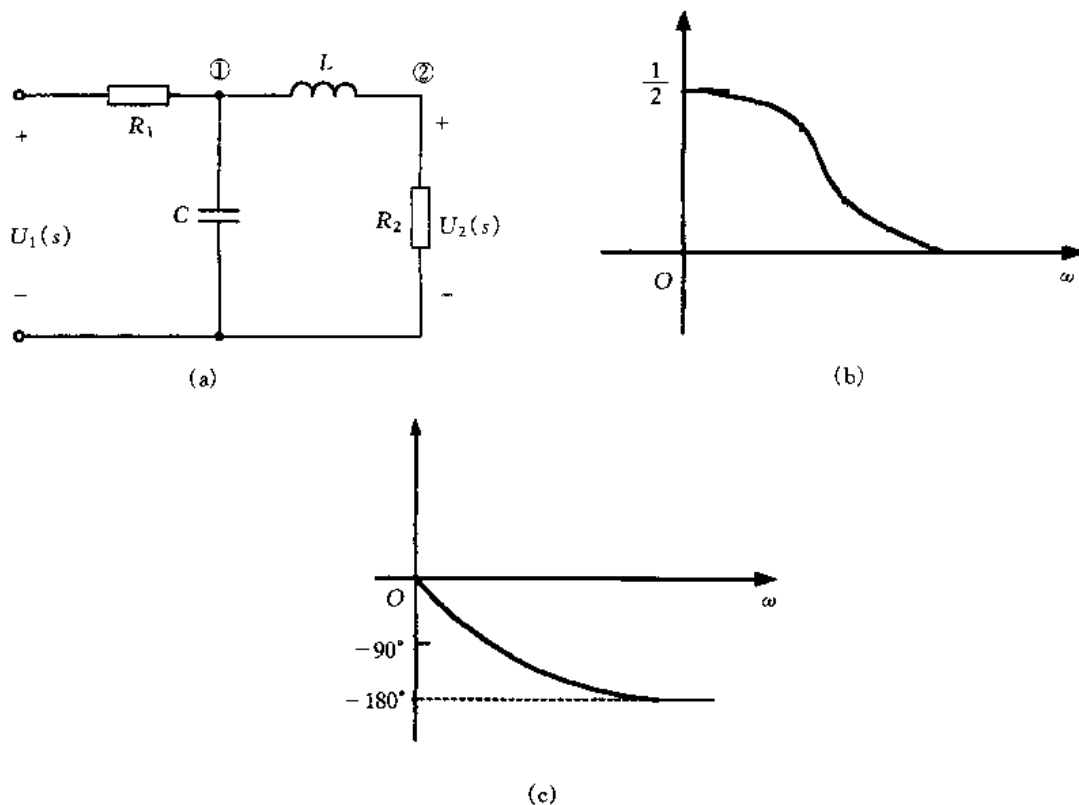
$$I_1(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 5s + 2} U_1(s)$$

$$H_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = Y_{11}(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 5s + 2}$$

$$I_2(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 5s + 2} U_1(s)$$

$$H_2(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 5s + 2}$$

例 3.2.13 已知电路如例图 3.2.11 所示,求网络函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$,并定性画出幅频特性和相频特性草图。



例图 3.2.11

解 对例图 3.2.11(a)所示电路,列结点电压方程,有

$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL})U_{n1}(s) - \frac{1}{sL}U_{n2}(s) = \frac{U_1(s)}{R_1} \\ -\frac{1}{sL}U_{n1}(s) + (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL})U_{n2}(s) = 0 \end{cases}$$

从上述方程解出 $U_{n2}(s)$, 且 $U_{n2}(s) = U_2(s)$, 则有

$$U_2(s) = \frac{1}{s^2LC + s(L+C) + 2}U_1(s)$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s^2LC + s(L+C) + 2}$$

为了研究正弦稳态的幅频特性和相频特性,将 $H(s)$ 中的 s 以 $j\omega$ 代替,得

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2LC + j\omega(L+C) + 2} = \frac{1}{2 + j\omega(L+C) - \omega^2LC}$$

幅频特性为

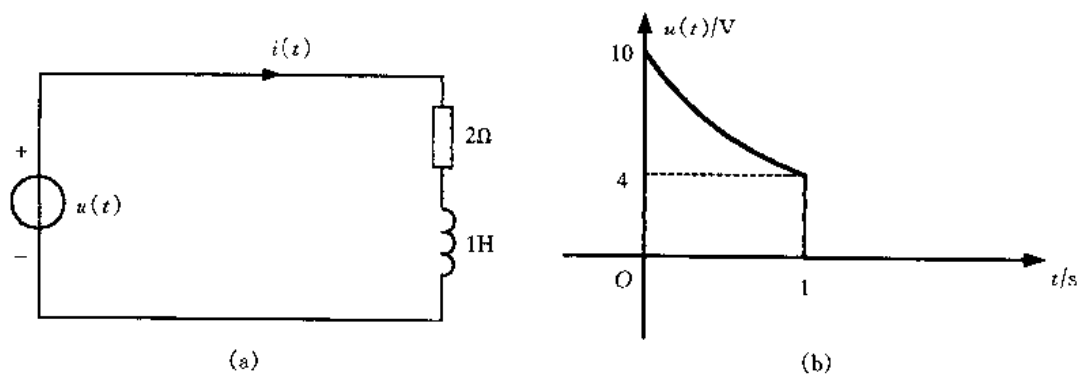
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(2 - \omega^2LC)^2 + \omega^2(L+C)^2}}$$

当 $\omega=0$ 时, $|H(j\omega)|$ 具有最大值 $\frac{1}{2}$, 然后随着 ω 的增大而减小, 最后随 ω 趋近于 ∞ 而 $|H(j\omega)|$ 趋近于零, 因此, 具有低通滤波特性。如例图 3.2.11(b)所示相频特性

$$\arg H(j\omega) = \arctan \frac{-\omega(L+C)}{2 - \omega^2LC}$$

当 $\omega=0$ 时, 相位为 0, 然后随着 ω 的增大, 相位从 0 趋近 -180° , 如例图 3.2.11(c)所示。

例 3.2.14 电路如例图 3.2.12(a)所示, $u(t)$ 的波形如例图 3.2.12(b)所示。试用卷积积分法求电流 $i(t)$ 。



例图 3.2.12

解 根据例图 3.2.12(b)所示波形, 电压 $u(t)$ 可表示为

$$u(t) = 10e^{-at}[\epsilon(t) - \epsilon(t-1)]$$

由图(a)电路可求出

$$H(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{s+2}$$

根据网络函数和冲激响应的关系

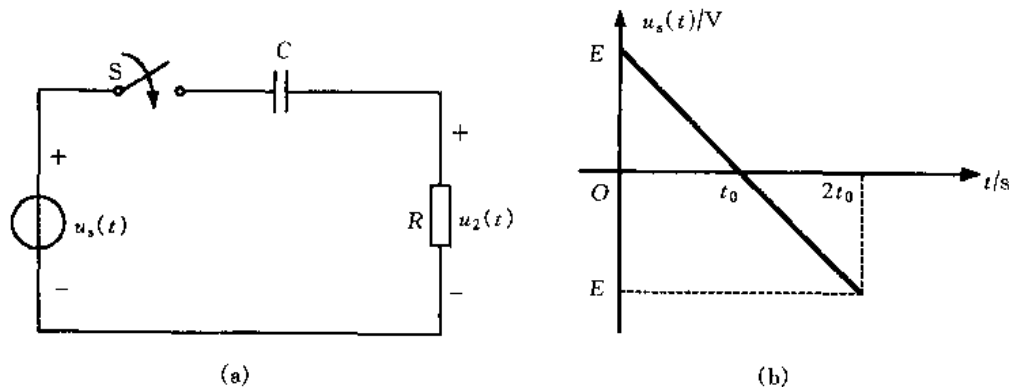
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}\epsilon(t)$$

在给定激励 $u(t) = e(t) = 10e^{-at}[\epsilon(t) - \epsilon(t-1)]$ 下, 电流 $i(t)$ 的零状态响应为

$$\begin{aligned} i(t) &= r(t) = \int_0^t h(t-\zeta)e(\zeta)d\zeta \\ &= 10 \int_0^t e^{-2(t-\zeta)} e^{-a\zeta} [\epsilon(\zeta) - \epsilon(\zeta-1)] d\zeta \\ &= \frac{10e^{-2t}}{2-a} [(e^{(2-a)t} - 1)\epsilon(t) - (e^{(2-a)t} - e^{2-a})\epsilon(t-1)] \\ &= \frac{10}{2-a} [(e^{-at} - e^{-2t})\epsilon(t) - (e^{-at} - e^{-2(t-1)-a})\epsilon(t-1)] \end{aligned}$$

此式即为在 $u(t)$ 激励下, 电流 $i(t)$ 的表达式。

例 3.2.15 例图 3.2.13(a) 所示电路, $t=0$ 时 S 闭合, 已知 $u_s(t)$ 的波形如图(b)所示, 且 $u_C(0_-)=0$, 试用卷积积分求 $u_2(t)$ 。



例图 3.2.13

解 这是求 RC 电路的零状态响应的问题。电路的网络函数

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_s(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}}$$

从而可得, 单位冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R}{R + \frac{1}{sC}}\right] = e^{-\frac{1}{RC}t}\epsilon(t)$$

从图(b)可知, $u_s(t)$ 可表示为

$$u_s(t) = \frac{E}{t_0}(t_0 - t)\epsilon(t) + E\epsilon(t - 2t_0) + \frac{E}{t_0}(t - 2t_0)\epsilon(t - 2t_0)$$

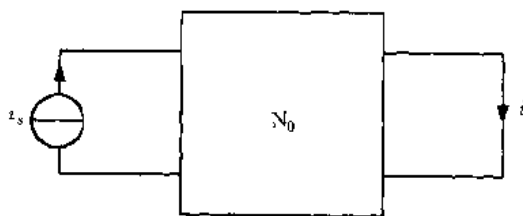
应用卷积积分, 将 $u_s(t)$ 和 $h(t)$ 进行变量代换有

$$u_2(t) = \int_0^t u_s(\zeta)h(t-\zeta)d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left[\frac{E}{t_0} (t_0 - \zeta) \varepsilon(\zeta) + E \varepsilon(\zeta - 2t_0) + \frac{E}{t_0} (\zeta - 2t_0) \varepsilon(\zeta - 2t_0) \right] e^{-(t-\zeta)/RC} d\zeta \\
&= \left[-\frac{RCE}{t_0} + E \left(1 + \frac{RC}{t_0} \right) e^{-t/RC} \right] \varepsilon(t) + \left[\frac{RCE}{t_0} + E \left(1 - \frac{RC}{t_0} \right) e^{-(t-2t_0)/RC} \right] \varepsilon(t - 2t_0)
\end{aligned}$$

上述表达式即 $u_2(t)$ 的零状态响应。由此可以看出利用卷积定理使得一些不易计算的拉氏反变换可借助于卷积积分得到。

例 3.2.16 例图 3.2.14 所示电路中, 网络 N_0 为无源线性零状态网络, 已知电流 i 的阶跃响应为 $s(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ A, 试求当 $i_s = \sqrt{2} I_s \cos \omega t$ 时的正弦稳态响应。



例图 3.2.14

解 根据阶跃响应和冲激响应的关系, 可求得单位冲激响应 $h(t)$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} [e^{-3t} \varepsilon(t)] \\
&= \delta(t) - 3e^{-3t} \varepsilon(t)
\end{aligned}$$

由于网络函数单位冲激响应构成拉氏变换对, 所以, 关于电流 i 的网络函数

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[\delta(t) - 3e^{-3t} \varepsilon(t)] = 1 - \frac{3}{s+3} = \frac{s}{s+3}$$

以 $j\omega$ 代替 s 即得频域中的网络函数 $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{3 + j\omega}$$

根据网络函数的定义 $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$ 则有

$$R(s) = H(s)E(s)$$

当激励 $i_s = \sqrt{2} I_s \cos \omega t$ A 时, 上式中 s 均以 $j\omega$ 代替, 用相量法则 $\dot{I}_s = I_s \angle 0^\circ$

$$\dot{I} = H(j\omega) \dot{I}_s = \frac{j\omega}{3 + j\omega} I_s \angle 0^\circ = \frac{\omega I_s}{\sqrt{9 + \omega^2}} \angle \frac{90^\circ - \arctan \frac{\omega}{3}}{\omega}$$

电流 i 的正弦稳态响应

$$i(t) = \frac{\sqrt{2} \omega I_s}{\sqrt{9 + \omega^2}} \cos(\omega t + 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{3}) \text{ A}$$

例 3.2.17 例图 3.2.15(a) 所示电路中, 网络 N 为一线性无源网络, 已知其网络函数

$$H(s) = \frac{I_s(s)}{U_s(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

(1) 给出该网络的一种结构及合适的元件值。(2) 判断该电路过渡过程的性质。

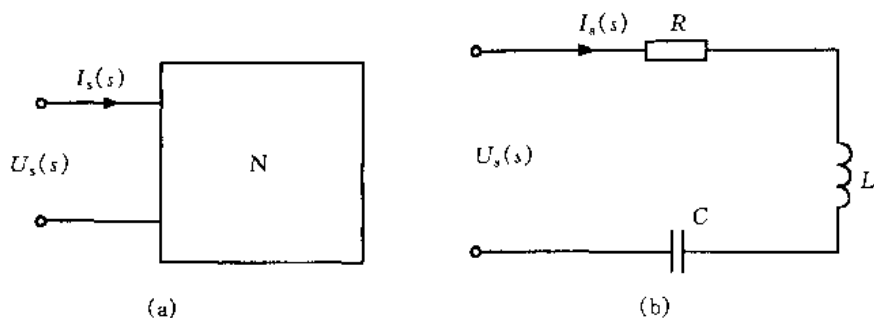
解 由于给出的网络函数 $H(s) = \frac{I_s(s)}{U_s(s)}$ 为驱动点导纳函数 $Y(s)$

当 $U_s(s) = 1$ 时, $H(s) = I_s(s) = Y(s)$

即

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{sC}{s^2 LC + sRC + 1}$$

设网络 N 为 RLC 串联网络, 如例图 3.2.15(b) 所示, 当 $LC = \frac{1}{2}$, $RC = 1$



例图 3.2.15

其中 $C = \frac{1}{2} \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 2 \Omega$ 时

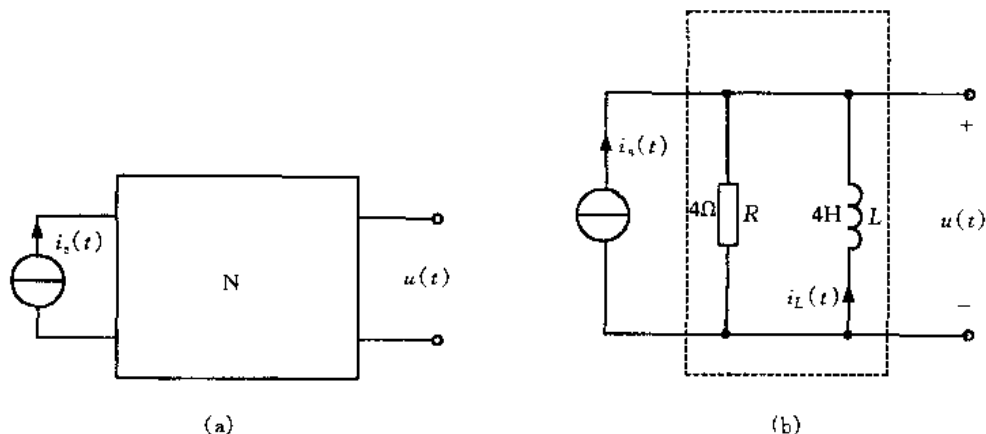
$$Y(s) = \frac{s \times \frac{1}{2}}{s^2 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}s + 1} = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

所以网络 N 的一种结构为 R, L, C 串联, 其中 $C = \frac{1}{2} \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 2 \Omega$, 也可以有另外的结构, 参数与上述不同。

$$(2) H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

极点 $p_1 = -1+j$, $p_2 = -1-j$ 。极点位于复平面中左半平面, 所以过渡过程性质为衰减振荡。

例 3.2.18 已知例图 3.2.16(a) 所示电路中, 网络 N 为线性无源网络, 电压 $u(t)$ 的零输入解为 $20e^{-2t}\epsilon(t)$ 。对应于响应 $u(t)$ 的网络函数 $H(s) = \frac{4s}{s+2}$ 。试求 (1) $i_s = 5\epsilon(t)$; (2) $i_s(t) = 5\epsilon(t-1)$ 时, 电压 $u(t)$ 的全响应; (3) 试给出网络 N 的一个等效电路。



例图 3.2.16

解 网络的全响应 $u(t) = u_{cf} + u_{ce}(t)$, 即全响应等于零输入响应加零状态响应。现已知

零输入响应 $u_{\text{ct}}(t) = 20e^{-2t}$

又知 $H(s) = \frac{4s}{s+2}$

网络函数 $H(s)$ 是网络零状态响应和激励之比,

即 $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$

所以 $R(s) = H(s)E(s)$

$$(1) \text{ 当 } i_s(t) = 5\epsilon(t) \text{ V 时 } E(s) = I_s(s) = \frac{5}{s}$$

$$R(s) = \frac{4s}{s+2} \times \frac{5}{s} = \frac{20}{s+2}$$

零状态响应的像函数 $R(s)$ 就是 $U_{\text{ce}}(s)$

即 $U_{\text{ce}}(s) = R(s)$

$$u_{\text{ce}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20}{s+2}\right] = 20e^{-2t}\epsilon(t)$$

所以当 $i_s(t) = 5\epsilon(t)$ 时, $u(t)$ 的全响应为

$$u(t) = u_{\text{ct}} + u_{\text{ce}}(t) = 20e^{-2t}\epsilon(t) + 20e^{-2t}\epsilon(t) = 40e^{-2t}\epsilon(t)$$

(2) 当 $i_s(t) = 5\epsilon(t-1)$ 时

$$E(s) = I_s(s) = \frac{5e^{-s}}{s}$$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{4s}{s+2} \frac{5e^{-s}}{s} = \frac{20e^{-s}}{s+2}$$

$$U_{\text{ce}}(s) = R(s)$$

$$u_{\text{ce}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20e^{-s}}{s+2}\right] = 20e^{-2(t-1)}\epsilon(t-1)$$

所以, 当 $i_s(t) = 5\epsilon(t-1)$ A 时, $u(t)$ 的全响应

$$u(t) = u_{\text{ct}}(t) + u_{\text{ce}}(t) = 20e^{-2t}\epsilon(t) + 20e^{-2(t-1)}\epsilon(t-1)$$

(3) 等效网络可以是 4Ω 电阻与 2H 电感的并联, 电感的初始电流 $i_L(0_-) = 5\text{A}$, 方向如例图 3.2.16(b) 所示。

例 3.2.19 例图 3.2.17(a) 所示电路, 开关动作前电路已达稳态。试求开关动作后电流 $i(t)$ 。

解 电路中一激励为 $\epsilon(-t)$, 它表示 $t < 0$ 时幅值为 1A , $t > 0$ 时为 0 。它是储能元件初始状态的一个因素。

电感的初始电流

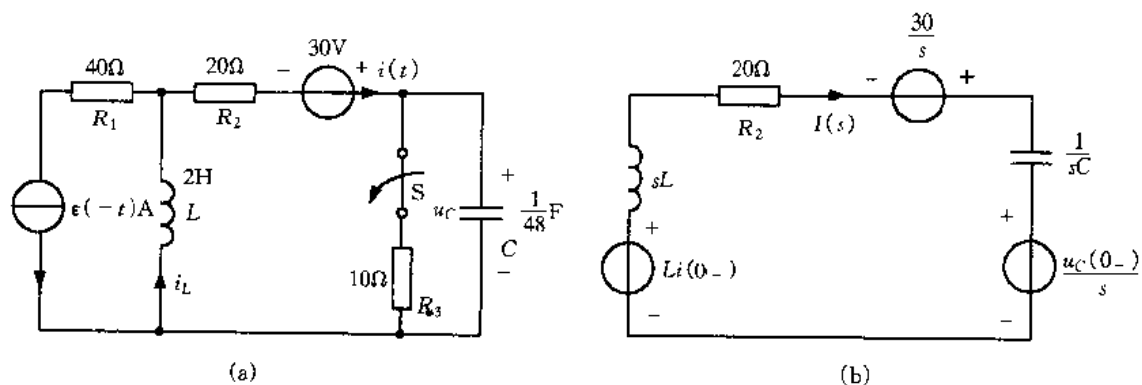
$$i_L(0_-) = 1 + \frac{30}{R_2 + R_3} = 1 + \frac{30}{20 + 10} = 2\text{A}$$

电容的初始电压

$$u_C(0_-) = 10 \times 1 = 10\text{V}$$

作出运算电路图如例图 3.2.17(b) 所示, 电路方程为

$$(R_2 + sL + \frac{1}{sC})I(s) = \frac{30}{s} - \frac{u_C(0_-)}{s} + Li_L(0_-)$$



例图 3.2.17

代入参数有

$$(20 + 2s + \frac{1}{s \times \frac{1}{48}})I(s) = \frac{30}{s} - \frac{10}{s} + 2 \times 2$$

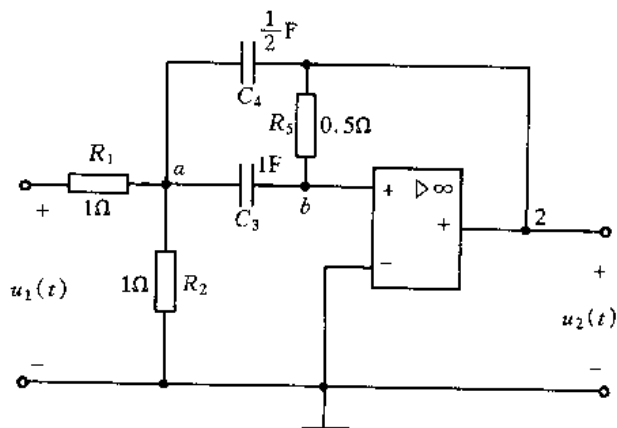
解得

$$I(s) = \frac{2(s+5)}{s^2 + 10s + 24} = \frac{2(s+5)}{(s+4)(s+6)}$$

所以

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s+5)}{(s+4)(s+6)}\right] = e^{-4t} + e^{-6t}$$

例 3.2.20 例图 3.2.18 所示电路, 电容电压 $u_{C_1}(0_-) = 0$, $u_{C_2}(0_-) = 0$, 求输出电压 $u_2(t)$ 。已知运算放大器为理想运放, 且 $u_1(t) = 20\epsilon(t)$ V。



例图 3.2.18

解 题目中含理想运算放大器, 且有两个动态元件, 应用运算法较方便。对结点 a, b 分别列出结点电压方程

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_3 + sC_4 \right) U_a(s) - sC_3 U_b(s) - sC_4 U_2(s) \right] = \frac{1}{R_1} U_1(s) \\ & - sC_3 U_a(s) + \left(sC_3 + \frac{1}{R_5} \right) U_b(s) - \frac{1}{R_5} U_2(s) = 0 \end{aligned}$$

根据理想运算放大器的性质有

$$U_b(s) = 0 \quad (\text{虚地})$$

且在列结点 b 的方程时已考虑的虚断。所以有

$$U_a(s) = -\frac{U_2(s)}{R_5 C_3 s}$$

将上述表达式中的电阻用相应的电导表示,得

$$U_a(s) = -\frac{G_5 U_2(s)}{s C_3}$$

将其代入结点 a 的方程,解得

$$U_2(s) = \frac{-G_1 C_3 s U_1(s)}{s^2 C_3 C_4 + s(C_3 + C_4)G_5 + (G_1 + G_2)G_5}$$

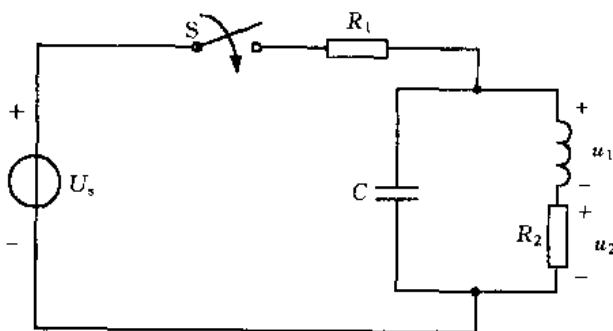
代入给定参数

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{-40}{s^2 + 6s + 8} = (-20) \times \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} \right) \\ u_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[U_2(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[(-20) \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} \right) \right] \\ &= (20e^{-4t} - 20e^{-2t})\varepsilon(t) \text{ V} \end{aligned}$$

3.3 阶段测试题

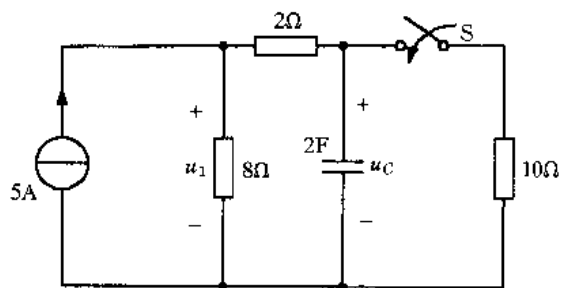
【题 3.1】 题图 3.1 所示电路,电源为直流电压源 U_s ,试求 $t=0$ 开关闭合时 $u_1(0_+)$, u_2

$$(0_+), \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{0_+}, \left. \frac{du_2}{dt} \right|_{0_+}, \left. \frac{d^2 u_2}{dt^2} \right|_{0_+}.$$

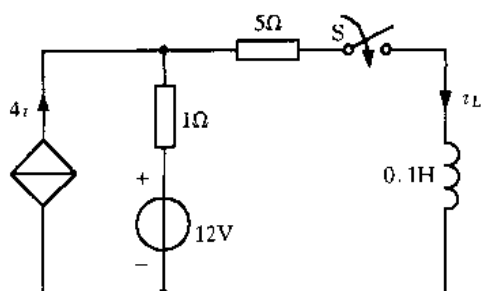


题图 3.1

【题 3.2】 如题图 3.2 所示电路,开关闭合前电路已达稳态, $t=0$ 时开关 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时的电压 u_C , u_1 。



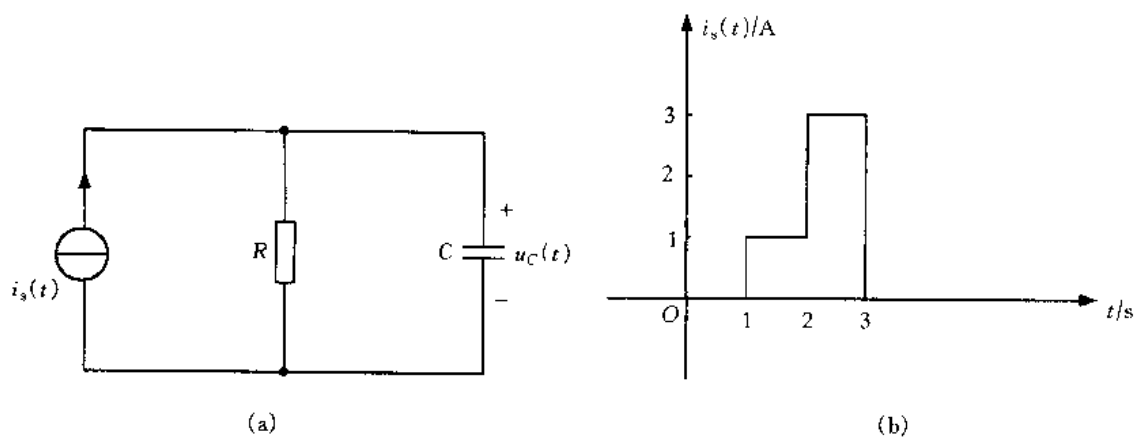
题图 3.2



题图 3.3

[题 3.3] 如题图 3.3 所示电路, 已知 $i_L(0_-) = -1\text{ A}$, 求 $t > 0$ 时的电流 i 。

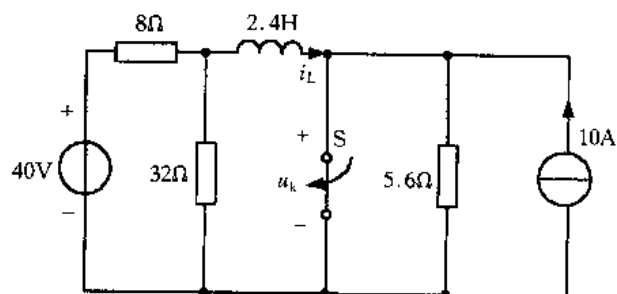
[题 3.4] 电路激励如题图 3.4(b) 所示, 求图(a)中电压 $u_C(t)$ 。



题图 3.4

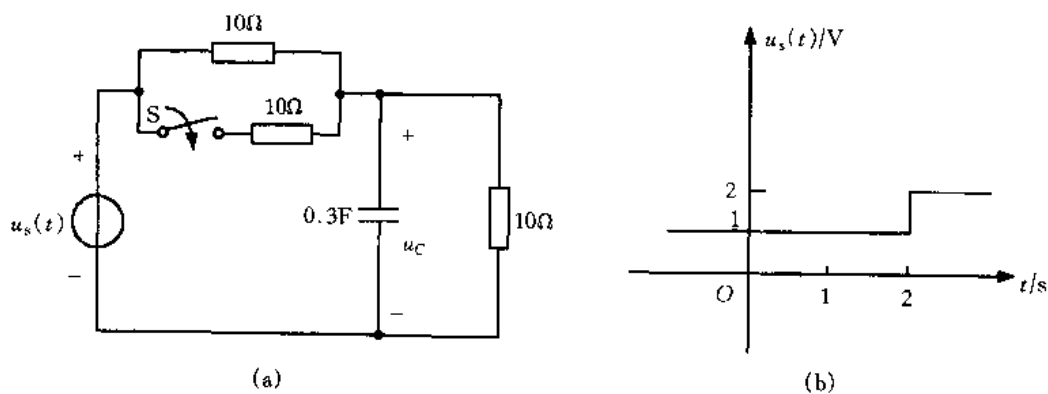
[题 3.5] 如题图 3.5 所示电路, 稳定后将开关 S 打开, 求:

- (1) 电感电流 i_L 的全响应;
- (2) 画出电流 i_L 的波形;
- (3) 开关电压 u_k 。



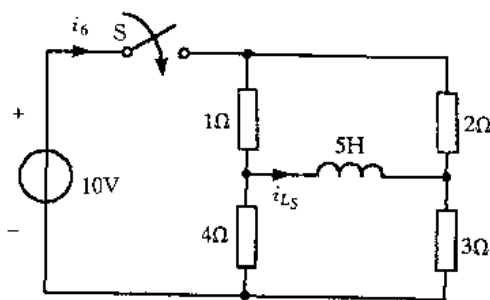
题图 3.5

[题 3.6] 题图 3.6(a)所示电路原已处稳态,开关 S 在 $t=1\text{ s}$ 时闭合,已知 $u_s(t)$ 的波形如图 (b)所示,求 $t>0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 。



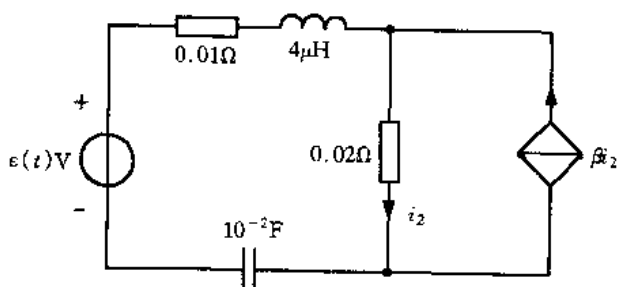
题图 3.6

[题 3.7] 题图 3.7 所示电路,开关 S 原打开,电路已稳定。 $t=0$ 时开关 S 闭合,求 $t>0$ 时电流 i_{L_S} 、 i_{6c} 。



题图 3.7

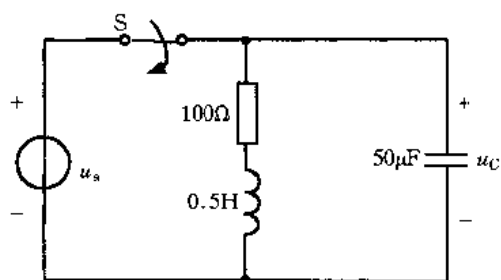
[题 3.8] 题图 3.8 所示电路,当受控电流源控制系数 $\beta = \frac{2}{3}$ 时,电路的过渡过程属何种性质?



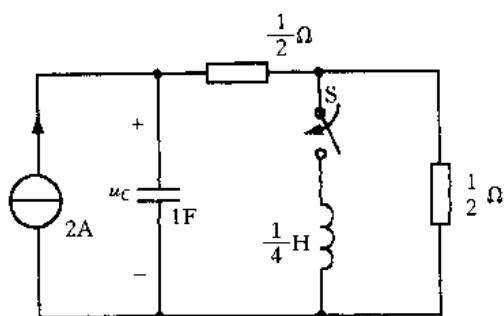
题图 3.8

[题 3.9] 题图 3.9 所示电路中 $u_s = \sqrt{2}\sin(200t + 45^\circ)\text{ V}$, $t=0$ 时开关 S 打开,求开关打开后电容电

压 $u_C(t)$ 。



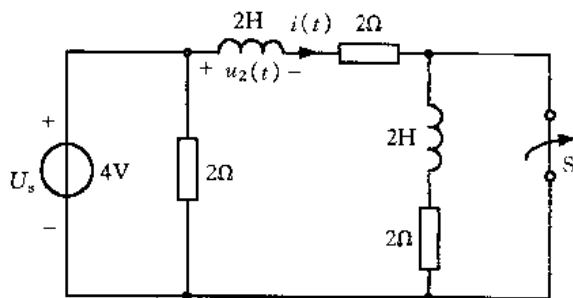
题图 3.9



题图 3.10

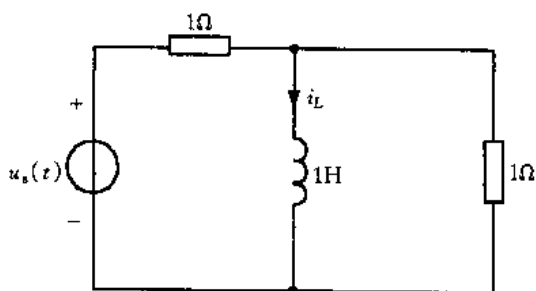
[题 3.10] 如题图 3.10 所示电路,开关原处于打开状态,电路已稳定, $t=0$ 时合上开关 S,已知 $u_C(0_-)=2\text{ V}$ 。(1) 画出运算电路图;(2) 用运算法求 $u_C(t)$ 。

[题 3.11] 如题图 3.11 所示电路,电路原处于稳态, $t=0$ 时开关 S 打开,求 $i(t)$, $u_2(t)$ 。

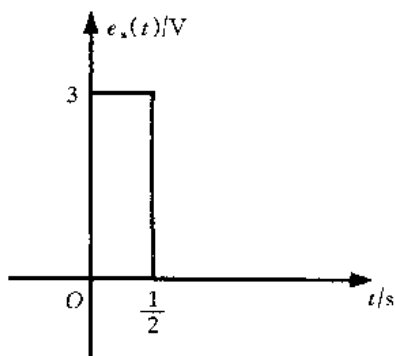


题图 3.11

[题 3.12] 电路如题图 3.12 所示,图中 $u_s(t)=4e^{-2t}\epsilon(t)\text{ V}$,求:(1) 对于电流 i_L 的网络函数;(2) 电流 $i_L(t)$ 。



题图 3.12



题图 3.13

[题 3.13] 已知某网络中网络函数 $H(s)=\frac{1}{s}-\frac{3e^{-s}}{2s}+\frac{e^{-2s}}{2}$,

- (1) 定性画出冲激响应 $h(t)$ 的波形;
 (2) 当外施激励 $e_s(t)$ 如题图 3.13 所示时, 试用卷积积分求响应 $r(t)$ 。

3.4 阶段测试题答案

[题 3.1] $u_1(0_+) = 0, u_2(0_+) = 0, \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{0_+} = \frac{U_s}{R_1 C}, \left. \frac{du_2}{dt} \right|_{0_+} = 0, \left. \frac{d^2 u_2}{dt^2} \right|_{0_+} = 0$

[题 3.2] $u_C = 40 + (20 + 20e^{-0.1t})\epsilon(t) - 40\epsilon(t) \text{ V}$
 $u_1 = 24 + 16e^{-0.1t} \text{ V}$

[题 3.3] $i = 6 - 7e^{-20t} \text{ A}$

[题 3.4] $u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-1)})\epsilon(t-1) +$
 $2R(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-2)})\epsilon(t-2) - 3R(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-3)})\epsilon(t-3) \text{ V}$

[题 3.5] (1) $i_L(t) = -2 + 7e^{-5t} \text{ A}$
 (2) 略
 (3) $u_k = 44.8 + 39.2e^{-5t} \text{ V}$

[题 3.6] $0 \leq t < 1, u_C(t) = 0.5 \text{ V}$
 $1 \leq t \leq 2$ 时, $u_C(t) = 0.67 - 0.17e^{-(t-1)} \text{ V}$
 $t > 2$ 时, $u_C(t) = 1.33 - 0.726e^{-(t-2)} \text{ V}$

[题 3.7] $i_{L_5} = 1 - e^{-0.4t} \text{ A} \quad i_6 = 4.2 - 0.2e^{-0.4t} \text{ A}$

[题 3.8] 过阻尼, 非振荡衰减

[题 3.9] $u_C(t) = 230.9e^{-100t} \sin(173.2t + 60^\circ) \text{ V}$

[题 3.10] $u_C(t) = \epsilon(t) + 1.414e^{-t} \cos(t - 45^\circ)\epsilon(t) \text{ V}$

[题 3.11] $i(t) = 1 \text{ A} \quad u_2(t) = -2\delta(t) \text{ V}$

[题 3.12] $H(s) = \frac{I_L(s)}{U_s(s)} = \frac{1}{2s+1} \quad i_L(t) = \frac{4}{3}(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-2t}) \text{ A}$

[题 3.13] $h(t) = \epsilon(t) - \frac{3}{2}\epsilon(t-1) + \frac{1}{2}\epsilon(t-2)$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ 或 } t \geq 2\frac{1}{2} \\ 3t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ -\frac{9}{2} + 6 & 1 < t \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} < t \leq 2 \\ \frac{3}{2}t - \frac{15}{4} & 2 < t \leq 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

第 4 章 电路方程的矩阵形式和状态方程

4.1 理论提要

4.1.1 图的基本定义

电路的图:一个电路的“图”是由支路(线段)和结点(点)所组成,通常用 G 来表示。每一条支路代表一个电路元件,或者代表一些元件的组合。电路的图只说明电路的联接特点,而与构成电路的元件的性质无关。

图的定义:“一个图 G 是结点和支路的一个集合,每条支路的两端都联到相应的结点上”。应当指出,在图的定义中结点和支路各自是一个整体,因此允许有孤立结点存在,但任一支路又必须终端在结点上。

有向图和无向图:指定了各支路方向(即该支路电流的参考方向)的图称为有向图。未指定各支路方向的图称为无向图。

连通图与非连通图:当图的任意两个结点之间至少存在一条路径时,该图称为连通图。若图的任意两结点之间不存在至少一条路径时,该图称为非连通图。

闭合路径和回路:如果一条路径的起点和终点重合,就构成了一条闭合路径。当闭合路径除起点(即终点)外的其他结点都相异时,则此闭合路径就称为回路。

子图:若图 G_1 的每个结点和支路也是图 G 的结点和支路,则称 G_1 为 G 的一个子图。

树、树枝和连支:包含图的全部结点但不包含回路的连通子图称为图的树。组成树的支路称为树枝,而其余支路称为连支。设一个连通图的结点数为 n ,支路数为 b ,则树枝数为 $n-1$,连支数为 $b-(n-1)$ 。

基本回路:对连通图的任一个树,每加进一个连支便形成了一个只包含该连支的回路,而构成此回路的其他支路均为树枝。这种回路称为单连支回路或基本回路,全部单连支回路构成了单连支回路组或基本回路组。基本回路组是一组独立回路。

割集:割集是连通图的一个支路集合,如果把这些支路移去,将使图分成两个分离部分,图变为非连通图,而少移去任一条支路,图仍是连通的。

基本割集:对连通图的任一个树,由一条树枝与相应的一些连支所构成的割集称为单树枝割集或基本割集。全部单树枝割集构成了单树枝割集组或基本割集组,基本割集组是一组独立割集。

4.1.2 关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵

1. 关联矩阵 A

对任一具有 n 个结点、 b 条支路的有向图,结点和支路的关联性质可用一个 $n \times b$ 阶的矩阵 A_a 来描述。 A_a 的行对应于结点,列对应于支路,它的任一元素,如 a_{jk} 定义如下:

$$a_{jk} = \begin{cases} +1, & \text{表示支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联, 且它的方向背离结点} \\ -1, & \text{表示支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 关联, 且它的方向指向结点} \\ 0, & \text{表示支路 } k \text{ 与结点 } j \text{ 无关联} \end{cases}$$

由于 A_a 的行不是彼此独立的, 即 A_a 中的任一行都能从其他 $(n-1)$ 行导出, 因此, 当把 A_a 的任一行划去, 得到 $(n-1) \times b$ 阶矩阵, 它以 A 表示, 并称为降阶关联矩阵, 简称关联矩阵。被划去的行所对应的结点可以当作参考结点。

2. 回路矩阵 B

对任一个具有 n 个结点、 b 条支路、 c 个回路的有向图, 回路与支路的关联性质可用一个 $c \times b$ 阶的矩阵 B_a 来描述。 B_a 的行对应于回路, 列对应于支路, 它的任一元素, 如 b_{jk} 定义如下:

$$b_{jk} = \begin{cases} +1, & \text{表示支路 } k \text{ 与回路 } j \text{ 关联, 且它们的方向一致} \\ -1, & \text{表示支路 } k \text{ 与回路 } j \text{ 关联, 且它们的方向相反} \\ 0, & \text{表示支路 } k \text{ 与回路 } j \text{ 无关联} \end{cases}$$

从矩阵 B_a 中取出独立回路组对应的行所组成的 $(b-n+1) \times b$ 阶矩阵称为独立回路矩阵 B , 简称回路矩阵。

如果所选的独立回路组是单连支回路组, 则回路矩阵称为基本回路矩阵, 用 B_f 表示。若写 B_f 时, 其列采取先连支后树支的排序, 则 B_f 中将出现一个 l ($l = b - n + 1$) 阶的单位子矩阵, 即有

$$B_f = [1_l : B_t]$$

式中下标 l 和 t 分别表示与连支和树支对应的部分。

3. 割集矩阵 Q

对任一个具有 n 个结点、 b 条支路、 d 个割集的有向图, 割集与支路的关联性质可用一个 $d \times b$ 阶矩阵 Q_a 来描述。 Q_a 的行对应于割集, 列对应于支路, 它的任一元素, 如 q_{jk} 定义如下:

$$q_{jk} = \begin{cases} +1, & \text{表示支路 } k \text{ 与割集 } j \text{ 关联, 且它的方向相同} \\ -1, & \text{表示支路 } k \text{ 与割集 } j \text{ 关联, 且它的方向相反} \\ 0, & \text{表示支路 } k \text{ 与割集 } j \text{ 无关联} \end{cases}$$

从矩阵 Q_a 中取出独立割集组对应的行所组成的 $(n-1) \times b$ 阶矩阵称为独立割集矩阵 Q , 简称割集矩阵。

如果所选的独立割集组是单树支割集组, 则割集矩阵称为基本割集矩阵, 用 Q_f 表示。若写 Q_f 时, 其列采取先树支后连支的排序, 则 Q_f 中将出现一个 $(n-1)$ 阶的单位子矩阵, 即有

$$Q_f = [1_t : Q_l]$$

式中下标 t 和 l 分别表示与树支和连支对应的部分。

4. A, B_f, Q_f 之间的关系

如果选择连通图 G 的一个树, 按先树支, 后连支的相同支路顺序排列, 写出图的 A, B_f, Q_f , 使得 $A = [A_t : A_l], B_f = [B_t : 1_l], Q_f = [1_t : Q_l]$, 则有如下关系

$$\begin{aligned} B_t^T &= -A_t^{-1}A_l \\ Q_l &= -B_t^T = A_t^{-1}A_l \end{aligned}$$

4.1.3 电路方程的矩阵形式

1. 复合支路

为了写出支路的约束方程, 必须规定一条支路的结构和内容。对于结点法采用如图 4.1

所示的复合支路,其中下标 k 表示第 k 条支路, \dot{U}_{sk} 和 \dot{I}_{sk} 分别表示独立电压源和独立电流源, \dot{I}_{dk} 表示受控电流源, Y_k (或 Z_k) 表示导纳(或阻抗)且规定它只能是单一的电阻、电感或电容,而不能是它们的组合,即

$$Y_k = \begin{cases} \frac{1}{R_k} \\ j\omega C_k \\ \frac{1}{j\omega L_k} \end{cases}$$

整个电路支路方程的矩阵形式可写成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s \\ \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{Z}(\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s \end{aligned}$$

式中

$\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1 \ \dot{I}_2 \cdots \dot{I}_b]^T$ 为支路电流列向量;
 $\dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \cdots \dot{U}_b]^T$ 为支路电压列向量;
 $\dot{\mathbf{I}}_s = [\dot{I}_{s1} \ \dot{I}_{s2} \cdots \dot{I}_{sb}]^T$ 为支路电流源的电流列向量;
 $\dot{\mathbf{U}}_s = [\dot{U}_{s1} \ \dot{U}_{s2} \cdots \dot{U}_{sb}]^T$ 为支路电压源的电压列向量;
 \mathbf{Y} 称为支路导纳矩阵;
 $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ 称为支路阻抗矩阵。

显然,当电路中无受控电流源(即 $\dot{\mathbf{I}}_{dk} = \mathbf{0}$),电感间无耦合,则 \mathbf{Y} 和 \mathbf{Z} 都是对角阵。当含有受控电流源或电感间有耦合时, \mathbf{Y} 和 \mathbf{Z} 都不再是对角阵。

2. 结点电压方程的矩阵形式

设结点电压列向量为 $\dot{\mathbf{U}}_n$,并用 \mathbf{A} 表示的 KCL 和 KVL 推导出结点电压方程。

$$\text{KCL} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$$

$$\text{KVL} \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n$$

$$\text{支路方程} \quad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s$$

把支路方程代入 KCL 可得

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{0}$$

把 KVL 代入得

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s \quad (4-1)$$

或写成

$$\mathbf{Y}_n \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{J}}_n \quad (4-2)$$

式中 $\mathbf{Y}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{A}^T$, $\dot{\mathbf{J}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}_s$ 。式(4-2)称为结点电压方程的矩阵形式, \mathbf{Y}_n 称为结点导纳矩阵, $\dot{\mathbf{J}}_n$ 为独立电源引起的注入结点的电流列向量。

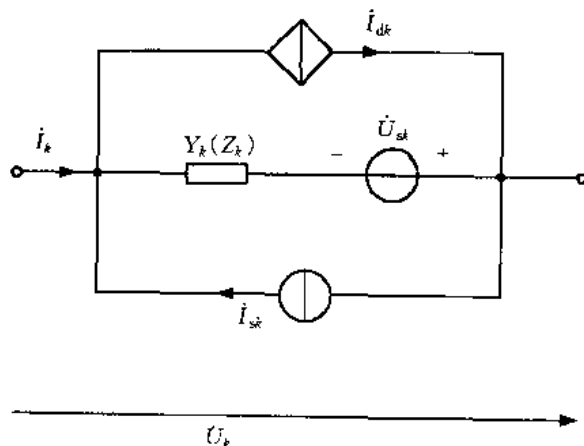


图 4.1

3. 回路电流方程的矩阵形式

设回路电流列向量为 $\dot{\mathbf{I}}_l$, 并用 \mathbf{B}_l 表示 KCL 和 KVL。

$$\begin{array}{ll}\text{KCL} & \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{B}_l^T \dot{\mathbf{I}}_l \\ \text{KVL} & \mathbf{B}_l \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \\ \text{支路方程} & \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}(\dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{I}}_s) - \dot{\mathbf{U}}_s\end{array}$$

将支路方程代入 KVL 得

$$\mathbf{B}_l \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}} + \mathbf{B}_l \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{B}_l \dot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{0}$$

再将 KCL 代入上式可得

$$\mathbf{B}_l \mathbf{Z} \mathbf{B}_l^T \dot{\mathbf{I}}_l = \mathbf{B}_l \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{B}_l \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}}_s \quad (4-3)$$

或写成

$$\mathbf{Z}_l \dot{\mathbf{I}}_l = \dot{\mathbf{U}}_l \quad (4-4)$$

式中 $\mathbf{Z}_l \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_l \mathbf{Z} \mathbf{B}_l^T$, $\dot{\mathbf{U}}_l \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_l \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{B}_l \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}}_s$ 。式(4-4)即为回路电流方程的矩阵形式, \mathbf{Z}_l 称为回路阻抗矩阵, $\dot{\mathbf{U}}_l$ 为独立电源引起的回路电压列向量。

4. 割集电压方程的矩阵形式

设 $\dot{\mathbf{U}}_t$ 为割集电压列向量, 并用 \mathbf{Q}_t 表示 KCL 和 KVL。

$$\begin{array}{ll}\text{KCL} & \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \text{KVL} & \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{U}}_t \\ \text{支路方程} & \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathbf{I}}_s\end{array}$$

先将支路方程代入 KCL, 可得

$$\mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}_s - \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{0}$$

再将 KVL 代入上式, 便得

$$\mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{U}}_t = \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}_s \quad (4-5)$$

或写成

$$\mathbf{Y}_t \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{J}}_t \quad (4-6)$$

式中 $\mathbf{Y}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \mathbf{Q}_t^T$ 称为割集导纳矩阵, $\dot{\mathbf{J}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}_s$ 为独立电源引起的电流列向量。式(4-6)就是割集电压方程的矩阵形式。

4.1.4 状态方程

1. 状态和状态变量

“状态”是系统理论中的一个重要概念。在电路理论中, “状态”是指在某给定时刻电路所必须具备的最少量的信息, 它们和从该时刻开始的任意输入一起就足以完全确定今后该电路在任何时刻的性状。

状态变量是电路的一组独立的动态变量, 它们在任何时刻的值组成了电路在该时刻的状态。状态变量在初始观察时刻($t=0$)的值称为电路的初始状态。通常电容上的电压 u_C (或电荷 q_C) 和电感中的电流 i_L (或磁链 ψ_L) 为状态变量。

2. 状态方程

设电路具有 n 个状态变量, m 个独立电源, 则用 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 表示状态向量, $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m]^T$ 表示输入向量, $\dot{\mathbf{x}}_k \stackrel{\text{def}}{=} dx_k/dt$, $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \cdots \ \dot{x}_n]^T$, 则有如下形式的状态方

程的标准形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (4-7)$$

式中 \mathbf{A} 为 $n \times n$ 方阵, \mathbf{B} 为 $n \times m$ 矩阵。

对于图 4.2 所示电路中的回路, 由于支路电压是受 KVL 约束的, 故回路中的三个电容电压线性相关(即相互不独立), 不能同时作为状态变量, 只能选其中的两个电容电压作为状态变量。对于图 4.3 所示的结点, 其支路电流要受 KCL 的约束, 故只能选其中的两个电感电流作为状态变量。

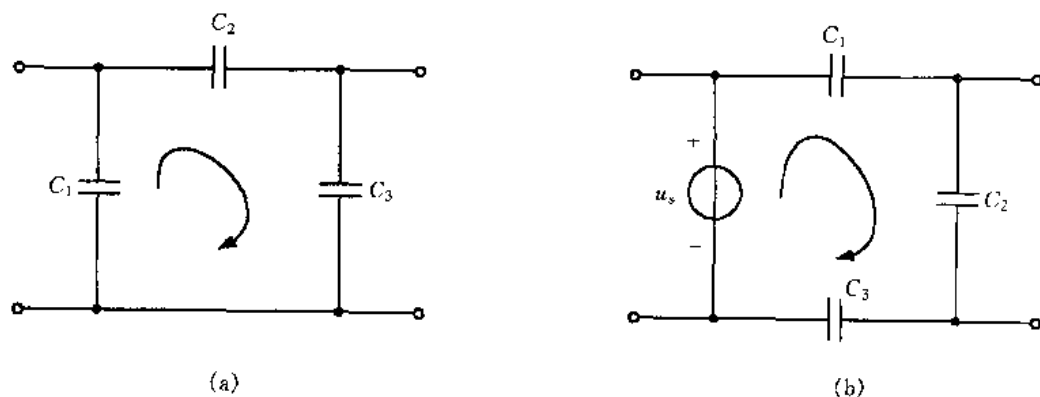


图 4.2

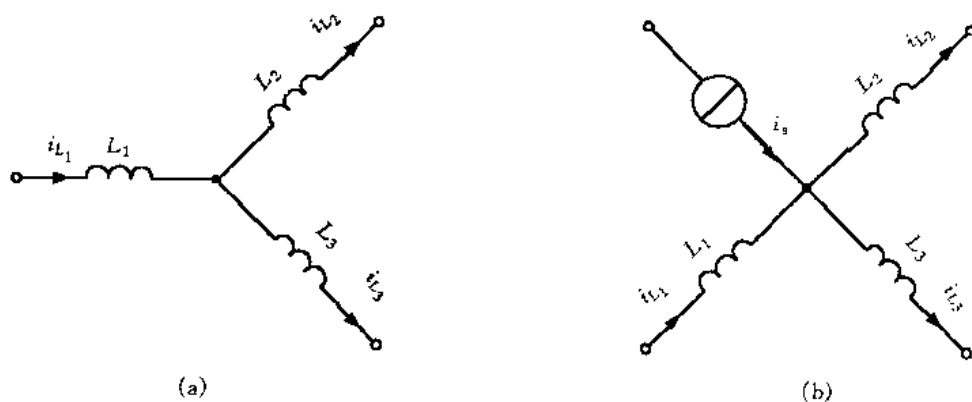


图 4.3

用直观法列写状态方程的一般步骤是:

- ① 选所有独立的电容电压和电感电流作为状态变量;
- ② 对每个独立电容写出只含此独立电容电压一阶导数在内的结点(割集)KCL 方程;对每个独立电感写出只含此独立电感电流一阶导数在内的回路 KVL 方程;
- ③ 若第②步列出的 KCL 和 KVL 方程中含有非状态变量, 则应利用适当的结点(割集) KCL 方程和回路 KVL 方程予以消去;
- ④ 将第③步中得到的状态方程整理成标准形式。

3. 输出方程

由于状态变量具有完备性,因此可以利用状态变量的线性组合和输入可以表示电路的全部输出。设电路有 q 个输出,则输出方程可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (4-8)$$

式中 $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_q]^T$, \mathbf{C} 为 $q \times n$ 矩阵, \mathbf{D} 为 $q \times m$ 矩阵。

4.2 典型题解析

例 4.2.1 已知基本割集矩阵如下:

$$\mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)请写出与 \mathbf{Q}_t 相同树的基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 。

(2)作出对应的有向图。

解 给定的基本割集矩阵是按先连支后树支的顺序排列的。可简写为

$$\mathbf{Q}_t = [\mathbf{Q}_l : \mathbf{1}_t]$$

其中连支数 $l=6$, 树支数 $t=5$ 。当基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 与 \mathbf{Q}_t 具有相同的树, 且 \mathbf{B}_f 与 \mathbf{Q}_t 的各列按相同的支路编号排列时, 则有

$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{1}_l : \mathbf{B}_t] = [\mathbf{1}_l : -\mathbf{Q}_l^T]$$

其中

$$-\mathbf{Q}_l^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

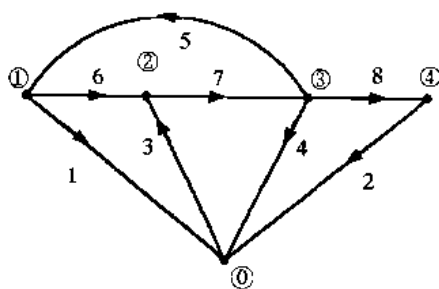
(2) 按得到的 B_f 作有向图。由 B_f 可知:回路 1, 4, 5, 6 均含两条树支, 回路 2, 3 的树支相同。因而连支 2, 3 为并联, 画出这两个回路, 其中的 8, 9, 10 为树支。然后再画出另两条树支 7, 11, 最后按基本回路画出各个连支。完整的有向图如例图 4.2.1 所示。

例 4.2.2 已知有向图的关联矩阵 A 为:

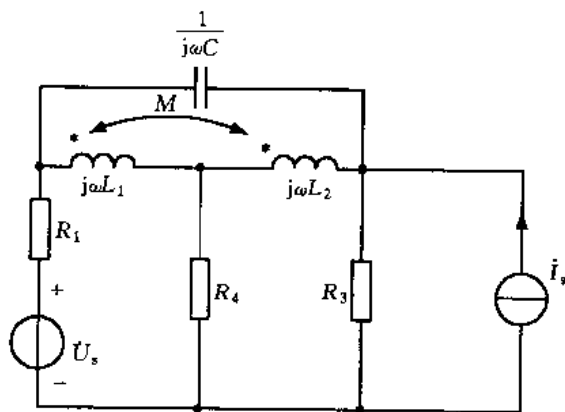
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

请根据关联矩阵 A 画出对应的有向图。

解 先标出结点 1, 2, 3, 4, 然后根据支路与结点的关联情况, 逐个添上各支路。最后完成的有向图如例图 4.2.2 所示。



例图 4.2.2



例图 4.2.3

例 4.2.3 写出例图 4.2.3 所示电路的结点电压方程的矩阵形式。

解 首先作出对应的有向图如例图 4.2.4 所示, 并写出关联矩阵 A 。由于存在互感, 需先给出支路阻抗矩阵 Z 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega L_1 & j\omega M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_2/\Delta & -M/\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M/\Delta & L_1/\Delta \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{j\omega} \begin{vmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{vmatrix} = j\omega(L_1 L_2 - M^2)$$

支路电流源列向量 $\dot{\mathbf{I}}_s$ 与支路电压源列向量 $\dot{\mathbf{U}}_s$ 分别为

$$\dot{\mathbf{I}}_s = [0 \quad 0 \quad \dot{I}_s \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_s = [-\dot{U}_s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4)$$

结点导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \quad (5)$$

结点电流源列向量为

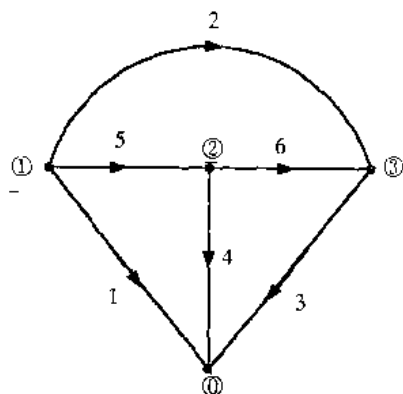
$$\mathbf{J}_n = \mathbf{A} \dot{\mathbf{I}}_s - \mathbf{A} \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}_s \quad (6)$$

将式(1),(2)代入式(5),将式(1)~(4)代入式(6),就得到矩阵形式的结点电压方程 $\mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{J}_n$, 即

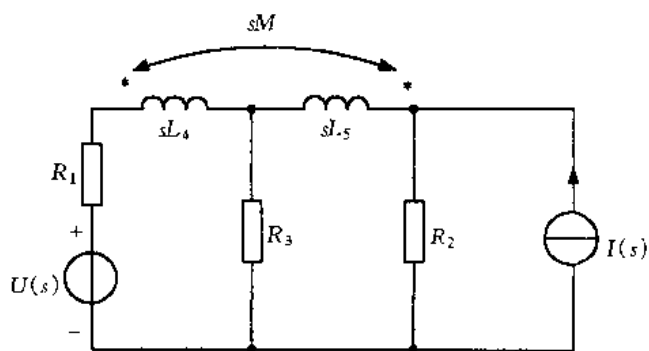
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{L_2}{\Delta} & -\frac{L_2 + M}{\Delta} & -j\omega C + \frac{M}{\Delta} \\ -\frac{L_2 + M}{\Delta} & \frac{1}{R_4} + \frac{L_1 + L_2 + 2M}{\Delta} & -\frac{L_1 + M}{\Delta} \\ -j\omega C + \frac{M}{\Delta} & -\frac{L_1 + M}{\Delta} & j\omega C + \frac{1}{R_3} + \frac{L_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_s}{R_1} \\ 0 \\ \dot{I}_s \end{bmatrix}$$

例 4.2.4 电路如例图 4.2.5(a)所示,其有向图如例图 4.2.5(b)所示。以支路 3,4,5 为树支,写出基本回路矩阵和回路电流方程的矩阵形式。

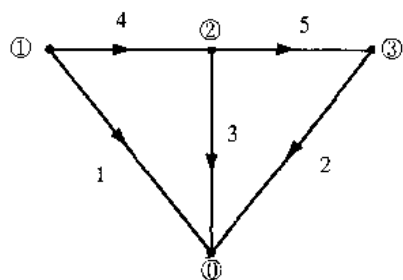
解 以 3,4,5 为树支的基本回路如例图 4.2.6 所示,其对应的基本回路矩阵为



例图 4.2.4



(a)



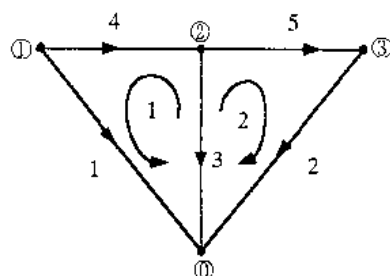
(b)

例图 4.2.5

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

按例图 4.2.6 列出支路阻抗矩阵 \mathbf{Z}

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_4 & -sM \\ 0 & 0 & 0 & -sM & sL_5 \end{bmatrix}$$



例图 4.2.6

回路阻抗矩阵 \mathbf{Z}_l 为

$$\mathbf{Z}_l = \mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{B}_f^T = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + sL_4 & R_3 + sM \\ R_3 + sM & R_2 + R_3 + sL_5 \end{bmatrix}$$

按例图 4.2.5 列出支路电流源列向量 $\mathbf{I}_s(s)$ 和支路电压源列向量 $\mathbf{U}_s(s)$

$$\mathbf{I}_s(s) = [0 \quad I(s) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{U}_s(s) = [-U_s(s) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

由 $\mathbf{B}_f, \mathbf{Z}, \mathbf{I}_s(s)$ 及 $\mathbf{U}_s(s)$ 计算回路电压源列向量 $\mathbf{U}_l(s)$ 。

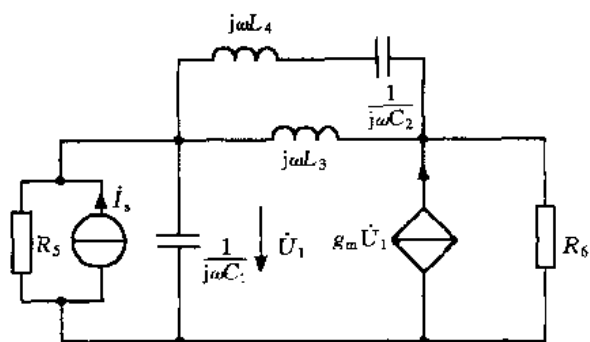
$$\mathbf{U}_l(s) = \mathbf{B}_f \mathbf{U}_s(s) - \mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{I}_s(s) = \begin{bmatrix} -U(s) \\ -R_2 I(s) \end{bmatrix}$$

矩阵形式的回路电流方程 $\mathbf{Z}_l \mathbf{I}_l(s) = \mathbf{U}_l(s)$ 为

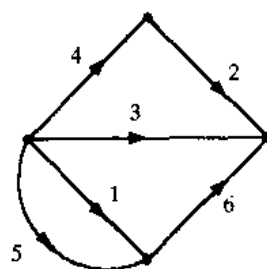
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + sL_4 & R_3 + sM \\ R_3 + sM & R_2 + R_3 + sL_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{l1}(s) \\ I_{l2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U(s) \\ -R_2 I(s) \end{bmatrix}$$

例 4.2.5 例图 4.2.7(a) 所示电路为正弦电流电路, 其有向图如例图 4.2.7(b) 所示。设支路 1, 2, 6 为树支, 试写出基本割集矩阵和割集导纳矩阵。

解 选支路 1, 2, 6 为树支, 其割集的方向与树支方向相同, 如例图 4.2.8 所示。则基本割集矩阵为



(a)



(b)

例图 4.2.7

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

支路 6 的电压、电流方程为

$$\dot{U}_6 = R_6(I_6 - g_m \dot{U}_1)$$

从式(2)可得支路 6 的支路方程为

$$I_6 = \frac{1}{R_6} \dot{U}_6 + g_m \dot{U}_1$$

其余 5 条支路的支路方程为

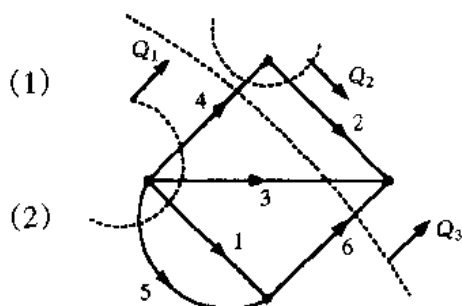
$$I_k = Y_k \dot{U}_k \quad (4)$$

从式(3)和式(4)可得支路导纳矩阵 Y

$$Y = \begin{bmatrix} j\omega C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \quad (5)$$

将式(1)的各列重新排列,使它与支路导纳矩阵 Y 的支路顺序号一致,即

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

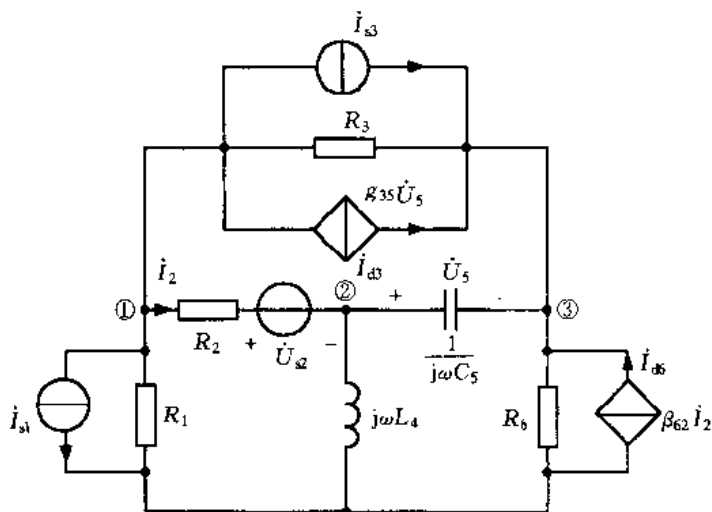


例图 4.2.8

割集导纳矩阵为

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Q}_t \mathbf{Y} \mathbf{Q}_t^T = \begin{bmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{j\omega L_4} & \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L_4} \\ \frac{-1}{j\omega L_4} & j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_4} & \frac{-1}{j\omega L_4} \\ g_m + \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L_4} & \frac{-1}{j\omega L_4} & \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L_4} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}$$

例 4.2.6 电路如例图 4.2.9 所示, 请写出支路方程 $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_s) + \dot{\mathbf{I}}_s$ 。



例图 4.2.9

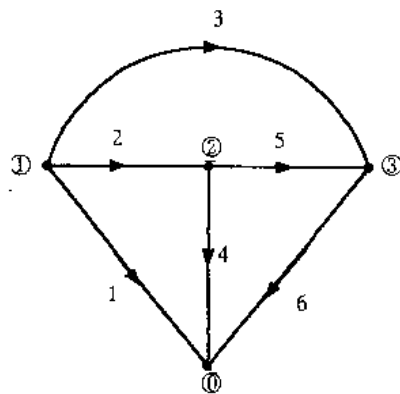
解 $\dot{I}_{d3} = g_{35}\dot{U}_5$, $\dot{I}_{d6} = \beta_{62}\dot{I}_2 = \frac{\beta_{62}}{R_2}(\dot{U}_2 - \dot{U}_s)$, 例图 4.2.9 的有向图如例图 4.2.10 所示。

各支路的方程为

$$\dot{I}_k = Y_k(\dot{U}_k + \dot{U}_{sk}) + \dot{I}_{dk} - \dot{I}_{sk}$$

因此, 支路导纳矩阵为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & g_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_5 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{62}}{R_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}$$



例图 4.2.10

电流源列向量与电压源列向量为

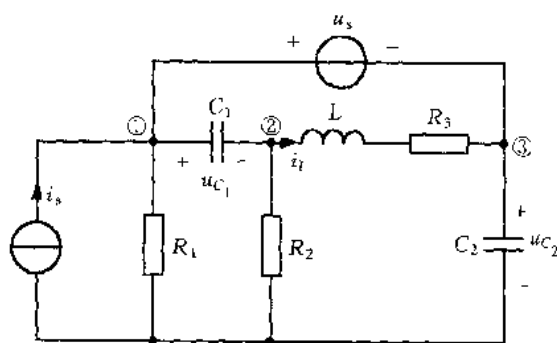
$$\mathbf{I}_s = [-I_{s1} \quad 0 \quad -I_{s3} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{U}_s = [0 \quad -U_{s2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

因此,支路方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & g_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j\omega L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega C_5 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_{62}}{R_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 + 0 \\ U_2 - U_{s2} \\ U_3 + 0 \\ U_4 + 0 \\ U_5 - 0 \\ U_6 + 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{s1} \\ 0 \\ -I_{s3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例 4.2.7 电路如例图 4.2.11 所示,选 u_{C_1}, u_{C_2}, i_L 为状态变量,请列出该电路的状态方程。



例图 4.2.11

解 列 KCL 和 KVL 方程

$$-C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + i_L + \frac{1}{R_2}(u_s + u_{C_2} - u_{C_1}) = 0$$

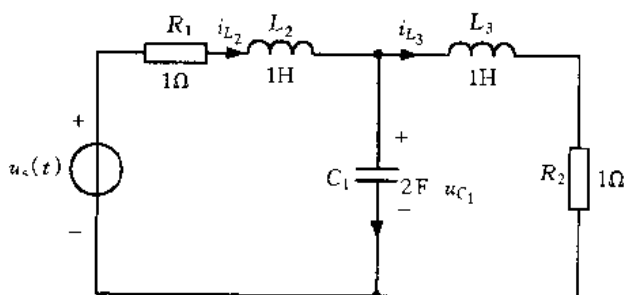
$$-C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} + i_s - \frac{1}{R_2}(u_s + u_{C_2} - u_{C_1}) - \frac{1}{R_1}(u_s + u_{C_2}) = 0$$

$$-L \frac{di_L}{dt} + u_s - u_{C_1} - R_3 i_L = 0$$

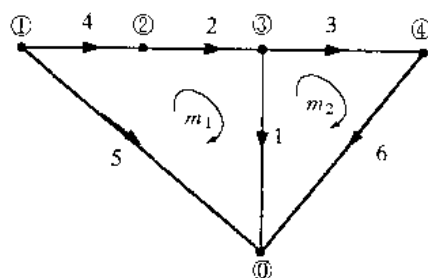
经整理,得矩阵形式的状态方程

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{(R_1 + R_2)}{C_2 R_1 R_2} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_{L_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ -\frac{R_1 + R_2}{C_2 R_1 R_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

例 4.2.8 电路如例图 4.2.12 所示,试写出状态方程。



例图 4.2.12



例图 4.2.13

解 将支路编号,画对电路的有向图如例图 4.2.13 所示。选 $u_{C_1}, i_{L_2}, i_{L_3}$ 为状态变量。对结点③列 KCL 方程,对网孔 1,2 列 KVL 方程如下:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} - i_{L_2} + i_{L_3} &= 0 \\ L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + u_{C_1} - u_s + R_1 i_{L_2} &= 0 \\ L_3 \frac{di_{L_3}}{dt} + R_2 i_{L_3} - u_{C_1} &= 0 \end{aligned}$$

令 $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L_2 = L_3 = 1 \text{ H}$, $C_1 = 2 \text{ F}$,并整理,最后得到状态方程如下

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} \\ \frac{di_{L_3}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

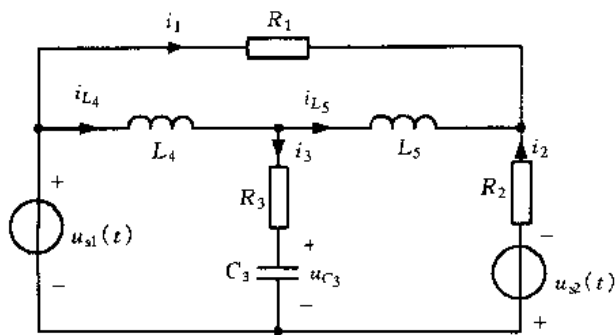
例 4.2.9 电路如例图 4.2.14 所示,状态变量为 $u_{C_3}, i_{L_4}, i_{L_5}$,其参考方向图上已标出,试列写状态方程的标准形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bv}$$

其中 $\mathbf{x} = [u_{C_3} \quad i_{L_4} \quad i_{L_5}]^T$

解 列 KCL 和 KVL 方程如下

$$C_3 \frac{du_{C_3}}{dt} - i_{L_4} + i_{L_5} = 0 \quad (1)$$



例图 4.2.14

$$L_4 \frac{di_{L_4}}{dt} + R_3 i_3 + u_{C_3} - u_{s1}(t) = 0 \quad (2)$$

$$L_5 \frac{di_{L_5}}{dt} - R_2 i_2 - u_{s2}(t) - u_{C_3} - R_3 i_3 = 0 \quad (3)$$

方程中含非状态变量 i_2, i_3 , 为消去 i_2, i_3 , 补充下列三个方程

$$i_3 - i_{L_4} + i_{L_5} = 0 \quad (4)$$

$$i_2 + i_{L_5} + i_1 = 0 \quad (5)$$

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 - u_{s2}(t) - u_{s1}(t) = 0 \quad (6)$$

由(5),(6)两式可解出

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{L_5} - \frac{u_{s1}(t) + u_{s2}(t)}{R_1 + R_2} \quad (7)$$

由式(4)直接得到

$$i_3 = i_{L_4} - i_{L_5} \quad (8)$$

将式(7),(8)代入式(2),(3),并整理式(1),(2),(3)即得状态方程如下

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$$

其中

$$\mathbf{x} = [u_{C_3} \quad i_{L_4} \quad i_{L_5}]^T, \quad \dot{\mathbf{x}} = \left[\frac{du_{C_3}}{dt} \quad \frac{di_{L_4}}{dt} \quad \frac{di_{L_5}}{dt} \right]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ -\frac{1}{L_4} & -\frac{R_3}{L_4} & \frac{R_3}{L_4} \\ \frac{1}{L_5} & -\frac{R_3}{L_5} & -\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{L_5(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

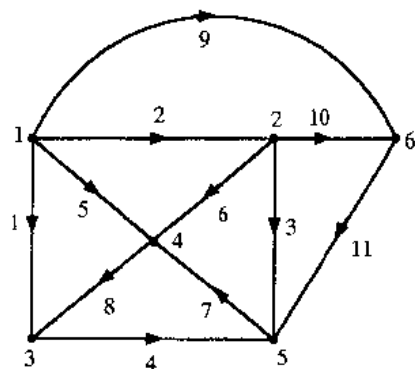
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_4} & 0 \\ \frac{R_2}{L_5(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{L_5(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [u_{s1}(t) \quad u_{\varphi}(t)]$$

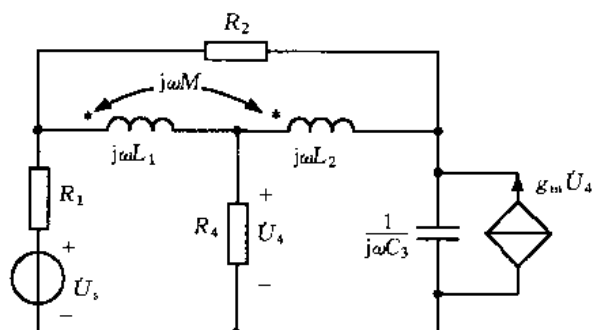
4.3 阶段测试题

[题 4.1] 有向图如题图 4.1 所示,若选支路 5,6,7,8,10 为树支组成树 T ,试写出该图关于树 T 的基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 和基本割集矩阵 \mathbf{Q}_f 。

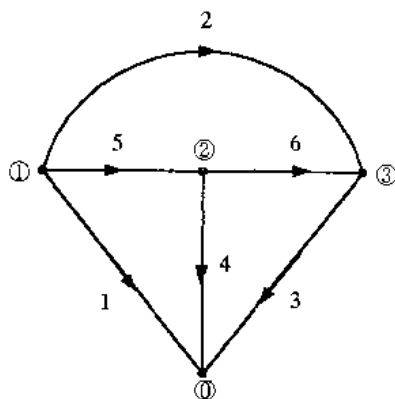
[题 4.2] 电路如题图 4.2(a)所示,其有向图如题图 4.2(b)所示,试写出结点电压方程的矩阵形式(用相量)。



题图 4.1



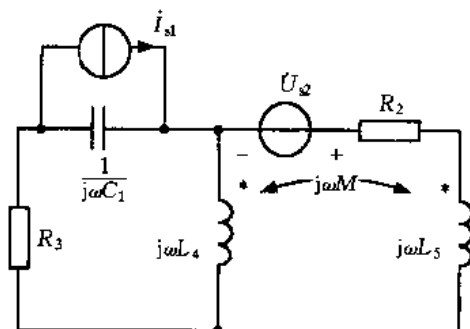
(a)



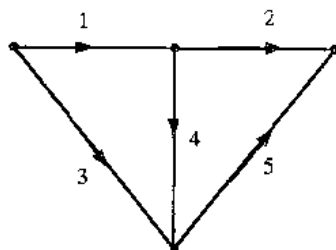
(b)

题图 4.2

[题 4.3] 电路如题图 4.3(a)所示,其有向图如题图 4.3(b)所示,试选支路 1,4,5 为树,写出基本回路矩阵 \mathbf{B}_f 和相应的回路电流方程的矩阵形式。



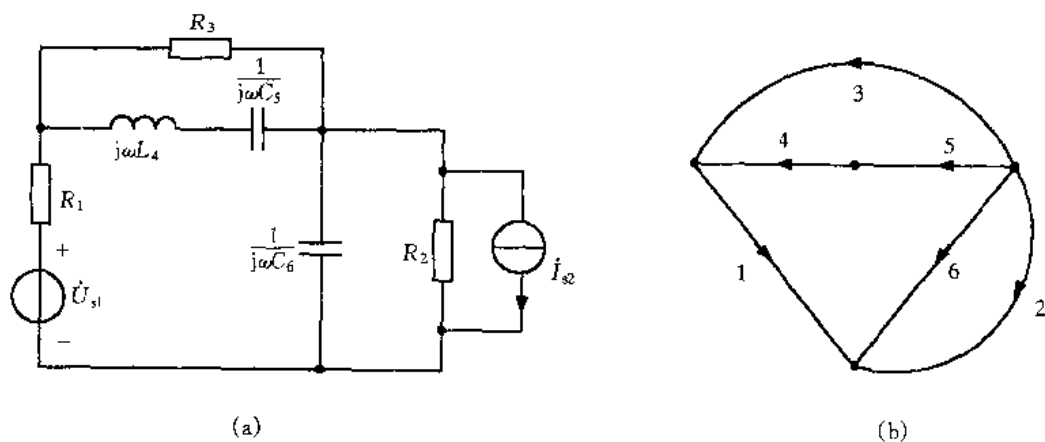
(a)



(b)

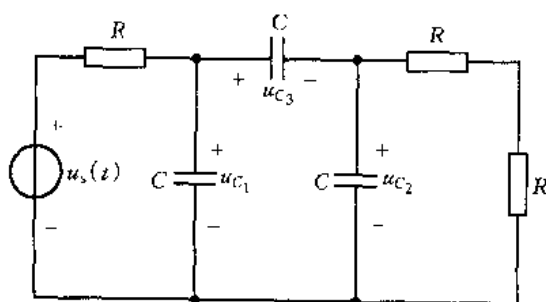
题图 4.3

[题 4.4] 电路如题图 4.4(a)所示,其有向图如题图 4.4(b)所示,选 4,5,6 为树支,写出基本割集矩阵 Q_l 和割集导纳矩阵 Y_{lc} 。



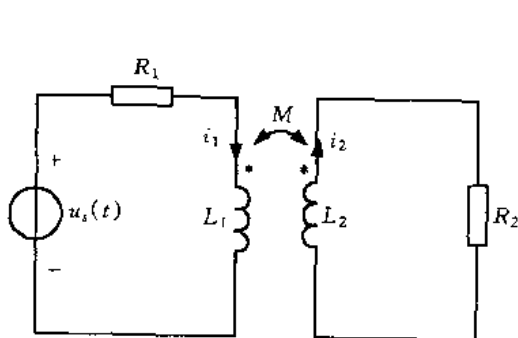
题图 4.4

[题 4.5] 列出题图 4.5 所示电路的状态方程。图中 $R=1\Omega, C=1F$ 。(提示:由于 3 个电容 C 组成纯电容回路,故只有两个电容电压是独立的,可选 u_{C1}, u_{C2} 为状态变量)

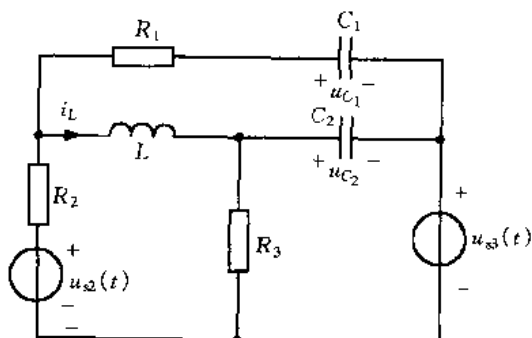


题图 4.5

[题 4.6] 列出题图 4.6 所示电路的状态方程,选 i_1, i_2 为状态变量。



题图 4.6



题图 4.7

[题 4.7] 选 u_{C_1}, u_{C_2}, i_L 为状态变量, 试列出题图 4.7 所示电路的状态方程。

4.4 阶段测试题答案

[题 4.1]

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 11 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

[题 4.2] 结点电压方程如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{L_2}{\Delta} & -\frac{L_2 + M}{\Delta} & -\frac{1}{R_2} + \frac{M}{\Delta} \\ -\frac{L_2 + M}{\Delta} & \frac{1}{R_4} + \frac{L_1 + L_2 + 2M}{\Delta} & -\frac{L_1 + M}{\Delta} \\ -\frac{1}{R_2} + \frac{M}{\Delta} & -\frac{L_1 + M}{\Delta} - g_m & \frac{1}{R_2} + j\omega C_3 + \frac{L_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_{s1}}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta = j\omega(L_1L_2 - M^2)$

[题 4.3]

$$\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

回路电流方程如下:

$$\begin{bmatrix} R_2 + j\omega(L_4 + L_5 - 2M) & j\omega(L_4 - M) \\ j\omega(L_4 - M) & R_3 + j(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ j\frac{1}{\omega C_1}\dot{I}_{s1} \end{bmatrix}$$

[题 4.4]

$$\mathbf{Q}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

割集导纳矩阵 \mathbf{Y}_t 如下

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_5 & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_6 \end{bmatrix}$$

[题 4.5]

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} [u_{s1}]$$

[题 4.6]

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{M^2 - L_1 L_2} \begin{bmatrix} R_1 L_2 & R_2 M \\ R_1 M & R_2 L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 \\ M \end{bmatrix} [u_s(t)]$$

[题 4.7] $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$, 其中

$$\mathbf{x} = [u_{C_1} \quad u_{C_2} \quad i_L]^T$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} & \frac{du_{C_2}}{dt} & \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1(R_1 + R_2)} & 0 & -\frac{R_2}{C_1(R_1 + R_2)} \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C_1(R_1 + R_2)} \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C_2} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [u_{s2}(t) \quad u_{s3}(t)]^T$$

第 5 章 二端口网络

5.1 理论提要

5.1.1 二端口

如果一个电路向外引出 4 个端子,如图 5.1(a)所示,称之为四端网络。若在任一时刻,从端子 1 流入网络的电流等于从端子 1' 流出的电流,从端子 2 流入的电流等于从端子 2' 流出的电流,则称这种四端网络为二端口网络,简称二端口。

若四端网络 N 只由两条支路构成,如图 5.1(b)所示,则端口条件总是满足的,与外电路的连接方式无关,这种网络总为二端口。

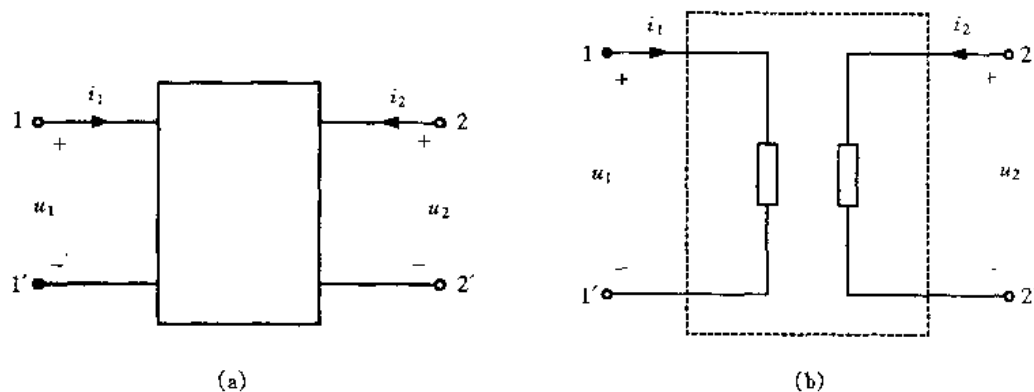


图 5.1 二端口

用二端口概念分析电路时,仅对二端口处的电压、电流之间的关系感兴趣,这种相互关系可以通过二端口的几种参数表示,而这些参数只取决于构成二端口本身的元件及它们的连接方式。利用这些参数,可以使二端口电路的计算得以简化。

设二端口输入端口 1-1' 的电压和电流用 u_1 和 i_1 表示,输出端口 2-2' 的电压和电流用 u_2 和 i_2 表示,如图 5.1(a)所示。本章只讨论内部不含独立源的线性二端口。

5.1.2 二端口的方程和参数

图 5.2 所示为一线性二端口。在分析中将按正弦稳态情况考虑,并应用相量法。则二端口的短路参数方程为

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ I_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

称为二端口的 Y 参数矩阵, 而 $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ 称为二端口的 Y 参数(也称短路导纳参数)。

短路(导纳)参数由下列公式确定

$$Y_{11} = \frac{I_1}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad Y_{12} = \frac{I_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} \quad Y_{22} = \frac{I_2}{\dot{U}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0}$$

二端口的开路参数方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

称为二端口的 Z 参数矩阵, 而 $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ 称为二端口的 Z 参数(也称开路阻抗参数)。

开路(阻抗)参数由下列公式确定

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Y 参数矩阵与 Z 参数矩阵之间的关系为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \text{ 或 } \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$$

二端口的传输参数方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 - B\dot{I}_2 \\ I_1 = C\dot{U}_2 - D\dot{I}_2 \end{cases}$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

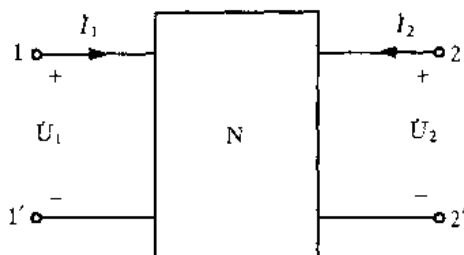


图 5.2 线性二端口

称为 T 参数矩阵, 而 A, B, C, D 则称为二端口的一般参数、传输参数、 T 参数或 A 参数。

传输参数由下列公式确定

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} & B &= \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \\ C &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} & D &= \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \end{aligned}$$

二端口的混合参数方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases}$$

将其表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

称为混合参数矩阵, $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ 称为混合参数。混合参数由下列公式确定

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} & H_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \\ H_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} & H_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \end{aligned}$$

当二端口满足互易定理时, 存在如下关系:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{21} \\ Y_{12} &= Y_{21} \\ H_{12} &= -H_{21} \\ AD - BC &= 1 \end{aligned}$$

换句话说讲, 二端口的各组参数中, 只有 3 个参数是独立的, 这类二端口称为互易二端口。

如果互易二端口是对称的, 除了满足上述条件外, 还有如下关系

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{22} \\ Y_{11} &= Y_{22} \\ A &= D \\ H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} &= 1 \end{aligned}$$

即二端口只有 2 个参数是独立的。

5.1.3 二端口的连接

将一个复杂的二端口看成是由若干个简单的二端口按某种方式连接而成, 这将使电路分析得到简化。二端口的连接主要有 3 种形式, 级联(链联)、串联和并联, 分别如图 5.3(a), (b), (c) 所示。在二端口的连接问题上, 感兴趣的是复合二端口的参数与各部分二端口的参数之间的关系。

若设二端口 N_1 和 N_2 的 T 参数矩阵分别为 \mathbf{T}_1 和 \mathbf{T}_2 , 则 N_1 和 N_2 级联后, 其 T 参数矩阵

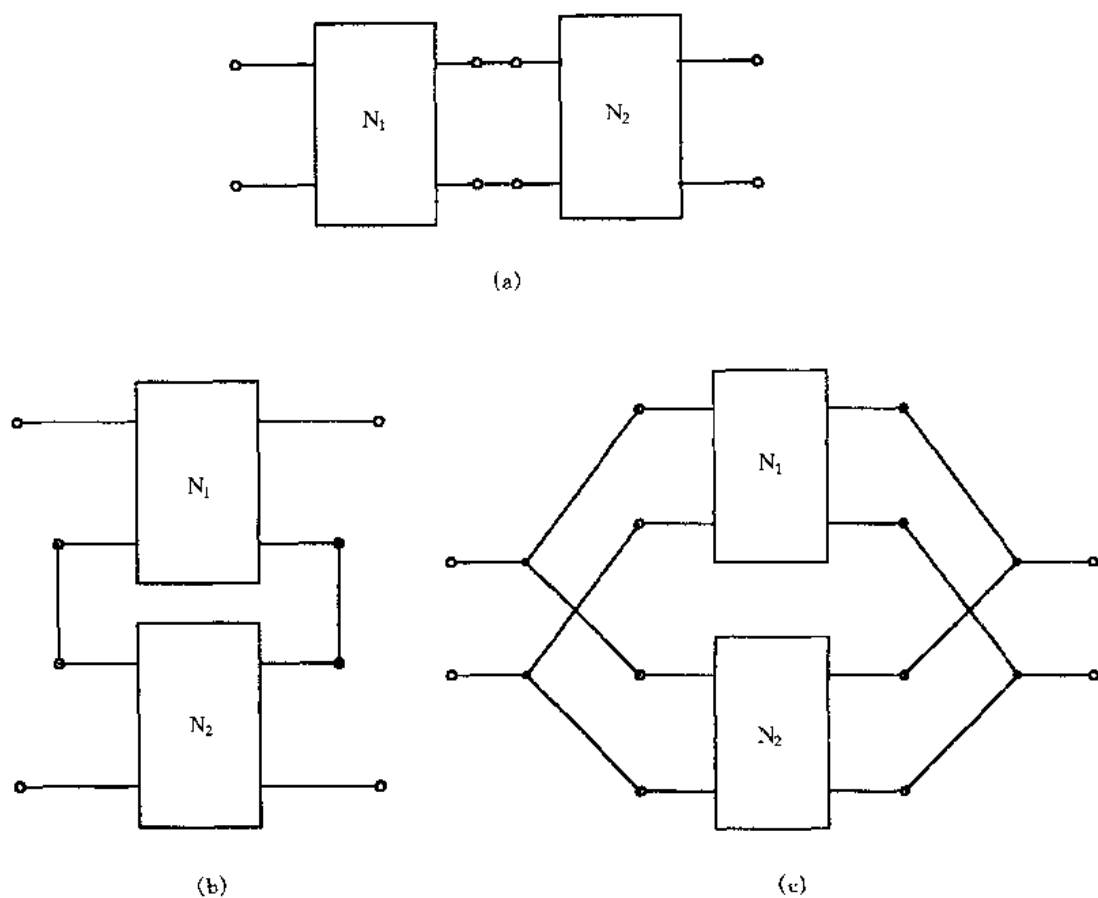


图 5.3 二端口的连接

为

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$$

设二端口 N_1 和 N_2 的 Z 参数矩阵分别为 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 , 则 N_1 和 N_2 串联后的 Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

设二端口 N_1 和 N_2 的 Y 参数矩阵分别为 \mathbf{Y}_1 和 \mathbf{Y}_2 , 则 N_1 和 N_2 并联后的 Y 参数矩阵为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

5.1.4 回转器和负阻抗变换器

理想回转器是一种线性非互易的二端口元件, 图 5.4 为它的电路符号图。它的端口电压、电流可用下列方程表示

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -ri_2 \\ u_2 &= ri_1 \end{aligned} \right\}$$

或

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= gu_2 \\ i_2 &= -gu_1 \end{aligned} \right\}$$

式中的 r 和 g 分别具有电阻和电导的量纲。 r 和 g 分别称为回转电阻和回转电导,简称回转常数。

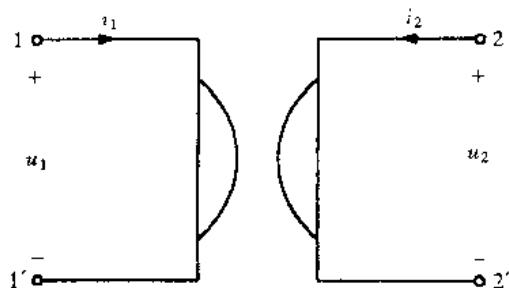


图 5.4 回转器

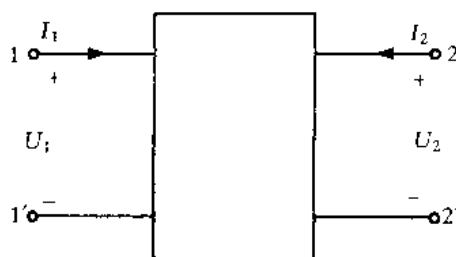


图 5.5 NIC

负阻抗变换器(简称 NIC)也是一个二端口,其符号如图 5.5 所示。它的端口特性可以用 T 参数描述,即

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

或

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

式中 k 为正实常数。式(5-1)定义的 NIC 称为电流反向型的 NIC,式(5-2)定义的 NIC 称为电压反向型的 NIC。NIC 可将正阻抗变换为负阻抗,因而为电路设计中实现负 R, L, C 提供了可能性。

5.2 典型题解析

例 5.2.1 确定例图 5.2.1 电路的 Z 参数。

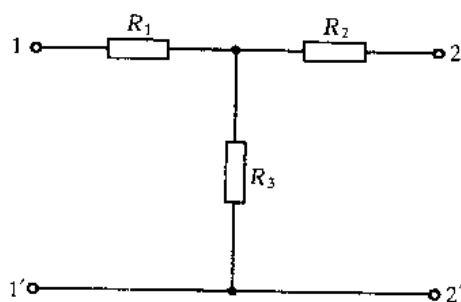
解 方法 1: 为了确定 Z_{11} 和 Z_{21} 我们在端口 1-1' 施加电压源 \dot{U}_1 , 并将端口 2-2' 开路, 如例图 5.2.2(a) 所示。则 Z_{11} 和 Z_{21} 为

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1/(R_1 + R_3)} = R_1 + R_3$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{I_2=0} = \frac{R_3 \dot{U}_1 / (R_1 + R_3)}{\dot{U}_1 / (R_1 + R_3)} = R_3$$

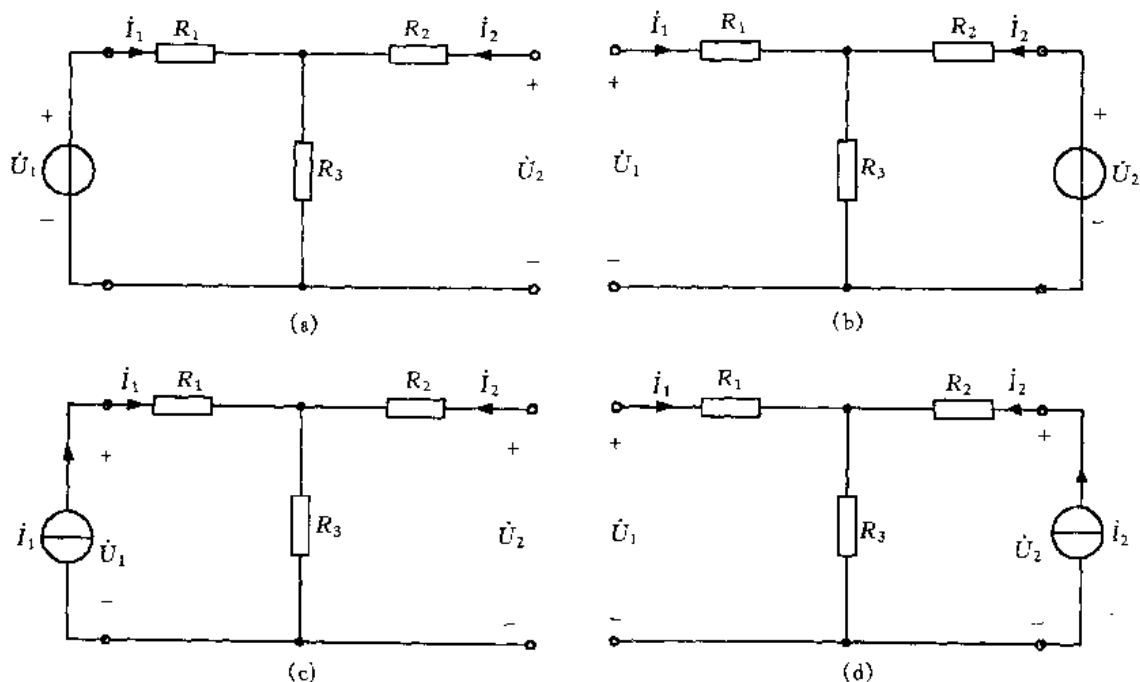
为了确定 Z_{12} 和 Z_{22} , 我们在端口 2-2' 施加电压源 \dot{U}_2 , 并将端口 1-1' 开路, 如例图 5.2.2(b) 所示。则 Z_{12} 和 Z_{22} 为

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_3 \dot{U}_2 / (R_2 + R_3)}{\dot{U}_2 / (R_2 + R_3)} = R_3$$



例图 5.2.1

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_2/(R_2+R_3)} = R_2 + R_3$$



例图 5.2.2

方法 2: 我们还可以在端口 1-1' 施加电流源 \dot{I}_1 , 并将端口 2-2' 开路, 如例图 5.2.2(c) 所示, 这样

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{(R_1+R_3)\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = R_1 + R_3$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{R_3\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = R_3$$

同理, 在端口 2-2' 施加电流源 \dot{I}_2 , 并将端口 1-1' 开路, 如例图 5.2.2(d) 所示, 则

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \frac{R_3\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = R_3$$

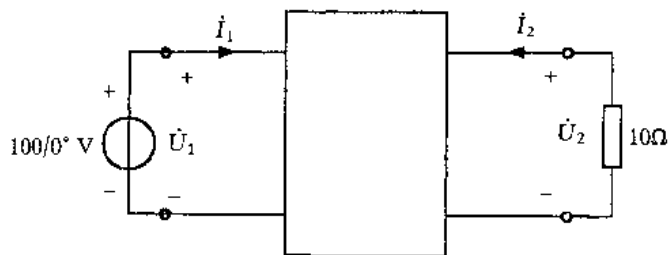
$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \frac{(R_2+R_3)\dot{I}_2}{\dot{I}_2} = R_2 + R_3$$

例 5.2.2 二端口 N 的 Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 40 & j20 \\ j30 & 50 \end{bmatrix} \Omega$$

在端口 1-1' 施加电压源 $\dot{U}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, 在端口 2-2' 接 10Ω 负载电阻, 如例图 5.2.3 所示, 试求两个端口处电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。

解 利用 Z 参数方程有



例图 5.2.3

$$\dot{U}_1 = 40\dot{I}_1 + j20\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j30\dot{I}_1 + 50\dot{I}_2$$

为了求 I_1 和 I_2 , 将 $\dot{U}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ 和 $\dot{U}_2 = -10\dot{I}_2$ 代入上式得

$$40\dot{I}_1 + j20\dot{I}_2 = 100$$

$$j30\dot{I}_1 + 60\dot{I}_2 = 0$$

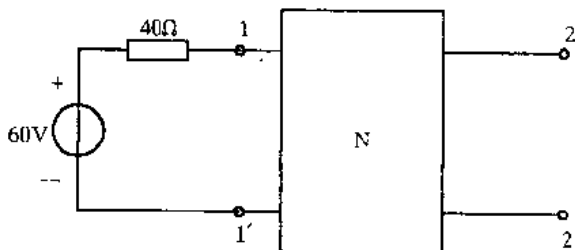
解上式可得

$$\dot{I}_1 = 2 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \dot{I}_2 = 1 \angle -90^\circ \text{ A}$$

例 5.2.3 电路如例图 5.2.4 所示, 已知二端口 N 的混合参数矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10^3 & -2 \\ 10 & 2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

求输出端口 2-2' 的戴维宁等效电路。



例图 5.2.4

解 为了获得戴维宁等效电路的等效电阻 R_{∞} 。将输入端口的 60 V 电压源置零, 在输出端口施加 1 V 的电压源, 如例图 5.2.5(a)所示, 此时 $U_2 = 1$, $U_1 = -40I_1$ 。将 U_1, U_2 值代入 H 参数方程得

$$-40I_1 = H_{11}I_1 + H_{12} \quad (1)$$

$$I_2 = H_{21}I_1 + H_{22} \quad (2)$$

从式(1)有

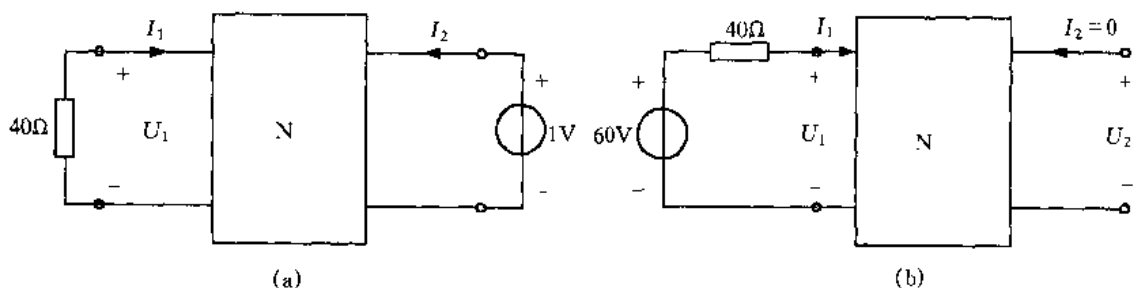
$$I_1 = -\frac{H_{12}}{40 + H_{11}}$$

将此式代入式(2)得

$$I_2 = H_{22} - \frac{H_{21}H_{12}}{40 + H_{11}} = \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} + 40H_{22}}{40 + H_{11}}$$

因此

$$R_{eq} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{I_2} = \frac{40 + H_{11}}{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} + 40H_{22}} = 51.46 \Omega$$



例图 5.2.5

(a) 求 R_{eq} ; (b) 求 U_{oc}

为了获得戴维宁等效电路的开路电压 U_{oc} , 我们求例图 5.2.5(b) 所示电路的开路电压。在输入端口

$$U_1 = 60 - 40I_1$$

在输出端口

$$I_2 = 0$$

将 U_1 和 I_2 代入到二端口的 H 参数方程有

$$60 - 40I_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \quad (3)$$

$$0 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \quad (4)$$

从式(4)有

$$I_1 = -\frac{H_{22}}{H_{21}}U_2 \quad (5)$$

将式(5)代入到式(3)得

$$60 = [-(H_{11} + 40)\frac{H_{22}}{H_{21}} + H_{12}]U_2$$

从而

$$U_{oc} = U_2 = \frac{60}{-(H_{11} + 40)H_{22}/H_{21} + H_{12}} = -29.69 \text{ V}$$

例 5.2.4 试求例图 5.2.6 所示二端口的传输参数。

解 为了确定 A 和 C , 将输出端口开路, 则 $I_2 = 0$, 如例图 5.2.7(a) 所示。在输入端加电压源 U_1 , 于是有

$$U_1 = (10 + 20)I_1 = 30I_1$$

$$U_2 = 20I_1 - 3I_1 = 17I_1$$

这样

$$A = \frac{U_1}{U_2} = \frac{30I_1}{17I_1} = 1.765,$$

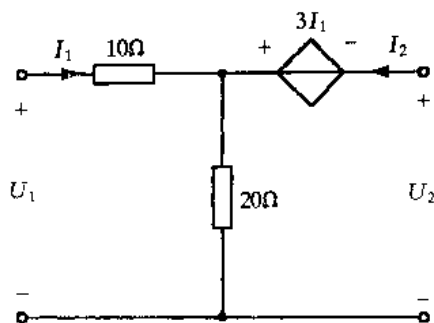
$$C = \frac{I_1}{U_2} = \frac{I_1}{17I_1} = 0.05885 \text{ S}$$

为了确定 B 和 D , 将输出端口短路, 所以 $U_2 = 0$, 如例图 5.2.7(b) 所示。在输入端加电压源 U_1 , 在结点 a , 应用 KCL 得

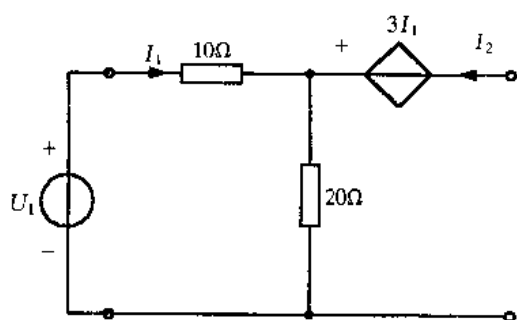
$$-\frac{U_1 - U_a}{10} + \frac{U_a}{20} - I_2 = 0 \quad (1)$$

但是

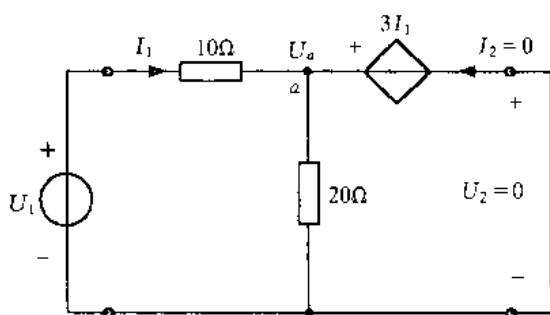
$$U_a = 3I_1 \quad (2)$$



例图 5.2.6



(a)



(b)

例图 5.2.7

(a) 求 A 和 C ; (b) 求 B 和 D

$$I_1 = \frac{U_1 - U_a}{10} \quad (3)$$

从而得到

$$U_1 = 13I_1 \quad (4)$$

将式(2), (3)代入式(1), 则有

$$-I_1 + \frac{3I_1}{20} + I_2 = 0$$

从上式可得

$$\frac{17}{20}I_1 = -I_2$$

因此

$$D = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{20}{17} = 1.176, \quad B = -\frac{U_1}{I_2} = -\frac{13I_1}{(-17/20)I_1} = 15.29 \Omega$$

例 5.2.5 例图 5.2.8 所示二端口的 T 参数矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix}$$

输出端口接一个可变负载电阻 R_L 。问当 R_L 为何值时, R_L 可获得最大功率, 并求最大功率。

解 首先, 我们需要求得在二端口输出端的戴维宁等效电路(R_{eq} 和 U_{oc})。利用例图 5.2.9(a) 电路求 R_{eq} , 我们的目的是得到 $R_{eq} = U_2/I_2$ 。将已知的 $ABCD$ 参数代入传输参数方程有

$$U_1 = 4U_2 - 20I_2 \quad (1)$$

$$I_1 = 0.1U_2 - 2I_2 \quad (2)$$

在输入端口, $U_1 = -10I_1$, 代入式(1)有

$$-10I_1 = 4U_2 - 20I_2$$

或

$$I_1 = -0.4U_2 + 2I_2 \quad (3)$$

令式(2)和式(3)的右边相等, 即

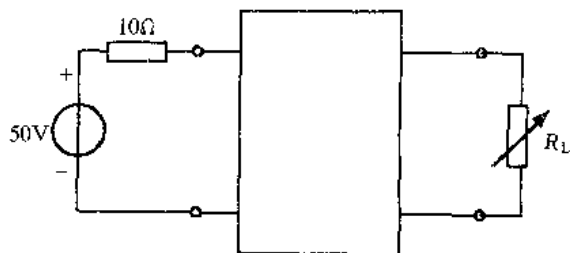
$$0.1U_2 - 2I_1 = -0.4U_2 + 2I_2$$

从上式可得

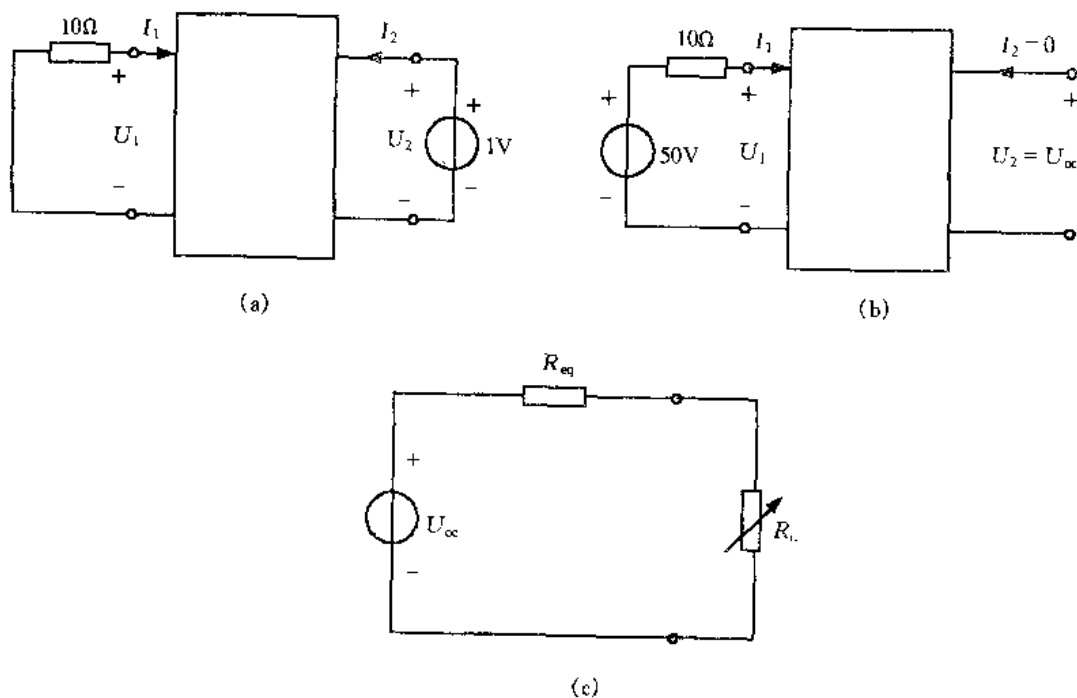
$$0.5U_2 = 4I_2$$

因而

$$R_{eq} = \frac{U_2}{I_2} = 8 \Omega$$



例图 5.2.8



例图 5.2.9

为了求 U_{oc} , 利用例图 5.2.9(b) 的电路。在输出端 $I_2 = 0$, 输入端 $U_1 = 50 - 10I_1$, 代入式(1)、式(2)

$$50 - 10I_1 = 4U_2 \quad (4)$$

$$I_1 = 0.1U_2 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),得

$$50 - U_2 = 4U_2$$

即

$$U_2 = U_{\infty} = 10 \text{ V}$$

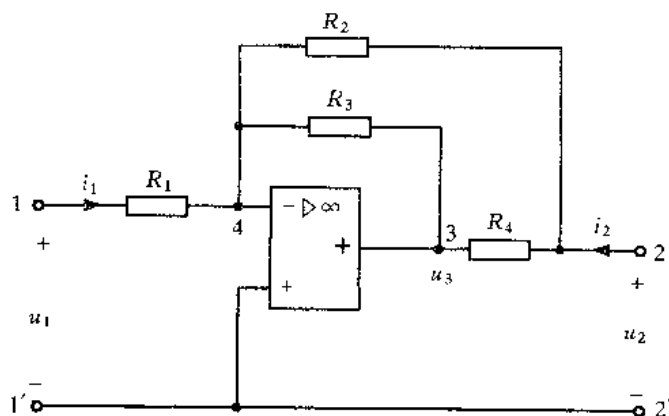
这样,戴维宁等效电路如例图 5.2.9(c)所示,只有当

$$R_L = R_{\text{eq}} = 8 \Omega$$

时,获得最大功率传输,其值为

$$P_{\max} = I^2 R_L = \left(\frac{U_{\infty}}{2R_L} \right)^2 R_L = \frac{U_{\infty}^2}{4R_L} = \frac{100}{32} = 3.125 \text{ W}$$

例 5.2.6 求例图 5.2.10 所示电路的 Y 参数和 H 参数。



例图 5.2.10

解

$$i_1 = \frac{1}{R_1} u_1 \quad (1)$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2} u_2 + \frac{1}{R_4} (u_2 - u_3) \quad (2)$$

对结点 4 应用 KCL

$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_3}{R_3} = 0$$

则可得到

$$u_3 = -\frac{R_3}{R_1} u_1 - \frac{R_3}{R_2} u_2$$

将上式代入 i_2 表达式,得

$$i_2 = \frac{R_3}{R_1 R_4} u_1 + \left[\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right] u_2 \quad (3)$$

由式(1)和式(3)得 Y 参数矩阵为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{R_3}{R_1 R_4} & \frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \mathbf{S}$$

为了求 H 参数,将式(1)改写成下式

$$u_1 = R_1 i_1$$

将上式代入式(3)得

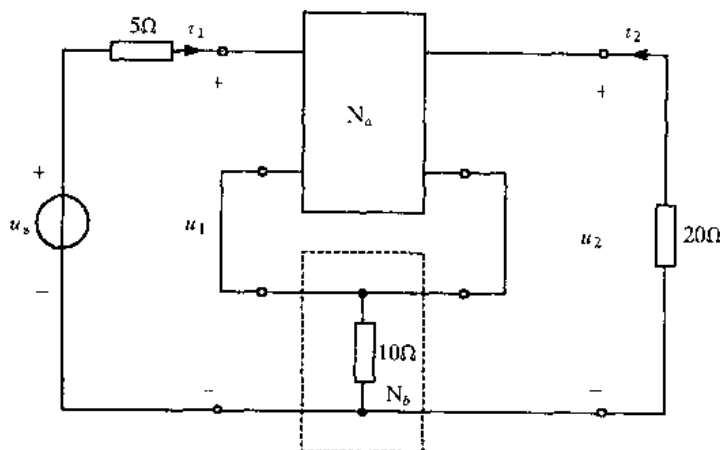
$$i_2 = \frac{R_3}{R_4} i_1 + \left[\frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right] u_2$$

于是, H 参数矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ \frac{R_3}{R_4} & \frac{R_3}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

例 5.2.7 求例图 5.2.11 所示电路的 u_2/u_s , 其中二端口 N_a 的 Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z}_a = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} \Omega$$



例图 5.2.11

解 将例图 5.2.11 的电路看作是二端口 N_a 与 N_b 的串联, N_b 的 Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \Omega$$

于是,串联后的二端口 Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix} \Omega$$

二端口的 Z 参数方程为

$$u_1 = 22i_1 + 18i_2 \quad (1)$$

$$u_2 = 18i_1 + 30i_2 \quad (2)$$

在输入端口有

$$u_1 = u_s - 5i_1 \quad (3)$$

在输出端口有

$$u_2 = -20i_2$$

或

$$i_2 = -\frac{1}{20}u_2 \quad (4)$$

将式(3)和式(4)代入到式(1)得

$$u_s - 5i_1 = 22i_1 - \frac{18}{20}u_2$$

即

$$u_s = 27i_1 - 0.9u_2 \quad (5)$$

将式(4)代入式(2)得

$$u_2 = 18i_1 - \frac{30}{20}u_2$$

整理得

$$i_1 = \frac{5}{36}u_2 \quad (6)$$

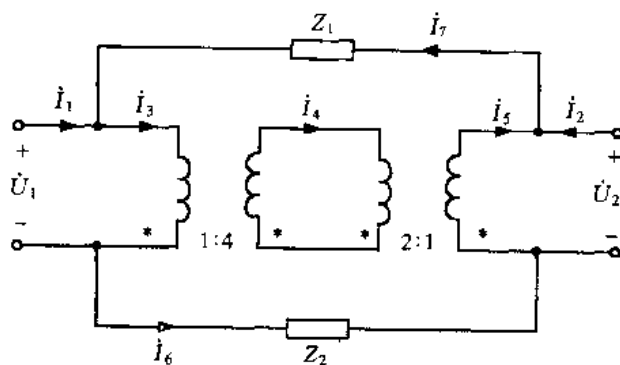
再将式(6)代入式(5),就得到

$$u_s = 27 \times \frac{5}{36}u_2 - 0.9u_2 = 2.85u_2$$

于是

$$\frac{u_2}{u_s} = 0.3509$$

例 5.2.8 求例图 5.2.12 所示二端口的 Z 参数。



例图 5.2.12

解 由理想变压器的电压、电流关系可得

$$U_2 = 4U_1/2 = 2U_1 \quad (1)$$

$$I_5 = 2I_4 = 2 \times (I_3/4) = 0.5I_3$$

按 KCL, 有

$$I_1 = I_3 - I_7, I_2 = I_7 - I_5, I_6 = I_7$$

由上述各个关系式消去中间变量 I_3, I_4, I_5 得

$$I_7 = I_1 + 2I_2 \quad (2)$$

$$I_6 = I_1 + 2I_2 \quad (3)$$

按 KVL, 有

$$\dot{U}_1 = -Z_1 I_7 + \dot{U}_2 - Z_2 I_6 \quad (4)$$

将式(1),(2),(3)代入式(4)得

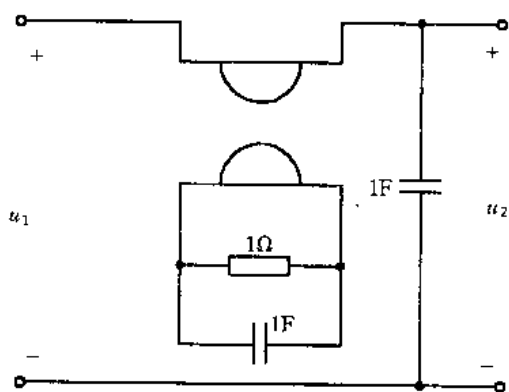
$$\dot{U}_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 + 2(Z_1 + Z_2)I_2$$

$$\dot{U}_2 = 2(Z_1 + Z_2)I_1 + 4(Z_1 + Z_2)I_2$$

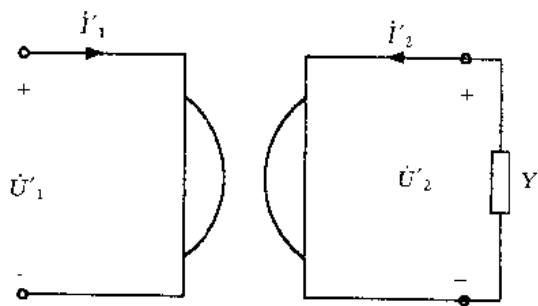
因此, Z 参数矩阵为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2) & 2(Z_1 + Z_2) \\ 2(Z_1 + Z_2) & 4(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$$

例 5.2.9 电路如例图 5.2.13 所示, 已知回转器的回转电阻 $r = 1 \Omega$, 试求 \dot{U}_2/\dot{U}_1 。



例图 5.2.13



例图 5.2.14

解 设回转器原副边电压、电流参考方向如例图 5.2.14 所示, 则回转器方程如下

$$\dot{U}'_1 = -r\dot{I}'_2 \quad (1)$$

$$\dot{U}'_2 = r\dot{I}'_1 \quad (2)$$

由于 $\dot{I}'_2 = -Y\dot{U}'_2$, 将式(2)代入此式后再代入式(1)得

$$\dot{U}'_1 = -r\dot{I}'_1 = rY\dot{U}'_2 = r^2Y\dot{I}'_1$$

由此可得端口 1-1' 的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}'_1}{\dot{I}'_1} = r^2Y$$

因此, 例图 5.2.13 中回转器及其负载 RC 的等效阻抗为

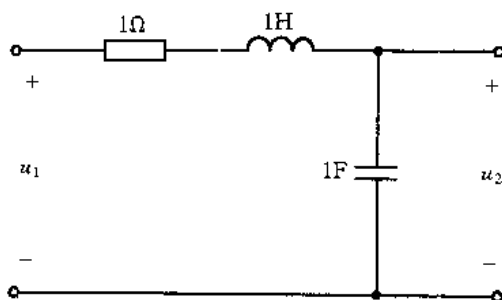
$$Z_{in} = r^2Y = 1 + j\omega$$

显然,这是一个 $1\ \Omega$ 电阻与一个 $1\ \text{H}$ 电感的串联。这样,例图 5.2.13 的电路就等效为例图 5.2.15 的电路,因此

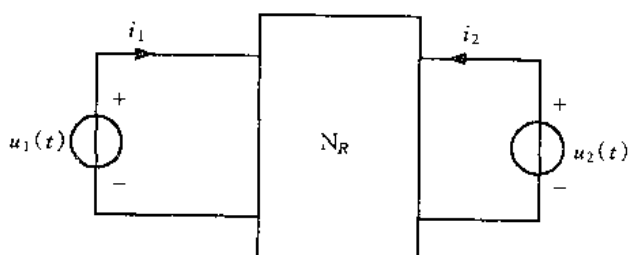
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega}}{1 + j\omega + \frac{1}{j\omega}} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

例 5.2.10 在例图 5.2.16 所示线性电阻电路中,已知当 $u_1(t) = 30\ \text{V}$, $u_2(t) = 0$ 时, $i_1(t) = 5\ \text{A}$, $i_2(t) = -2\ \text{A}$ 。试求当 $u_1(t) = (30t + 60)\ \text{V}$, $u_2(t) = (60t + 15)\ \text{V}$ 时的 $i_1(t)$ 。

解 采用 Y 参数方程表示端口处的电压、



例图 5.2.15



例图 5.2.16

电流关系,即

$$i_1(t) = G_{11}u_1(t) + G_{12}u_2(t) \quad (1)$$

$$i_2(t) = G_{21}u_1(t) + G_{22}u_2(t) \quad (2)$$

将已知数据代入式(2)得

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} = \frac{-2}{30} = -\frac{1}{15}\ \text{S}$$

线性电阻电路 N_R 具有互易性,参数满足如下关系

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{15}\ \text{S}$$

由已知条件得

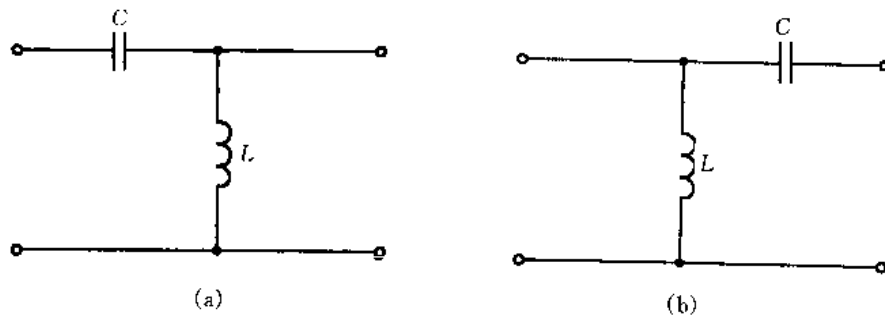
$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}\ \text{S}$$

因此

$$\begin{aligned} i_1(t) &= G_{11}u_1(t) + G_{12}u_2(t) \\ &= \frac{1}{6} \times (30t + 60) - \frac{1}{15} \times (60t + 15) \\ &= (t + 9)\text{A} \end{aligned}$$

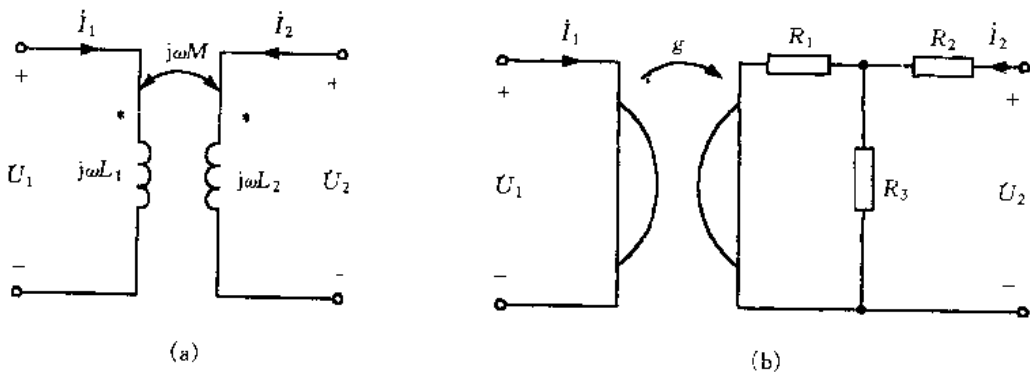
5.3 阶段测试题

[题 5.1] 求题图 5.1 二端口的 Y 和 T 参数矩阵。



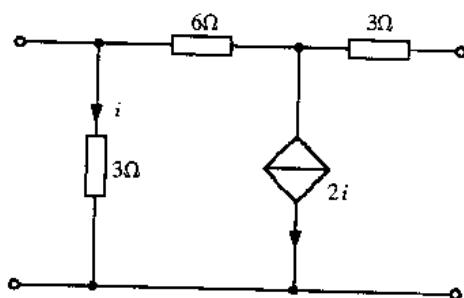
题图 5.1

[题 5.2] 求题图 5.2 二端口的 T 参数矩阵。

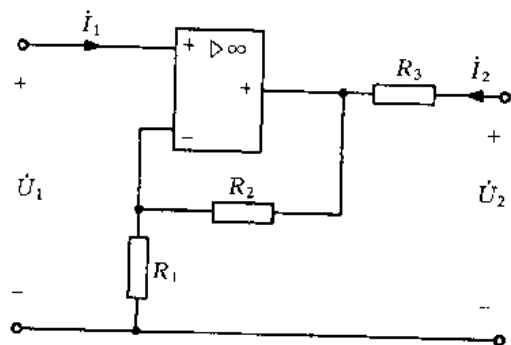


题图 5.2

[题 5.3] 求题图 5.3 二端口的 Y 参数矩阵。



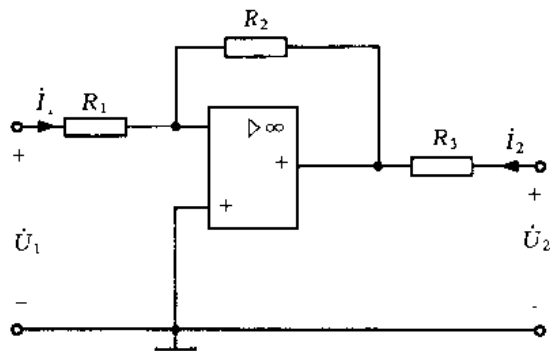
题图 5.3



题图 5.4

[题 5.4] 求题图 5.4 电路的 Y 参数。

[题 5.5] 求题图 5.5 二端口的 Z 参数。

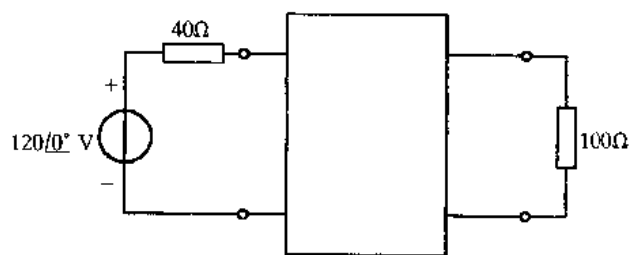


题图 5.5

[题 5.6] 电路如题图 5.6 所示, 已知二端口的 Z 参数矩阵为

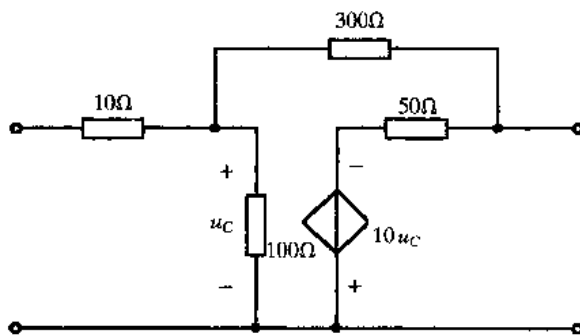
$$Z = \begin{bmatrix} 50 & 60 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} \Omega$$

计算 100Ω 电阻吸收的平均功率。



题图 5.6

[题 5.7] 求题图 5.7 的 H 参数矩阵。

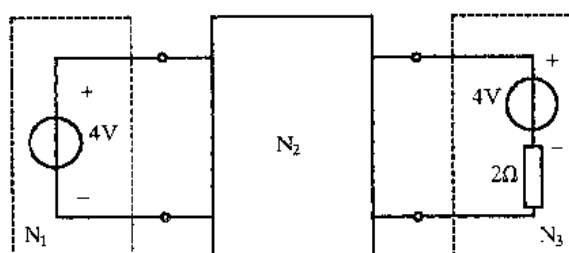


题图 5.7

[题 5.8] 已知题图 5.8 所示二端口 N_2 的传输参数方程为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

求 N_1, N_2, N_3 各自发出或吸收的功率。

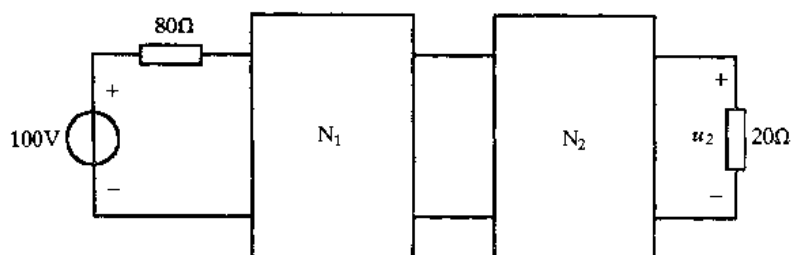


题图 5.8

[题 5.9] 电路如题图 5.9 所示, 已知

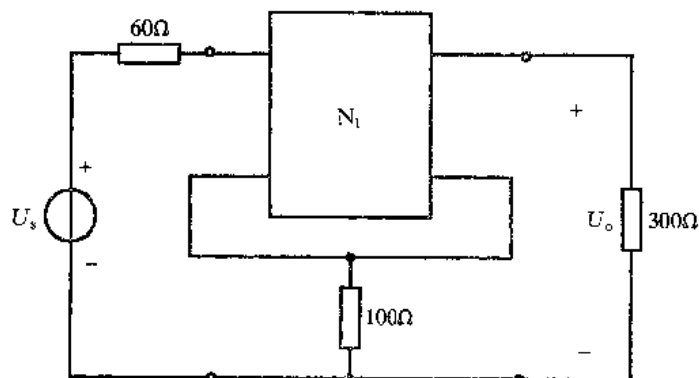
$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix}$$

试求负载电压 u_2 。



题图 5.9

[题 5.10] 电路如题图 5.10 所示, 已知二端口 N_1 的 Y 参数矩阵为



题图 5.10

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ mS}$$

求电路的 U_o/U_s 。

5.4 阶段测试题答案

[题 5.1]

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Y &= \begin{bmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} & T &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad Y &= \begin{bmatrix} j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -j\omega C \\ -j\omega C & j\omega C \end{bmatrix} & T &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[题 5.2]

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad T &= \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & j\omega(\frac{L_1 L_2}{M} - M) \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{gR_3} & \frac{R_2 + R_3}{gR_3} \\ \frac{g(R_1 + R_3)}{R_3} & \frac{g(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}{R_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[题 5.3]

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

[题 5.4]

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_3} & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

[题 5.5]

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

[题 5.6]

$$P = 16 \text{ W}$$

[题 5.7]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{340}{4} \Omega & \frac{1}{4} \\ \frac{59}{4} & \frac{29}{400} \text{ S} \end{bmatrix}$$

【题 5.8】 N_1 吸收功率 24 W, N_2 发出功率 22 W, N_3 发出功率 2 W。

【题 5.9】 $u_2 = 1 \text{ V}$

【题 5.10】 $U_o/U_s = 3/32$ 。

附录 1

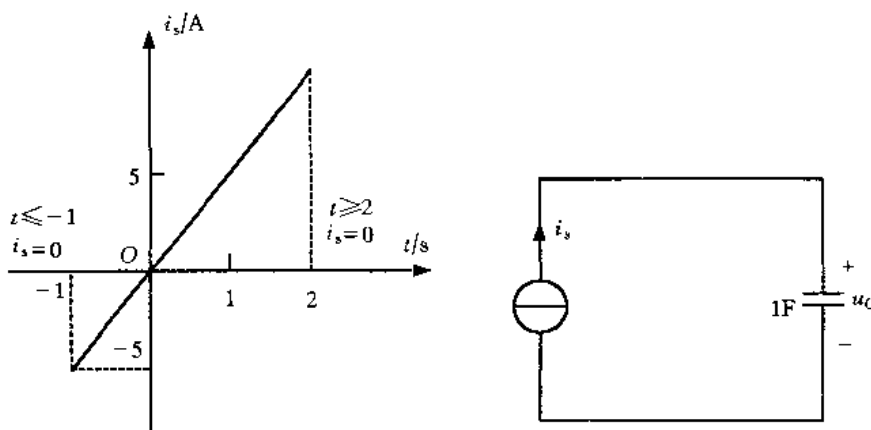
研究生入学考试模拟试题

研究生入学考试模拟试题(一)

一、选择题:(每题 5 分)(将选择的答案用笔圈出来)

1. 图示电路,在 $t=0$ 时的电容电压 $u_C(0)$ 为:

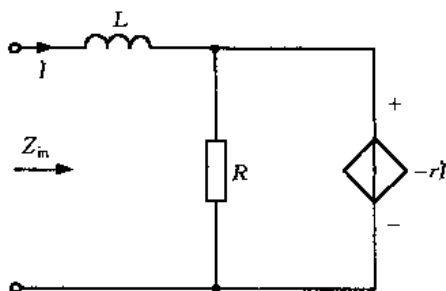
- (a) 0 V; (b) 2.5 V; (c) -2.5 V; (d) 5 V; (e) 以上皆非。



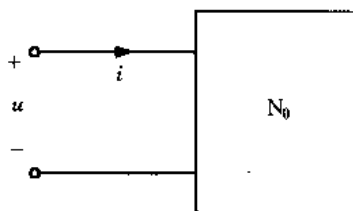
题图 1.1

2. 题图 1.2 所示电路,在角频率为 ω 时的入端阻抗 Z_{in} 为:

- (a) $-r + j\omega L \Omega$; (b) $j\omega L \Omega$; (c) $r + j\omega L \Omega$;
(d) $-r \Omega$; (e) 以上皆非。



题图 1.2



题图 1.3

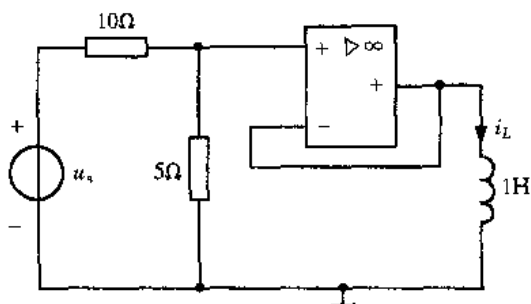
3. 题图 1.3 所示 N_0 为不含独立源的一端口正弦电流电路。已知: $u = 100\cos 100t$ V, $i = 10\cos(100t - 120^\circ)$ A,该一端口吸收的复功率 \tilde{S} 为:

- (a) $-250 \text{ V}\cdot\text{A}$; (b) $j250\sqrt{3} \text{ V}\cdot\text{A}$; (c) $250 + j250 \text{ V}\cdot\text{A}$;
(d) $-250 + j250\sqrt{3} \text{ V}\cdot\text{A}$; (e) 以上皆非。

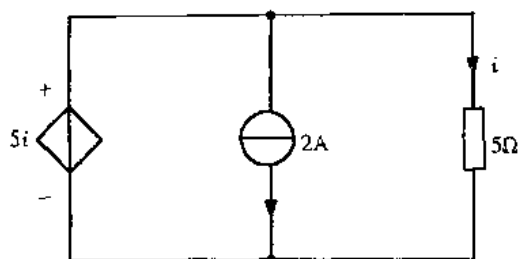
4. 题图 1.4 所示电路中的电流 i_L 为:

- (a) 0 A; (b) 0.5 A; (c) $0.5e^{5t}$ A;

- (d) $0.5e^{-\frac{10}{3}t}$ A; (e) 以上皆非。



题图 1.4 $u_s = 1.5e^{\alpha t} \delta(t)$ V



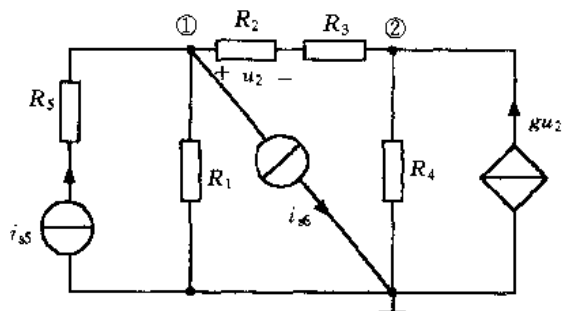
题图 1.5

5. 题图 1.5 所示电路中, 电流源发出的功率 P_s 为:

- (a) 0 W; (b) 10 W; (c) -10 W;
(d) -40 W; (e) 以上皆可。

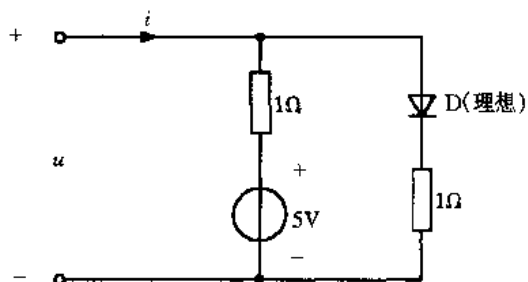
二、填充题:(每题 5 分)(将答案填在每题的空白处)

1. 列出题图 2.1 所示电路的结点电压方程。



题图 2.1

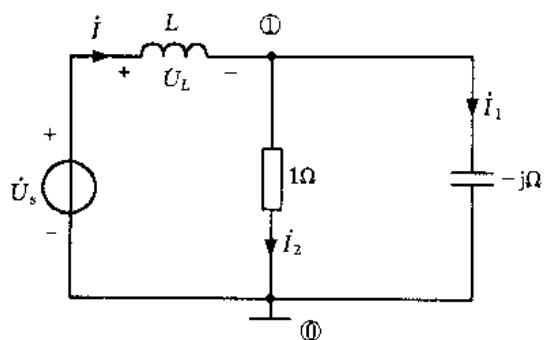
2. 画出题图 2.2 所示电路 VCR, 即 $u = f(i)$



题图 2.2

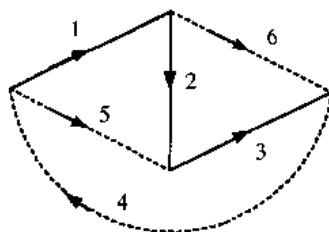
3. 画出题图 2.3 所示电路的相量图, 使满足: (1) KCL: $I = I_1 + I_2$; (2) KVL: $\dot{U}_s = \dot{U}_{10} + \dot{U}_L$;

(3) $U_s = U_{10}\sqrt{2}$.



题图 2.3

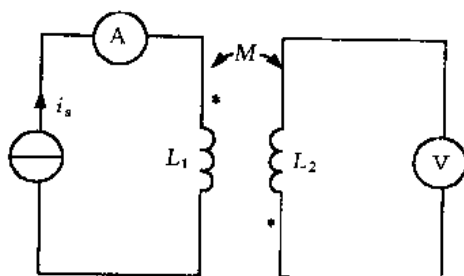
4. 某电路的图如题图 2.4 所示, 图中粗线为树支, 该图的基本割集矩阵 Q_l 为:



题图 2.4

5. 已知题图 2.5 所示电路中的电流源 i_s 为: $i_s = 5 + 10\cos(10t - 20^\circ) - 5\sin(30t + 60^\circ)$ A, $L_1 = L_2 = 2$ H, $M = 0.5$ H, 图中交流电流表Ⓐ和交流伏特表Ⓥ的读数为:

Ⓐ = _____; Ⓥ = _____。

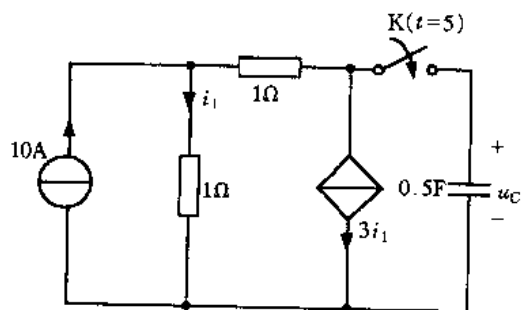


题图 2.5

三、做答题:

1. (15 分) 题图 3.1 所示电路, $t = 5$ s 时将 K 闭合, $u_C(5_-) = 5$ V。求:

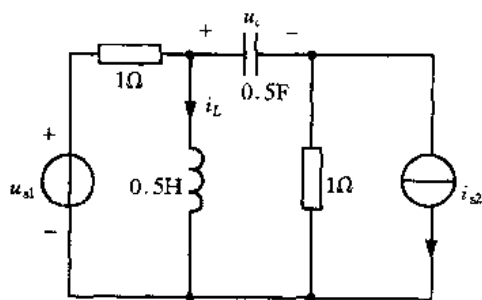
(1) 电压 u_C 的零状态响应、零输入响应和全响应;



题图 3.1

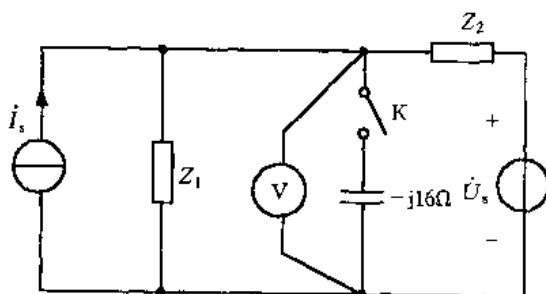
(2) 画出全响应的波形。

2. (10 分) 编写题图 3.2 所示电路的状态方程(写成标准形式)。



题图 3.2

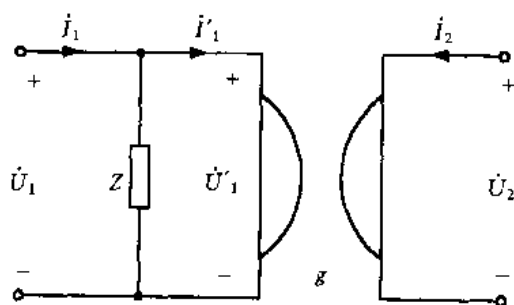
3. (10 分) 已知题图 3.3 所示电路中 \dot{U}_s, \dot{I}_s 为同频正弦量的相量, $Z_1 = 6 + j12 \Omega, Z_2 = 2Z_1$, 当 K 打开时, 交流伏特表的读数 $\text{⑦} = 25 \text{ V}$ 。求 K 闭合后伏特表 ⑦ 的读数。



题图 3.3

4. (15 分) 求题图 3.4 所示电路的传输参数 $[T]$ 。已知:

$$\begin{aligned} \dot{I}'_1 &= +g\dot{U}_2 \\ \dot{I}'_2 &= -g\dot{U}_1' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

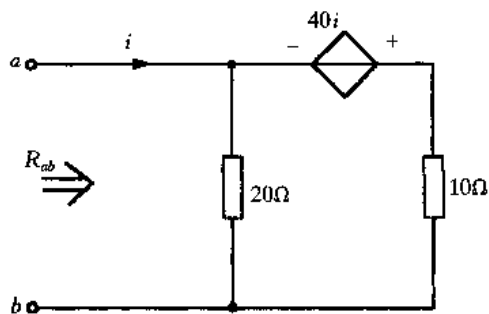


题图 3.4

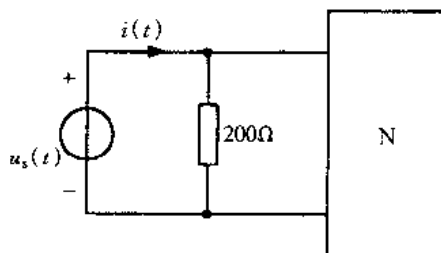
研究生入学考试模拟试题(二)

一、填空题, 每小题 2.5 分, 共 10 小题。

1. 电路如题图 1.1 所示, 求 R_{ab} _____ Ω 。



题图 1.1

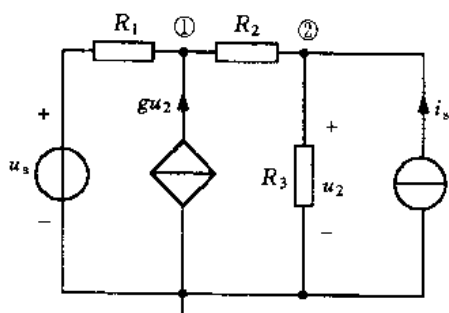


题图 1.2

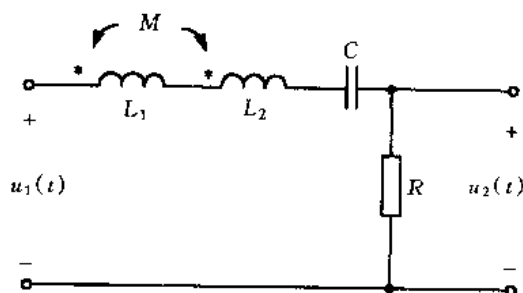
2. 电路如题图 1.2 所示, N 为线性无源网络。已知 $u_s(t) = 100\sqrt{2}\cos(100t + 45^\circ)$ V, $i(t) = 4\sqrt{2}\cos 100t$ A, 求网络 N 吸收的复功率。

$\tilde{S} =$ _____ V·A。

3. 电路如题图 1.3 所示, 按给定结点写出结点①的结点电压方程(_____)



题图 1.3



题图 1.4

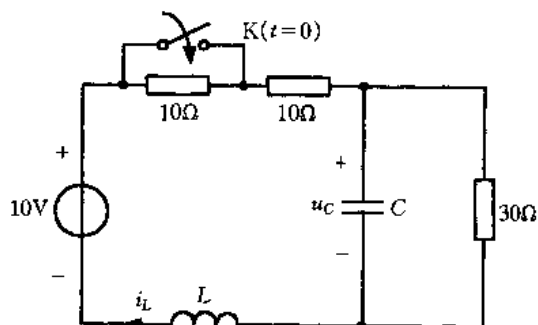
4. 电路如题图 1.4 所示, 已知 $u_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100t + 60^\circ)$ V, $L_1 = L_2 = 0.4$ H, $M = 0.1$ H, 当 $u_2(t) = u_1(t)$ 时。求 $C =$ _____ F。

5. 电路如题图 1.5, 原来处于稳态, $t = 0$ 时开关 K 闭合。则 $u_C(0_+) =$ _____ V。

6. 求题图 1.5 中电感电流 $i_L(0_+) =$ _____ A。

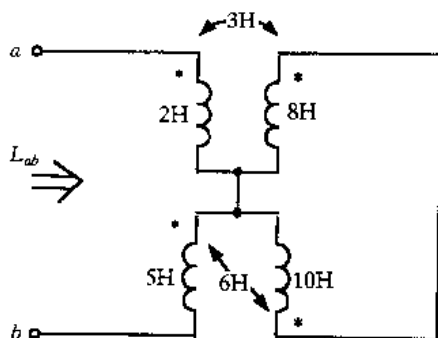
7. 题图 1.7 所示电路中 $L_{ab} =$ _____ H。

8. 电路如题图 1.8 所示, 已知 $L_1 = 0.46$ H,

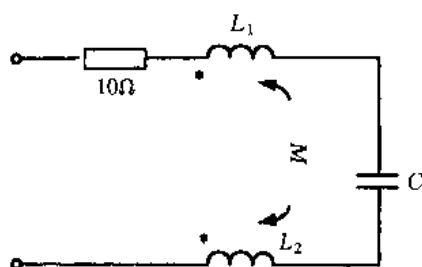


题图 1.5

$L_2 = 0.54 \text{ H}, M = 0.4 \text{ H}, C = 5 \times 10^{-6} \text{ F}$ 。求电路的品质因数 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

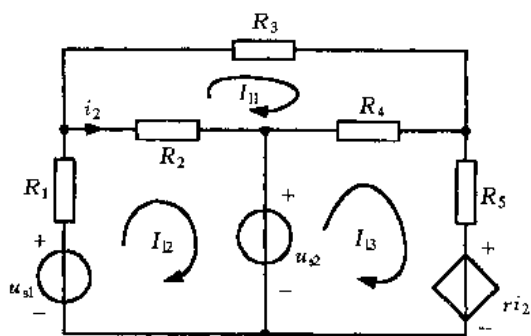


题图 1.7

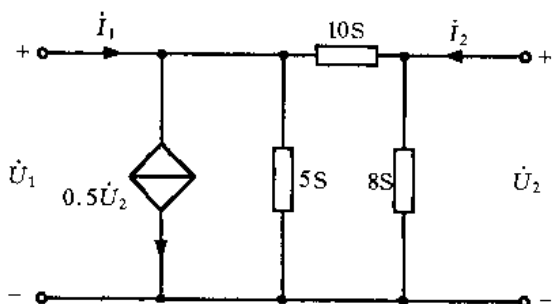


题图 1.8

9. 电路如题图 1.9 所示,按给定网路应用回路法写出回路 3 的回路方程 ($\underline{\hspace{2cm}}$)。



题图 1.9

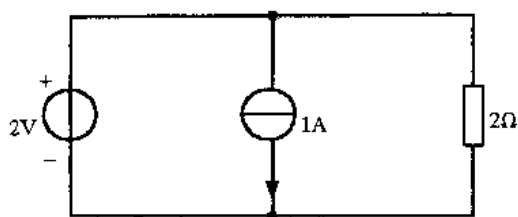


题图 1.10

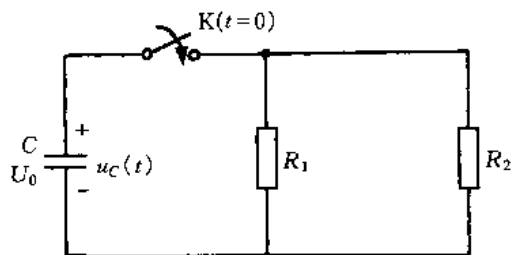
10. 二端口网络如题图 1.10 所示,其短路导纳矩阵 $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

二、选择题,每小题 2.5 分,共 8 小题,选出正确答案。

- 电路如题图 2.1 所示。电压源功率是：
 - 发出 2 W;
 - 吸收 2 W;
 - 发出 4 W;
 - 吸收 4 W;
 - 以上皆非。
- 电路如题图 2.2 所示,已知电容在 K 合上前有电压 U_0 ,在 $t = 0$ 时,开关 K 闭合后, $u_C(t)$ 为：
 - $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$;
 - $u_C(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$;
 - $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)/(R_1 R_2)}}$;
 - $u_C(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)/(R_1 R_2)}}$;
 - 以上皆非。



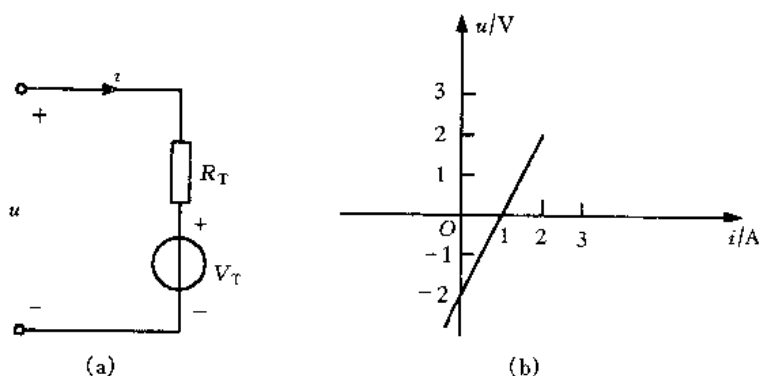
题图 2.1



题图 2.2

3. 题图 2.3 电路中 (V_T, R_T) 为:

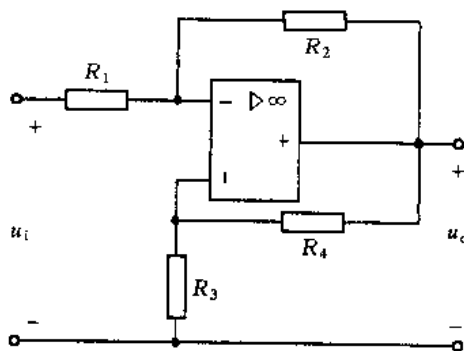
- (a) (1 V, -1 Ω); (b) (-2 V, -2 Ω); (c) (2 V, 1 Ω);
 (d) (1 V, 4 Ω); (e) 以上皆非。



题图 2.3

4. 题图 2.4 所示电路中, u_o/u_i 为:

- (a) $-\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_1R_4-R_2R_3}$;
 (b) $\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_4R_3-R_1R_2}$;
 (c) $\frac{R_3(R_4+R_1)}{R_2R_1-R_3R_4}$;
 (d) $-\frac{R_4(R_1+R_3)}{R_3R_2-R_4R_1}$;
 (e) 以上皆非。



题图 2.4

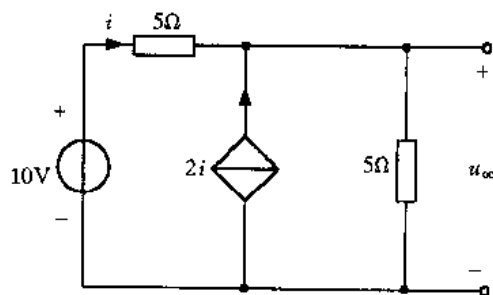
5. 电路如题图 2.5 所示, 其开路电压 u_{oc} 为:

- (a) 10 V; (b) 7.5 V;
 (c) 15 V; (d) 20 V;
 (e) 以上皆非。

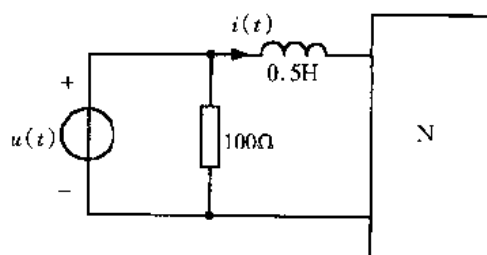
6. 电路如题图 2.6, N 为线性无源网络。已知:

$u(t) = 20 + 100\sqrt{2}\cos 100t + 60\sqrt{2}\cos(300t + 60^\circ)$ V; $i(t) = 1 - 2\sqrt{2}\cos(100t - 60^\circ)$ A,
 电源发出的有功功率 P 为:

- (a) 260 W; (b) 300 W; (c) 406 W;
(d) 102 W; (e) 以上皆非。

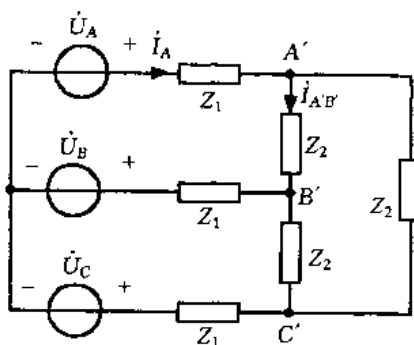


题图 2.5

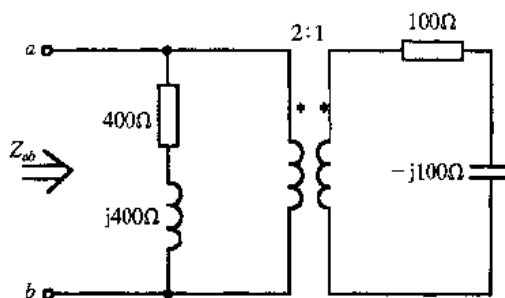


题图 2.6

7. 对称三相电路如题图 2.7 所示, 已知 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_A = 1.732 \angle -30^\circ \text{ A}$, 则 $\dot{I}_{A'B'}$ 为:
(a) $0.8 \angle -60^\circ \text{ A}$; (b) $1 \angle 0^\circ \text{ A}$; (c) $0.6 \angle 30^\circ \text{ A}$;
(d) $1 \angle -60^\circ \text{ A}$; (e) 以上皆非。
8. 含理想变压器的电路如题图 2.8 所示, 其输入阻抗 Z_{ab} 为:
(a) 1000Ω ; (b) $400 + j400 \Omega$; (c) 400Ω ;
(d) $800 + j800 \Omega$; (e) 以上皆非。



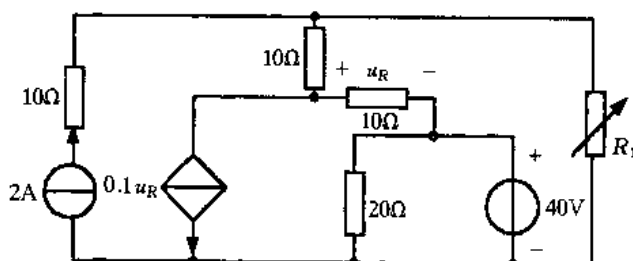
题图 2.7



题图 2.8

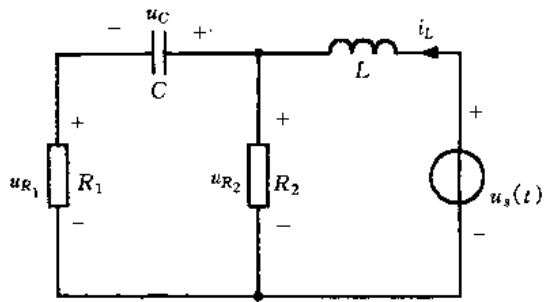
三、计算题(每题 11 分, 共 5 小题):

1. 电路如题图 3.1 所示, 问负载电阻 R_L 等于多大时, 其上获得最大功率? 并求出该最大功率。

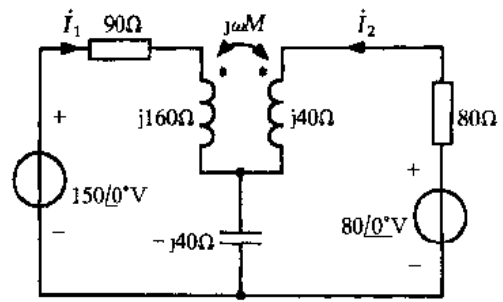


题图 3.1

2. 电路如题图 3.2 所示, 写出其状态方程。



题图 3.2

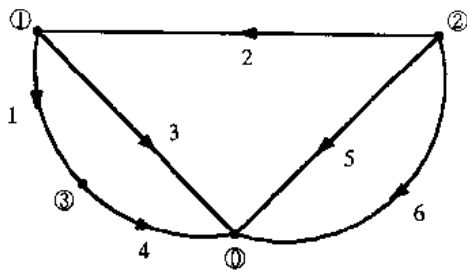


题图 3.3

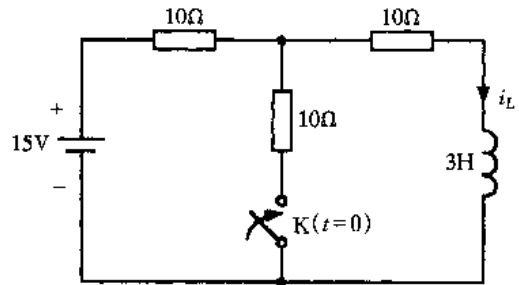
3. 电路如题图 3.3 所示, 两线圈间的耦合系数 $k=0.5$, 求 I_1 和 I_2 。

4. 已知电网络的拓扑图如题图 3.4 所示, 选 1, 2, 3 支路为树支, 写出 B_f 和 Q_{f0} 。

5. 电路如题图 3.5 所示, 电路原来处于稳定状态, $t=0$ 时, 开关 K 闭合, 求 $t \geq 0_+$ 的响应 $i_L(t)$ 。



题图 3.4

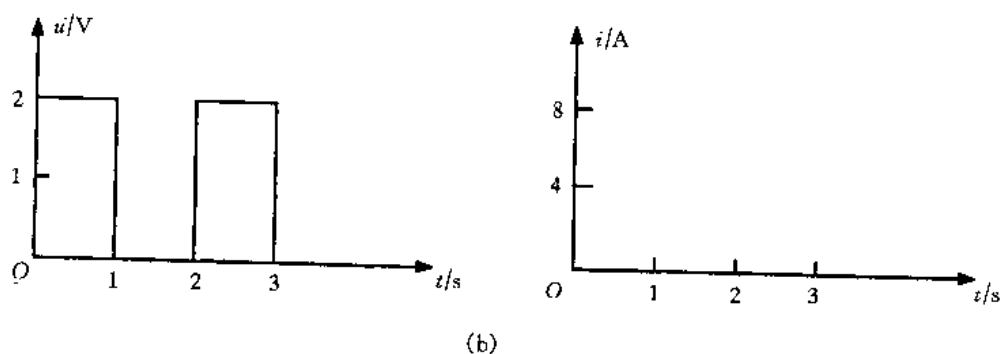
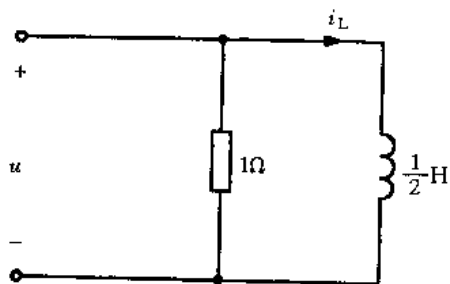


题图 3.5

研究生入学考试模拟试题(三)

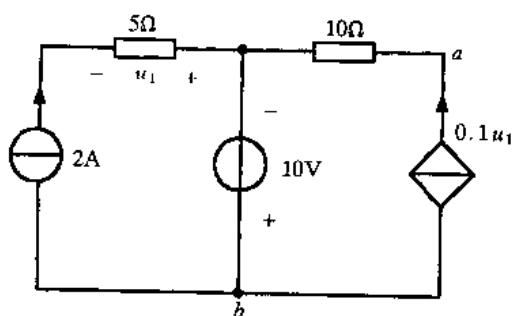
一、填空题(每空 3 分,共 20 个空):

1. 题图 1.1(a)所示电路中,电压 u 的波形如图(b)所示,画出电流 i_L 的波形。



题图 1.1

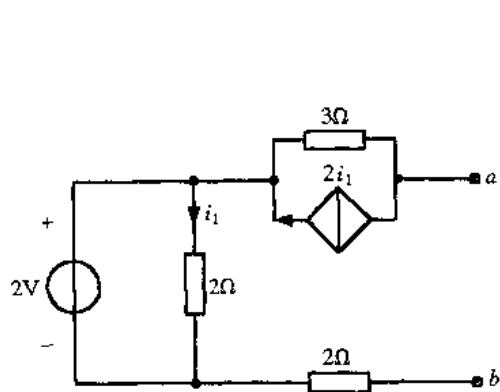
2. 题图 1.2 所示电路中,电压 u_{ab} 为_____ V。



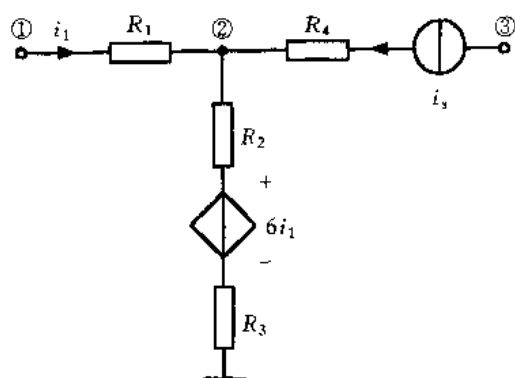
3. 题图 1.3 所示电路的戴维宁等效电路参数 u_{oc} = _____ V, R_{eq} = _____ Ω 。

4. 题图 1.4 为闭合电路中的一部分,结点②的电压方程为:_____。

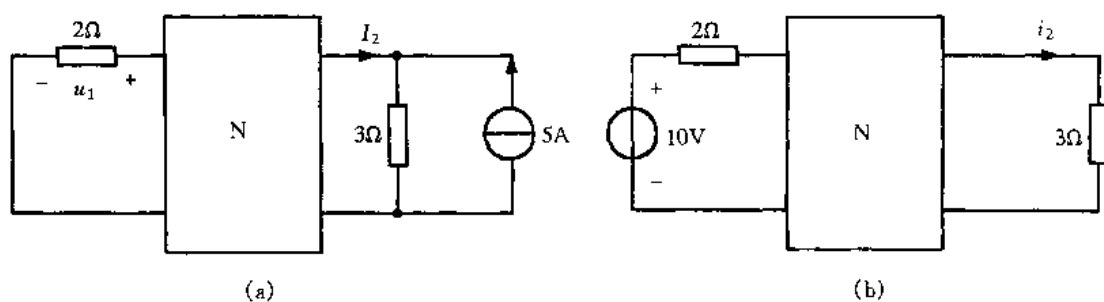
5. 题图 1.5 所示电路 N 仅由电阻组成,对图(a)有 $u_1 = 3$ V,图(b)中电流 i_2 = _____ A。



题图 1.3

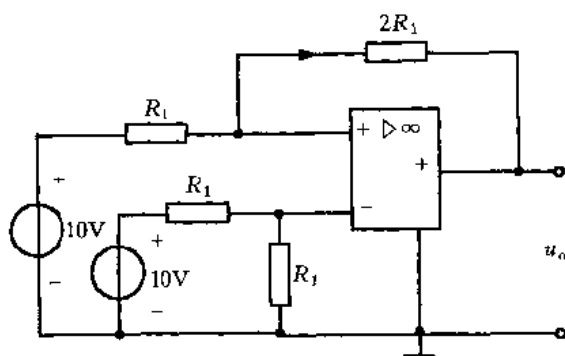


题图 1.4



题图 1.5

6. 含理想运算放大器的电路如题图 1.6 所示, $u_o = \underline{\hspace{2cm}}$ V。



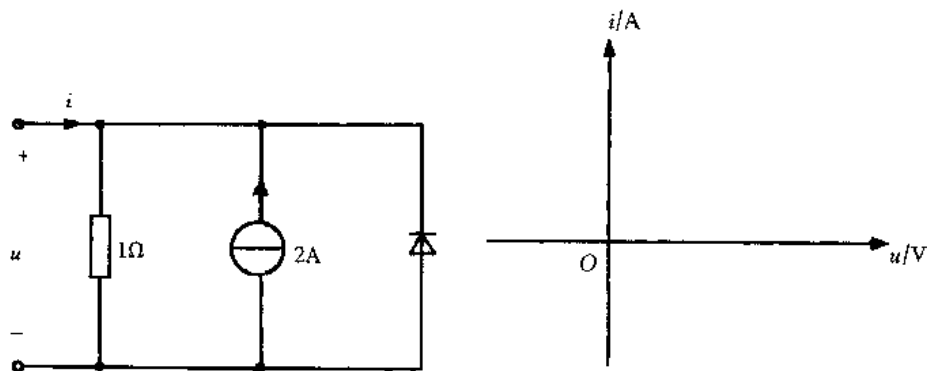
题图 1.6

7. 题图 1.7 所示一端口电路由一个线性电阻 R 、一个理想二极管和一个直流电流源并联而成, 在 $u-i$ 平面上画出该一端口的伏安特性。

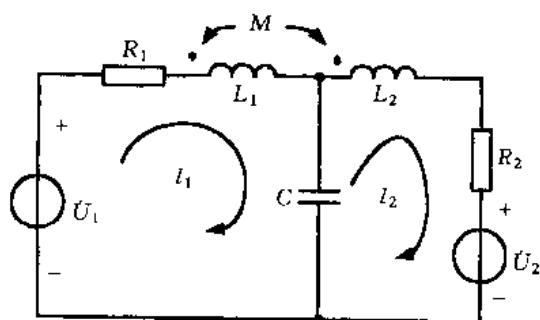
8. 列出图示电路的回路电流方程(角频率 ω):

I_1 : _____

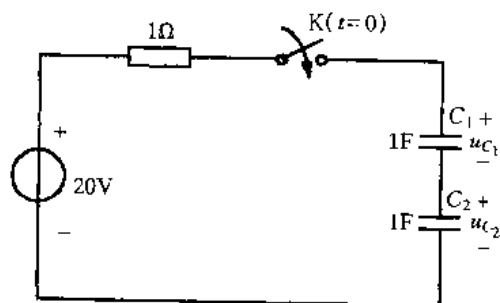
I_2 : _____



题图 1.7

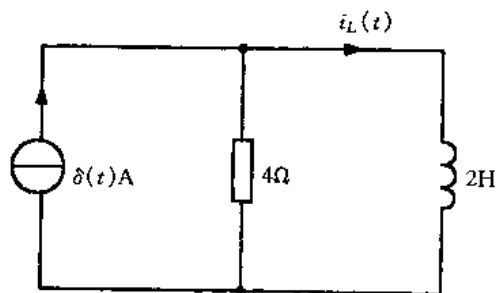


题图 1.8

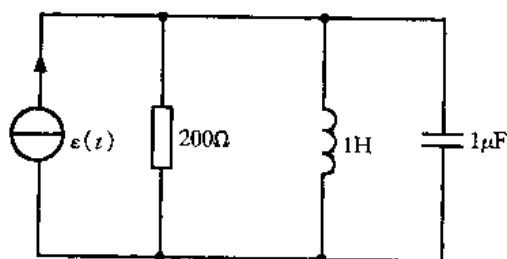


题图 1.9

9. 题图 1.9 所示电路中 $u_{C1}(0_-) = -10\text{ V}$, $u_{C2}(0_-) = 0\text{ V}$, $t = 0$ 时开关 K 闭合, 则 u_{C1} 的全响应为 $u_{C1}(t) = \underline{\hspace{2cm}}\text{ V}$ 。
10. 题图 1.10 所示电路的冲激响应 $i_L(t) = \underline{\hspace{2cm}}\text{ A}$ 。

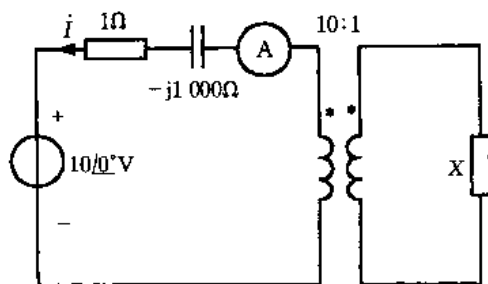


题图 1.10

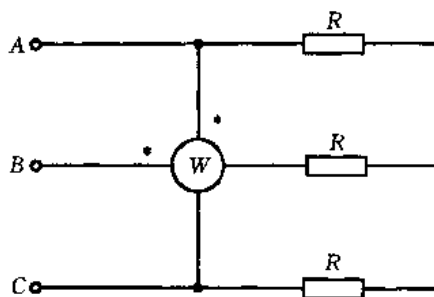


题图 1.11

11. 题图 1.11 所示二阶电路的临界电阻为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{ }\Omega$, 电路的过渡过程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 衰减过程。
12. 题图 1.12 所示电路中, 安培表读数为 10 A, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}\text{ }\Omega$ 。
13. 对称三相电路中线电压为 380 V, 功率表接线如题图 1.13 所示, 各相的负载 $R = 22\text{ }\Omega$, 则图中功率表读数为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{ W}$ 。

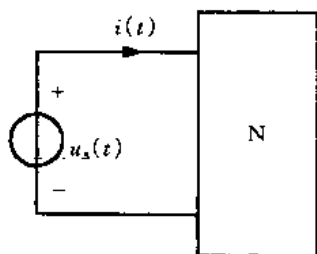


题图 1.12

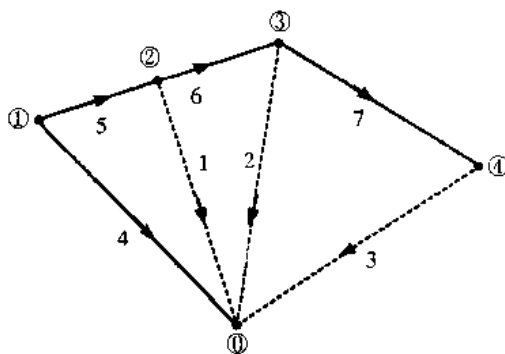


题图 1.13

14. 线性电路 N 如题图 1.14 所示, 已知 $u_s(t) = 10 + \sqrt{2} \times 50 \sin(\omega t) + \sqrt{2} \times 10 \sin(3\omega t + 30^\circ)$ V, $i(t) = 1 + \sqrt{2} \times 2 \sin(\omega t - 60^\circ)$ A, 则电源发出的有功功率 $P =$ _____ W。



题图 1.14



题图 1.15

15. 题图 1.15 所示图为有向图, 实线为树支, 虚线为连支。按先连支后树支编号, 写出单连支回路矩阵 B_f :

$$B_f = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

按先树支后连支编号, 写出单树支割集矩阵 Q_f :

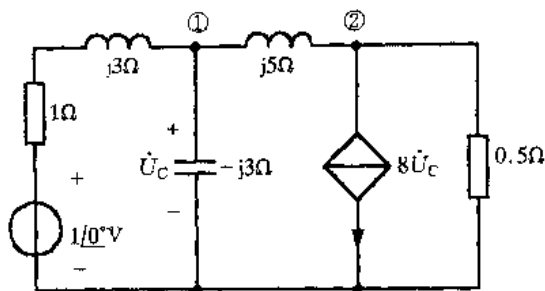
$$Q_f = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

16. 写出题图 1.16 所示电路的支路导纳矩阵:

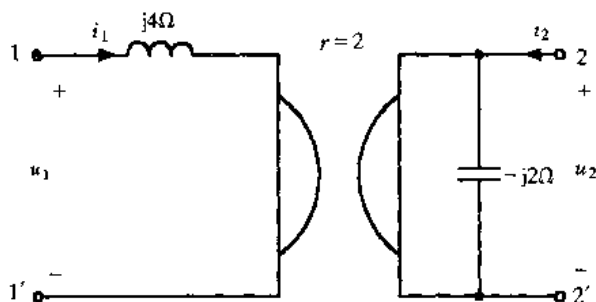
$$Y = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

17. 写出题图 1.17 所示二端口的 T 参数矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$



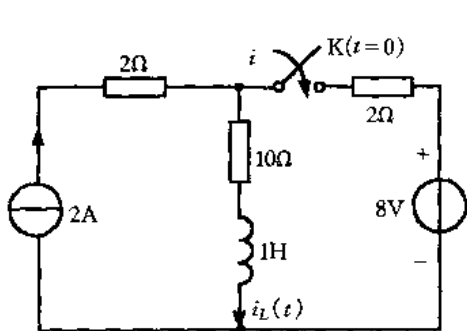
题图 1.16



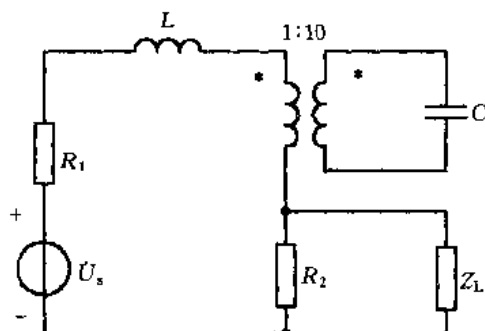
题图 1.17

二、计算题:

1. (10分) 题图 2.1 所示电路开关 K 闭合前电路已达稳态, $t=0$ 时 K 闭合, 求 K 闭合后电流 $i_L(t)$ 。

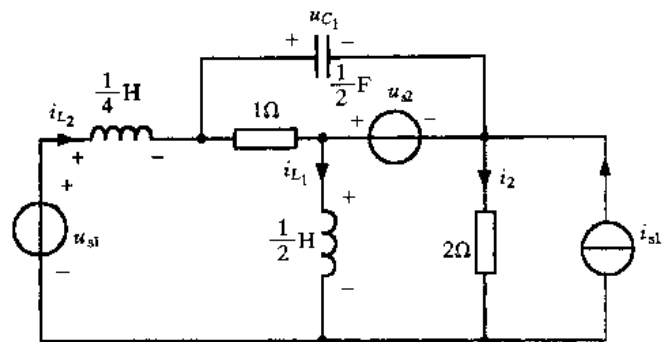


题图 2.1

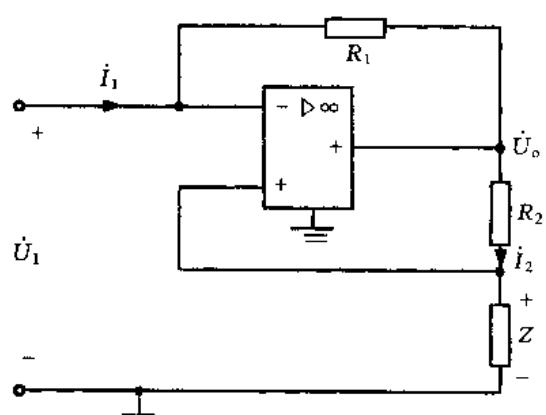


题图 2.2

2. (12分) 题图 2.2 所示电路中 $R_1=1\Omega$, $R_2=1\Omega$, $C=50\mu\text{F}$, $L=40\text{mH}$, $\dot{U}_s=2\angle 45^\circ\text{V}$, 电源角频率 $\omega=100\text{rad/s}$, 问 X_L 为何值时获得最大功率, $P_{\max}=\underline{\hspace{2cm}}?$
3. (12分) 写出题图 2.3 所示电路的状态方程(状态变量为 u_{C_1} , i_{L_1} , i_{L_2})
4. (6分) 试证明题图 2.4 所示电路对阻抗 Z 可实现负阻抗变换。



题图 2.3

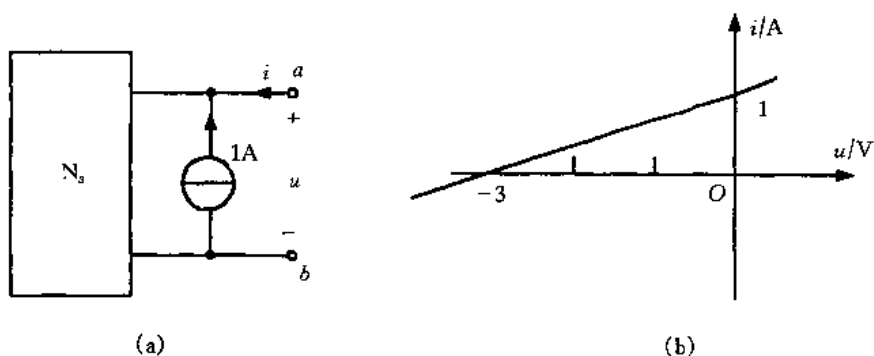


题图 2.4

研究生入学考试模拟试题(四)

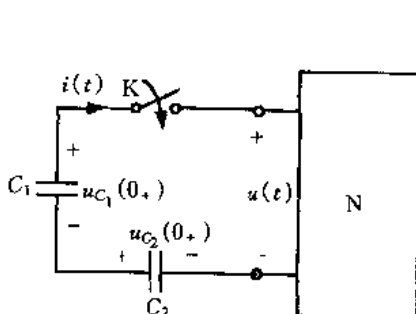
一、填空题(共 60 分,每小题 4 分):

1. 题图 1.1(a)电路端口 a, b 的伏安特性曲线如题图 1.1(b)所示,网络 N_s 为有源网络, N_s 的诺顿等效电路的电流源 $i_s =$ _____ A; 它的诺顿等效电导 $G_{eq} =$ _____ S; 诺顿等效电路图: _____。

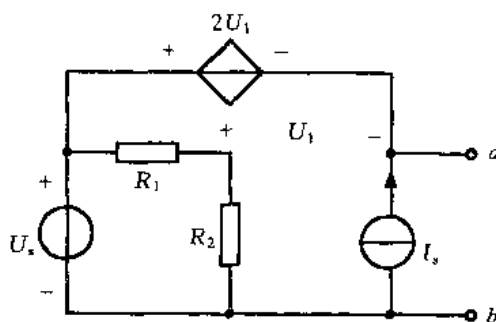


题图 1.1

2. 题图 1.2 所示电路,网络 N 情况不详,开关 K 原打开已达到稳定状态, $t=0$ 时,开关 K 闭合,已知电容 $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $u_{C_1}(0_+) = 6 \text{ V}$, $u_{C_2}(0_+) = 4 \text{ V}$, 且 $t > 0$ 时, $i(t) = 12e^{-t} \mu\text{A}$, 则 $t \geq 0$ 时, $u(t) =$ _____ V。

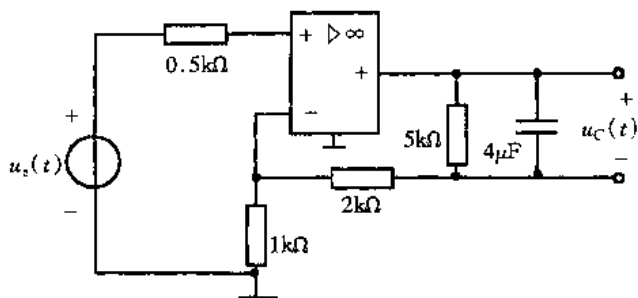


题图 1.2

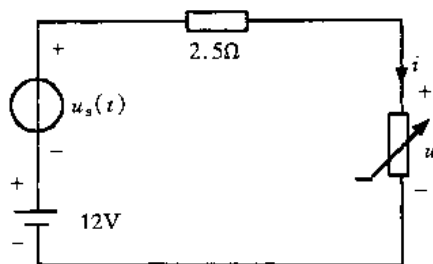


题图 1.3

3. 题图 1.3 所示电路中, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $U_s = 3 \text{ V}$, $I_s = 4 \text{ A}$, 则关于 a, b 端的戴维宁等效电路中 $U_{oc} =$ _____ V, $R_{eq} =$ _____ Ω 。
4. 题图 1.4 所示含理想运算放大器的电路中,激励为单位阶跃函数,即 $u_s(t) = \varepsilon(t)$, 则 $u_C(t) =$ _____ V。
5. 题图 1.5 所示电路中,非线性电阻的伏安特性为 $i = u^2$, ($u > 0$), 则此电路的静态工作点 $U_Q =$ _____ V, $I_Q =$ _____ A, 工作点处的动态电阻 $R_d =$ _____ Ω 。

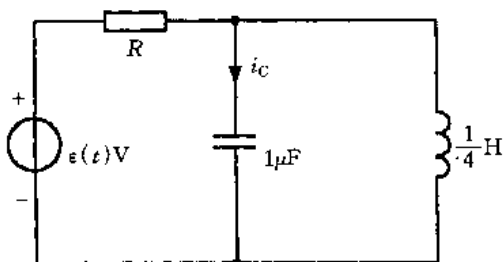


题图 1.4

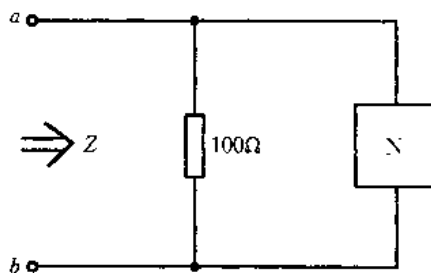


题图 1.5

6. 题图 1.6 所示电路的临界电阻 $R_0 =$ _____ Ω , 若 $R = 2\text{ k}\Omega$, 过渡过程的性质为 _____。

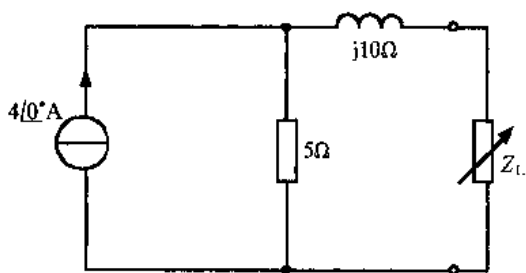


题图 1.6

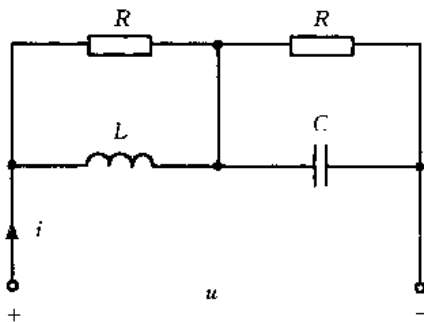


题图 1.7

7. 题图 1.7 所示正弦电路, 端口 a, b 的复阻抗 $Z = \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \Omega$, $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, 则网络 N 的最简单的电路模型为 _____, 其参数值为 _____。
8. 题图 1.8 所示正弦电路, 负载 Z_L 可调, 则负载 $Z_L =$ _____ Ω , 获得最大功率, 最大功率 $P_{\max} =$ _____。

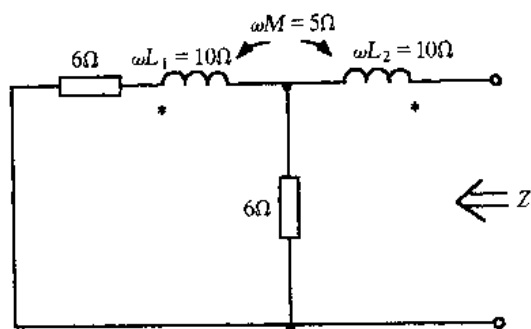


题图 1.8



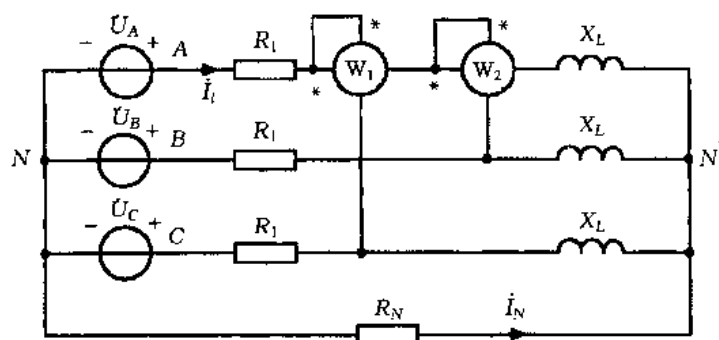
题图 1.9

9. 若使题图 1.9 所示电路在任何频率下都处于谐振状态, 参数间应满足的关系是 _____。
10. 题图 1.10 所示具有耦合电感的一端口的输入阻抗 $Z =$ _____ Ω 。(设电路角频率为 ω)。
11. 题图 1.11 所示对称三相电路中, 电源端相电压为 220 V, 线路电阻 $R_1 = 4 \Omega$, 中线电阻 $R_N = 8 \Omega$, 负载感抗 $X_L = 3 \Omega$, 则 $I_l =$ _____ A, $I_n =$ _____ A, $W_l =$ _____ W,



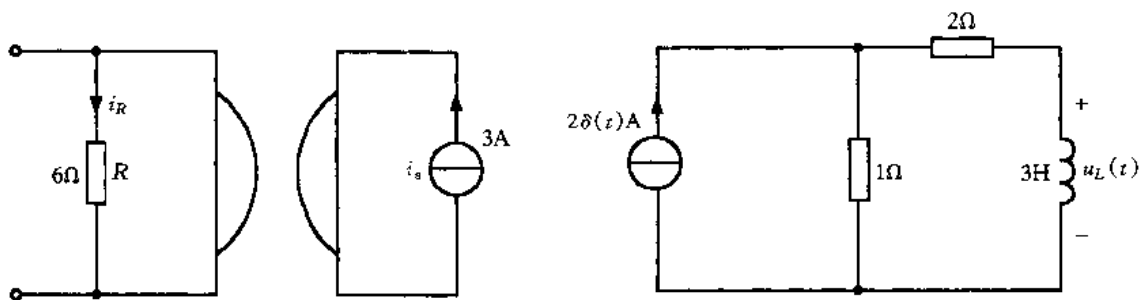
题图 1.10

$W_1 + W_2 = \underline{\hspace{2cm}} W_0$



题图 1.11

12. 题图 1.12 所示电路, 回转器的回转电阻 $r = 20 \Omega$, $i_s = 3 \text{ A}$, 则电阻 R 的功率 $P = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$ 。

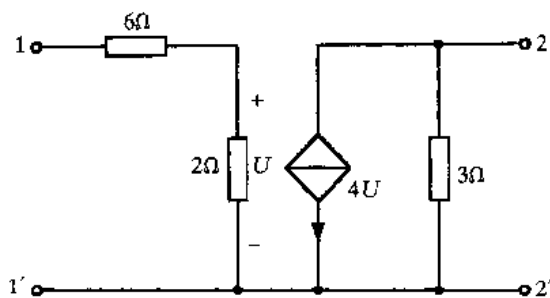


题图 1.12

题图 1.13

13. 题图 1.13 所示电路 $i_L(0_-) = 0$, 则冲激响应 $u_L(t) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$ 。

14. 题图 1.14 所示二端口网络的 Y 参数 $Y = \begin{bmatrix} \hspace{2cm} \\ \hspace{2cm} \end{bmatrix}$

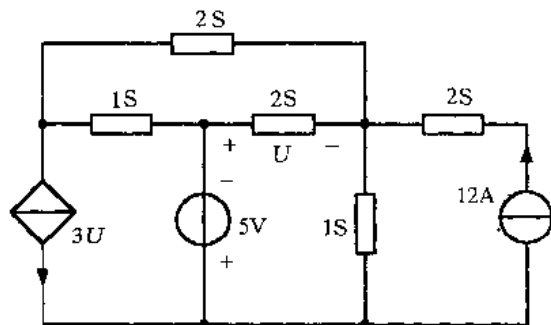


题图 1.14

15. 已知 $i_1 = 10 \text{ A}$, $i_2 = 8\sqrt{2}\cos(t - 10^\circ) \text{ A}$, $i_3 = 6\sqrt{2}\cos(2t + 20^\circ) \text{ A}$, $i_4 = 4\sqrt{2}\cos(3t + 60^\circ) \text{ A}$, $i_5 = 4\sqrt{2}\cos(3t) \text{ A}$; 且 $i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5$, 则 i 的有效值 $I = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$ 。

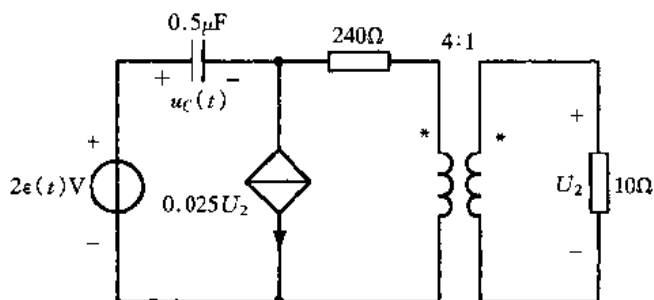
二、做答題(共 40 分):

1. (8 分) 直流电路如题图 2.1 所示, 试求受控源的功率, 并说明是吸收功率还是发出功率。



题图 2.1

2. (8 分) 题图 2.2 所示电路中含理想变压器, 变比为 4:1, 电容 C 有初始电压 $u_C(0_+) = 4 \text{ V}$, 极性如图所示, 激励为阶跃电压源, 试求响应 $u_C(t)$ 。



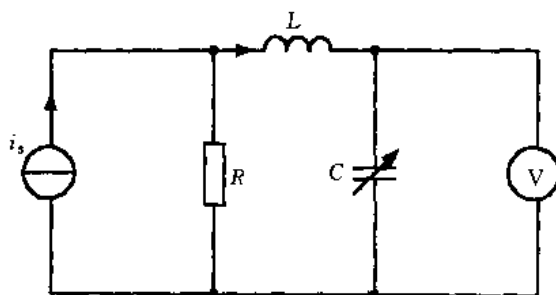
题图 2.2

3. (8 分) 题图 2.3 所示正弦电路中 $i_s = \sqrt{2}\cos(10^3t - 30^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ H}$, 电容 C 可调变,

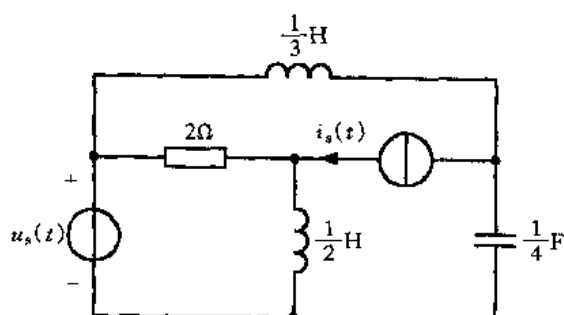
试问 C 为何值时电压表读数最大, 且最大值为多少(电压表为电磁系电压表, 且当作理想电表)?

4. (10 分) 电路模型图如题图 2.4(a) 所示, 题图 2.4(b) 是它的有向图。

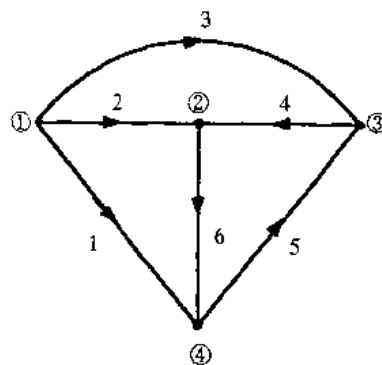
- (1) 以结点 4 为参考结点, 写出电路的降阶关联矩阵 A ;
- (2) 以支路 1, 2, 5 为树, 写出基本回路矩阵 B_f 、基本割集矩阵 Q_f ;
- (3) 写出状态方程的矩阵形式。



题图 2.3



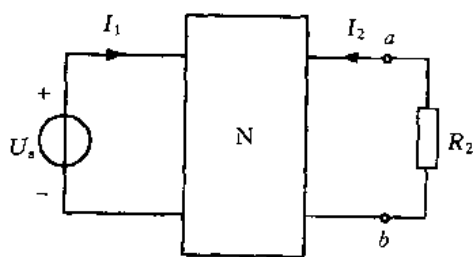
(a)



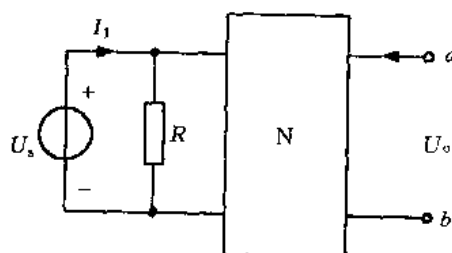
(b)

题图 2.4

5. 题图 2.5 所示电路中, 网络 N 为无源电阻网络, U_s, R_2 为已知, 电路中 a, b 左方的戴维宁等效电路中 $U_{oc} = U_o, R_{eq} = R_o$, 若将 a, b 端开路, 如题图 2.5(b) 所示, 则为了使 U_s 支路中电流不变, 在 U_s 处并联一电阻 R , 求该并联电阻 R 的阻值。(6 分)



(a)



(b)

题图 2.5

附录 2

研究生入学考试模拟试题答案

模拟试题答案(一)

一、选择题:

1. (b); 2. (a); 3. (d); 4. (b); 5. (e).

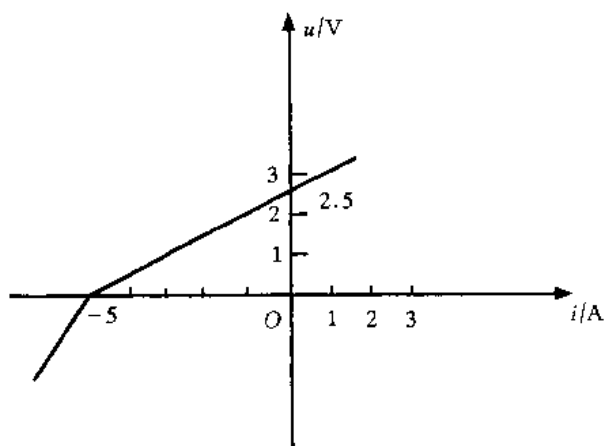
二、填空题:

$$1. \begin{cases} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3})u_{n1} - \frac{1}{R_2 + R_3}u_{n2} = i_{s5} - i_{s6} \\ (\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{gR_2}{R_2 + R_3})u_{n1} + (\frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{gR_2}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4})u_{n2} = 0 \end{cases}$$

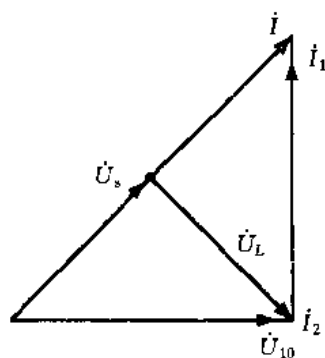
2. 函数关系

$$\begin{cases} u = i + 5 & (u < 0) \\ u = i + 5/2 & (u > 0) \end{cases}$$

波形:



3.



$$4. \mathbf{Q}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$5. \textcircled{A} = 5\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ A} \quad \textcircled{V} = \frac{25\sqrt{13}}{2} \text{ V}$$

三、做答题:

1. 零状态响应 $u_C(t) = -5(1 - e^{-4(t-5)}) \text{ V}$

零输入响应 $u_C(t) = 5e^{-4(t-5)} \text{ V}$

全响应 $u_C(t) = -5 + 10e^{-4(t-5)} \text{ V}$

波形略

$$2. \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{s1} + i_{s2} \\ -2i_{s2} \end{bmatrix}$$

3. $\textcircled{V} = 20\sqrt{5} \text{ V}$

$$4. \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \\ g & \frac{1}{gZ} \end{bmatrix}$$

模拟试题答案(二)

一、填空题

1. -20Ω

2. $232.8 + j200\sqrt{2} = 366 \angle 50.5^\circ \text{ V} \cdot \text{A}$

$$3. \begin{cases} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})u_{n1} - \frac{1}{R_2}u_{n2} = \frac{U_{s1}}{R_1} + gu_2 \\ u_2 = u_{n2} \end{cases}$$

4. $C = 10^{-4} \text{ F}$

5. $u_C(0_+) = 6 \text{ V}$

6. $i_L(0_+) = 0.2 \text{ A}$

7. $L_{ab} = 6.5 \text{ H}$

8. $Q = 20$

$$9. \begin{cases} -R_4 i_{11} + (R_4 + R_5) i_{12} + r i_2 = u_{s2} \\ i_2 = i_{12} - i_{11} \end{cases}$$

$$10. \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 15 & -9.5 \\ -10 & 18 \end{bmatrix}$$

二、选择题:

1. (c) 2. (c) 3. (b) 4. (a) 5. (b) 6. (a) 7. (b) 8. (c)

三、计算题:

1. $R_L = 15 \Omega$ $P_{\max} \approx 81.67 \text{ W}$

2.
$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1+R_2)C} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ -\frac{R_2}{(R_1+R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_s$$

3. $I_1 = 1 \angle -53.1^\circ \text{ A}$ $I_2 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$

4. $B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. $i_L(t) = 0.5 + 0.25e^{-5t}$

模拟试题答案(三)

一、填空题:

1.
$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 1_- \\ 2 & 1 \leq t \leq 2 \\ 2t-2 & 2_- \leq t \leq 3_- \\ 4 & t \geq 3_+ \end{cases}$$

电流 $i_L(t)$ 的波形如题解图 1.1 所示。

2. $u_{ab} = -20 \text{ V}$

3. $u_{\alpha} = -4 \text{ V}$ $R_{eq} = 5 \Omega$

4.
$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 R_3}) u_{n2} - \frac{1}{R_1} u_{n1} = i_s + \frac{6i_1}{R_2 + R_3} \\ i_1 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_1} \end{cases}$$

5. $i_2 = 1 \text{ A}$

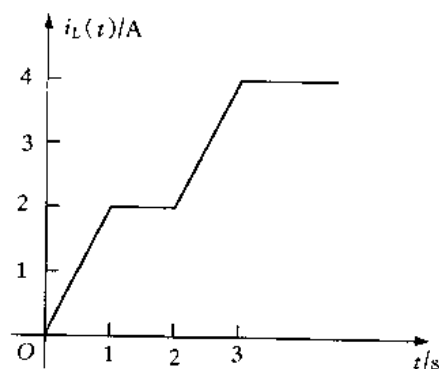
6. $u_o = -5 \text{ V}$

7. 伏安特性如题解图 1.7 所示。

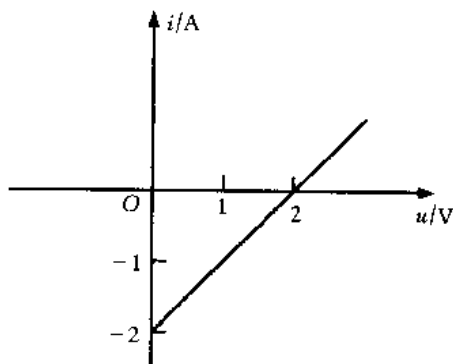
8.
$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C}) I_{11} + j(\omega M + \frac{1}{\omega C}) I_{12} = \dot{U}_1 \\ j(\omega M + \frac{1}{\omega C}) I_{11} + (R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C}) I_{12} = -\dot{U}_2 \end{cases}$$

9. $u_{C_1}(t) = 10 - 20e^{-2t}$

10. $i_L(t) = 2e^{-2t}\epsilon(t) \text{ A}$



题解图 1.1



题解图 1.7

11. 临界电阻为 $500\ \Omega$, 欠阻尼衰减振荡过程。

12. $Z = j10\ \Omega$

13. 0

14. 60 W

$$15. \mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$16. \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+j2} + \frac{1}{5j} - \frac{1}{3j} & -\frac{1}{5j} \\ 8 - \frac{1}{5j} & \frac{1}{j5} + 2 \end{bmatrix}$$

$$17. \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3j & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

二、计算题:

1. $i_L(t) = 1 + e^{-12t}\ \text{A}$

2. $Z = 0.75 - j0.5\ \Omega \quad P_{\max} = \frac{1}{6}\ \text{W}$

$$3. \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \\ i_{s1} \end{bmatrix}$$

4. 证明 略

模拟试题答案(四)

一、填空题:

1. $i_{sc} = -2\ \text{A} \quad G_{eq} = \frac{1}{3}\ \text{S}$

2. $u(t) = 5(e^{-t} + 1)\ \text{V}$

3. $U_{oc} = 1\ \text{V} \quad R_{eq} = 0$

4. $u_C(t) = 5(1 - e^{-50t})\varepsilon(t)\ \text{V}$

5. $U_Q = 2\ \text{V} \quad I_Q = 4\ \text{A} \quad R_d = 0.25\ \Omega$

6. $R_o = 250 \Omega$, 欠阻尼衰减振荡。
7. 电感 0.1 H
8. $Z_L = 5 - j10 \Omega$ $P_{\max} = 20 \text{ W}$
9. $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$
10. $Z = 3 + j7.5 \Omega$
11. $I_L = 44 \text{ A}$ $I_N = 0$ $W_1 = 5\,029.87 \text{ W}$ $W_1 + W_2 = 0$
12. $P = 600 \text{ W}$
13. $u_L(t) = 20\delta(t) - 2e^{-t} \text{ V}$
14. $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
15. $2\sqrt{62} = 15.75 \text{ A}$

二、做答题：

1. $U_{n1} = 12 \text{ V}$ $U_{n2} = -5 \text{ V}$ $U_{n3} = 5.2 \text{ V}$
 $P = 367.2 \text{ W}$ (发出)

2. $u_C(t) = 2(1 + e^{-10^4 t})\varepsilon(t) \text{ V}$

3. $C = 0.5 \mu\text{F}$ $V_{\max} = \sqrt{2} \text{ kV}$

4. $\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$ $\mathbf{B}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ i_3 \\ i_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

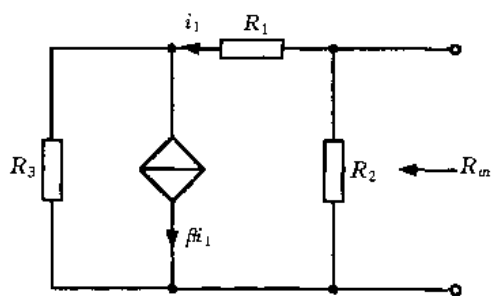
5. $R = \frac{U_s^2(R_o + R_2)}{U_o^2}$

附录3 西安交通大学近年研究生入学考试试题

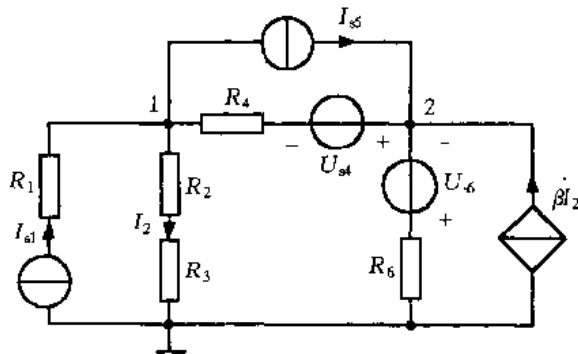
1998 年西安交通大学研究生入学考试试题

一、(每题 5 分)基本概念题

1. 计算题图 1.1 所示电路中的输入电阻 R_{in} 。



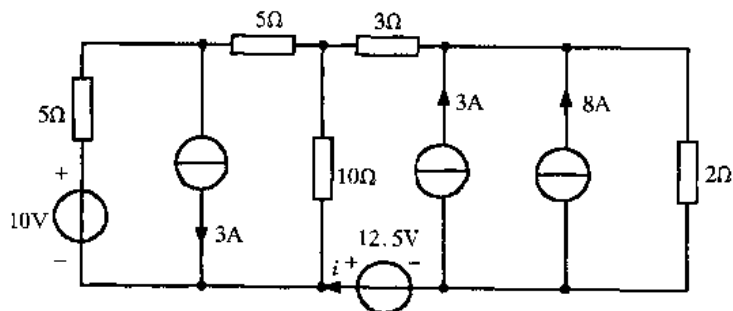
题图 1.1



题图 1.2

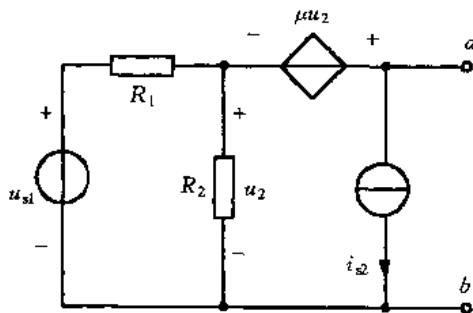
2. 电路如题图 1.2 所示,按图中标结点编号,列写结点电压方程。

3. 计算题图 1.3 所示电路中的电流 i 。



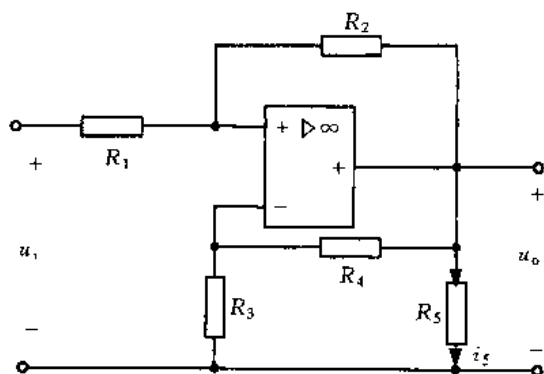
题图 1.3

4. 电路如题图 1.4 所示,求从 a, b 端看进去的戴维宁等效电路。已知 $u_{s1} = 10\text{ V}$, $i_{s2} = 2\text{ A}$, $R_1 = R_2 = 4\text{ }\Omega$, $\mu = 1$ 。



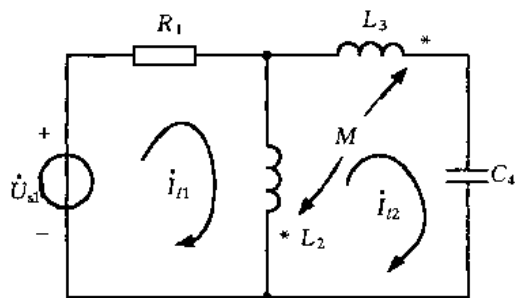
题图 1.4

5. 题图 1.5 所示电路,求电阻 R_5 中的电流 i_5 。已知 $R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$, $u_i = 1 \text{ V}$ 。

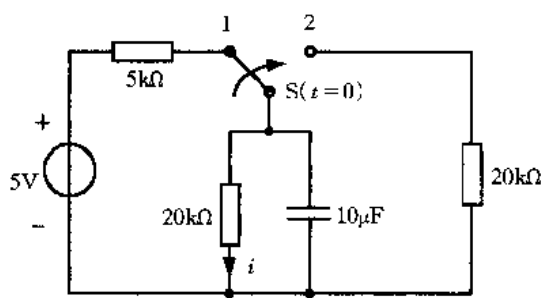


题图 1.5

6. 按题图 1.6 所示电路给出的回路,列出回路电流方程。

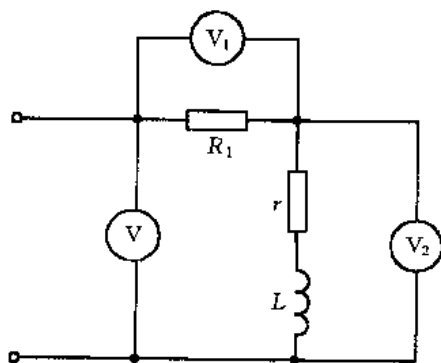


题图 1.6



题图 1.7

7. 电路如题图 1.7 所示,开关 S 原在位置 1 已久。当 $t=0$ 时,开关 S 合向位置 2。求电流 i 。
8. 一线圈与电阻 R_1 串联,电路如题图 1.8 所示。 $R_1 = 32 \Omega$ 。在频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 的正弦电压源激励下,当电路达稳态时,图中电压表 V 的读数为 115 V ,电压表 V_1 的读数为 55.4 V ,电压表 V_2 的读数为 80 V 。试求线圈的电阻 r 和电感 L 。



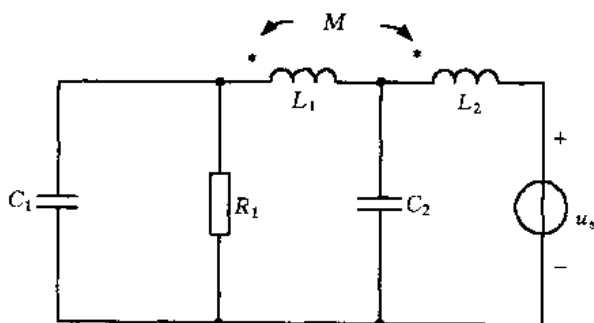
题图 1.8

9. 已知某电路的图的关联矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

若选支路(1,4,5)为树支,试写出基本回路矩阵和基本割集矩阵。

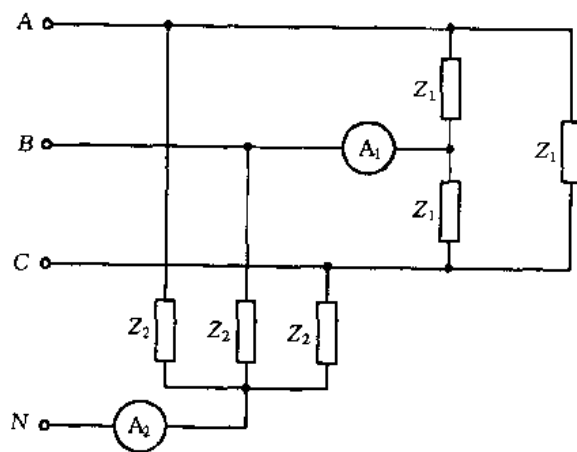
10. 列出题图 1.9 所示电路的状态方程。



题图 1.9

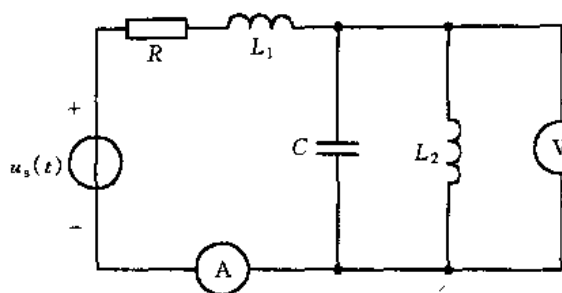
二、(每题 10 分)综合计算题

1. 在题图 2.1 所示电路中,对称三相电源的线电压 $U_1 = 380 \text{ V}$,负载 $Z_1 = -j12 \Omega$, $Z_2 = 3 + j4 \Omega$ 。求三相负载吸收的总功率及电流表 A_1 和 A_2 的读数。

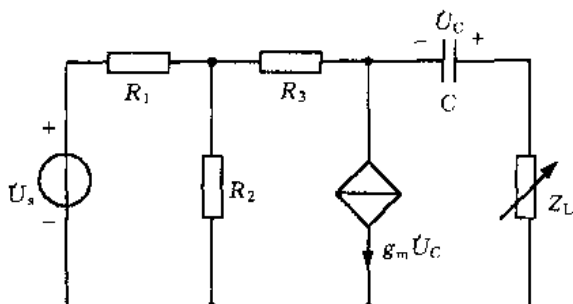


题图 2.1

2. 电路如题图 2.2 所示,已知 $R = 20 \Omega$, $\omega L_1 = 0.625 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 45 \Omega$, $\omega L_2 = 5 \Omega$, $u_s(t) = [100 + 276\cos\omega t + 100\cos(3\omega t + 40^\circ) + 50\cos(9\omega t - 30^\circ)] \text{ V}$ 。求电流表 A 、电压表 V 的读数,并求电阻 R 所消耗的功率。

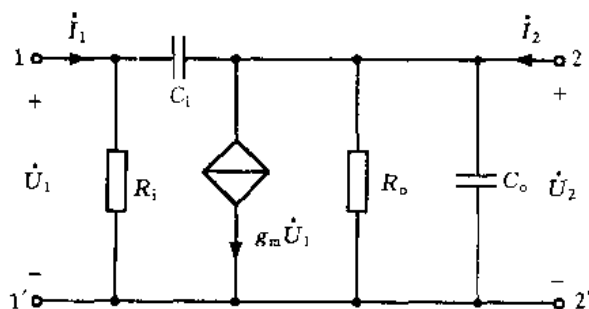


题图 2.2



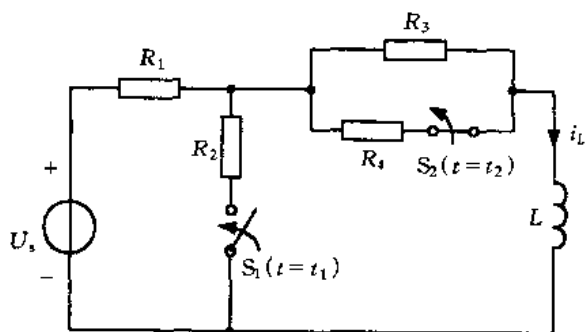
题图 2.3

3. 已知在题图 2.3 所示电路中, $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $C = 250 \mu\text{F}$, $g_m = 0.025 \text{ S}$, $U_s = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$, 电压源角频率 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 。试问 Z_L 为何值时, 可获得最大功率 P_{\max} ? 求出 P_{\max} 。
4. 试写出题图 2.4 所示二端口网络的 Y 参数矩阵。



题图 2.4

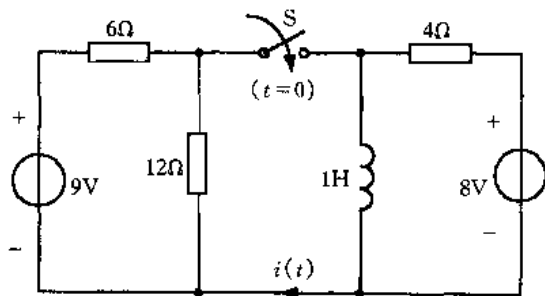
5. 电路如题图 2.5 所示, 已知当 $t < t_1$ 时电路已达稳态, 当 $t = t_1$ 时开关 S_1 闭合, 当 $t = t_2$ 时开关 S_2 打开, 求当 $t > 0$ 时电感电流 i_L 的表达式, 并画出 i_L 的波形图, 设 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $U_s = 30 \text{ V}$, $t_1 = 20 \text{ ms}$, $t_2 = 120 \text{ ms}$ 。



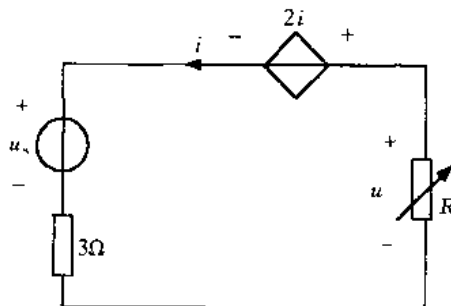
题图 2.5

1999 年西安交通大学研究生入学考试试题

一、(7分)题图 1 所示电路,开关 S 动作前电路已处于稳态。当 $t=0$ 时,开关 S 突然闭合。求当 $t \geq 0$ 时的电流 $i(t)$,并定性画出 $i(t)$ 的波形。



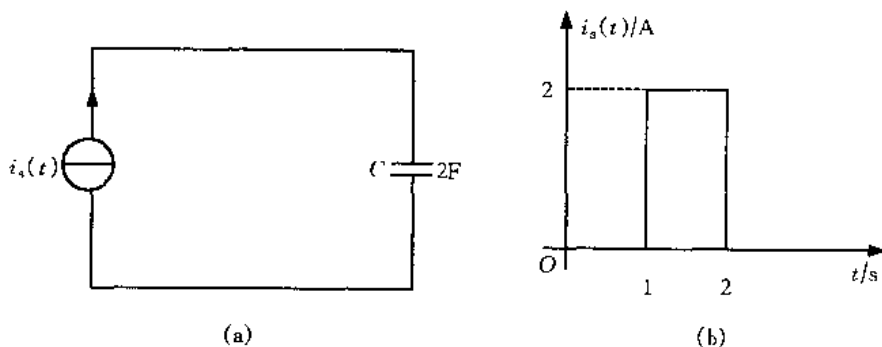
题图 1



题图 2

二、(6分)题图 2 所示电路,电阻 R 可调节。已知当 $R=4\Omega$ 时, $u=8\text{V}$ 。问 R 为何值时,它能获得最大功率 P_{\max} ? P_{\max} 为多少?

三、(6分)在题图 3(a)所示电路中,电流源的电流波形如题图 3(b)所示。试求当 $t=12\text{s}$ 时,电容 C 中的储能。



题图 3

四、(8分)题图 4 所示电路含有理想运算放大器。试求端口 1-1' 的输入阻抗 Z_{in} 。设电路中角频率 $\omega = 1000\text{ rad/s}$ 。

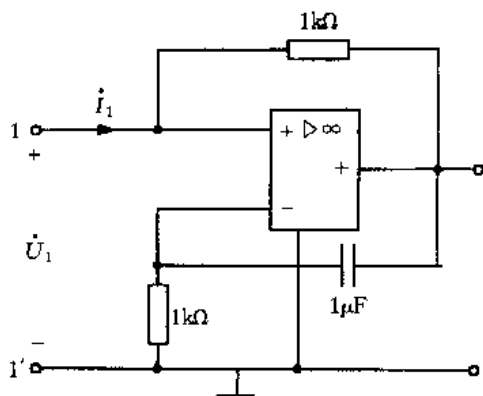
五、(7分)求题图 5 所示双口网络在复频域中的参数 $Z(s)$ 。

六、(7分)题图 6 所示电路,其使电路产生衰减振荡响应,试确定受控源的控制参数 α 的取值范围。

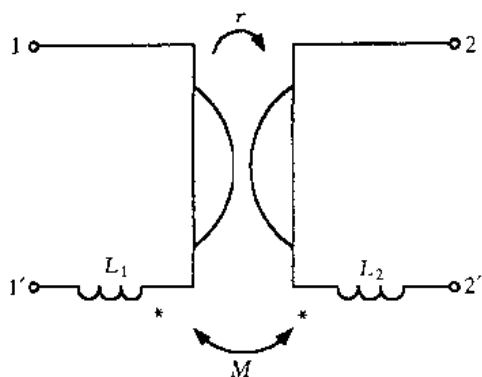
七、(7分)在题图 7 所示电路中,已知非线性电阻的伏安特性为

$$u = f(i) = \begin{cases} i^2 & i > 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

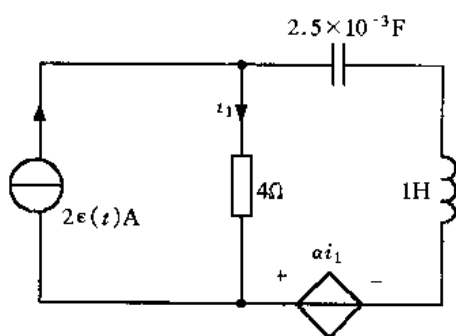
试用解析法求该电路的静态工作点,并求工作点处的动态电阻 R_d 。



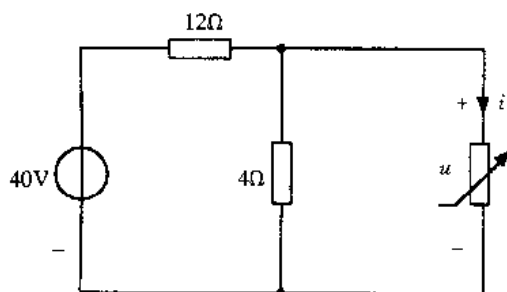
题图 4



题图 5

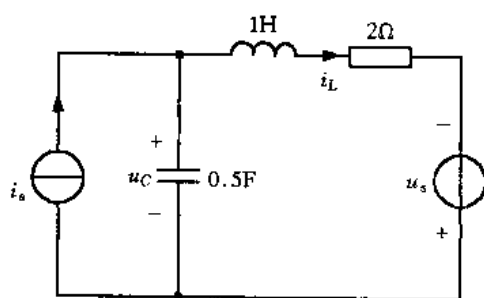


题图 6

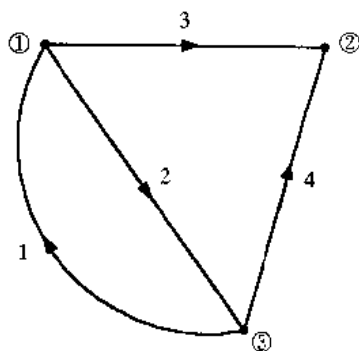


题图 7

八、(10分)题图 8(a)所示电路的网络图 G 如题图 8(b)所示。结点和各支路方向已指定，以结点③为电位参考点。



(a)



(b)

题图 8

(1) 试写出关联矩阵 A 。

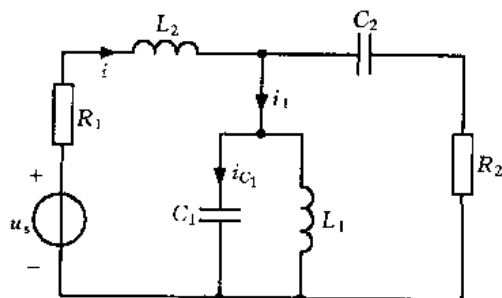
(2) 以支路 1 和支路 3 为树, 写出基本割集矩阵 Q_f 和基本回路矩阵 B_f 。

(3) 以 u_C 和 i_L 为状态变量, 写出电路的状态方程, 并整理为标准形式。

九、(8分) 在题图 9 所示正弦稳态电路中, 电源电压 $u_s = 8\sqrt{2}\cos\omega t$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L_1 = 1$ H, $C_1 = 1\ \mu\text{F}$, $C_2 = 250\ \mu\text{F}$, 且已知电流 i_1 为零, 电压 u_s 与电流 i 同相。试求:

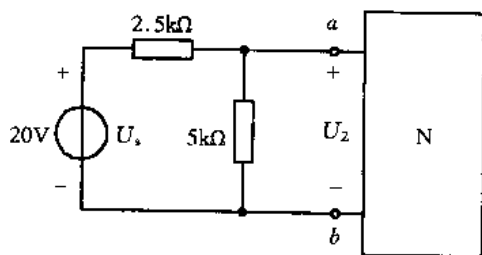
(1) 电路中的电感 L_2 的数值。

(2) 支路电流 i_{C_1} 。

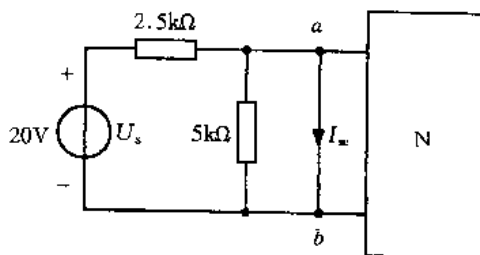


题图 9

十、(7分) 在题图 10(a) 所示直流电路中, 当 $U_s = 20$ V 时, $U_2 = 12.5$ V。若将网络 N 短路, 如题图 10(b) 所示, 其短路电流 I_{sc} 为 10 mA。试求网络 N 在 ab 端的戴维宁等效电路。



(a)



(b)

题图 10

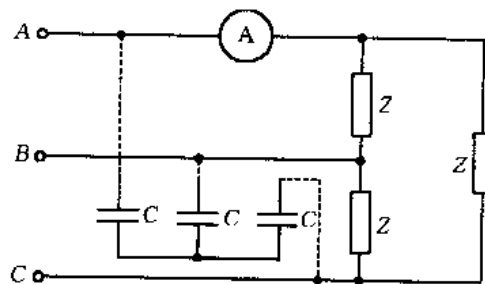
十一、(12分) 在题图 11 所示的对称三相电路中, 线电压有效值 $U_l = 380$ V, $f = 50$ Hz, 对称三角形负载 $Z = (16 + j12)\ \Omega$ 。试求:

(1) 电流表的读数;

(2) 三相负载吸收的总功率;

(3) 当接入一组 Y 形电容负载时, 使线路功率因数 $\lambda = 0.95$ 的 C 值;

(4) 若把(3)中求得的一组电容用 Δ 形方式连接, 则线路功率因数 λ 变为多少?

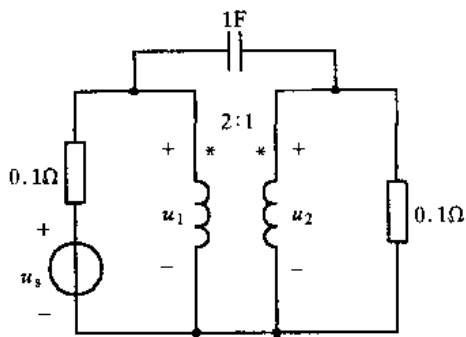


题图 11

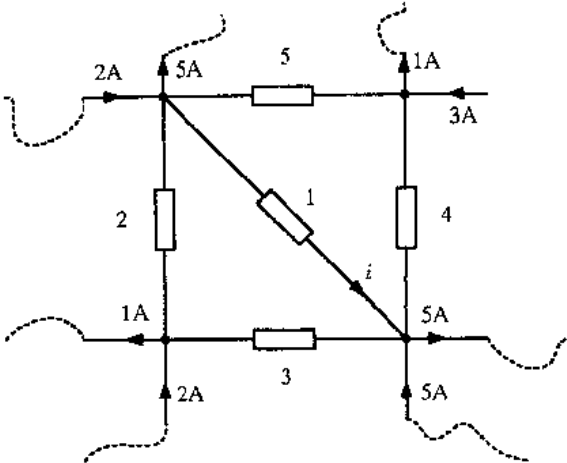
十二、(10分) 写出题图 12 所示电路的网络函数 $H(s) = U_2(s)/U_s(s)$ 的表达式, 并求相应的冲激响应。

十三、(5分) 题图 13 所示电路为某一电路的一部分(电阻单位为 Ω)。试求流经 $1\ \Omega$ 电阻

中的电流 i 。



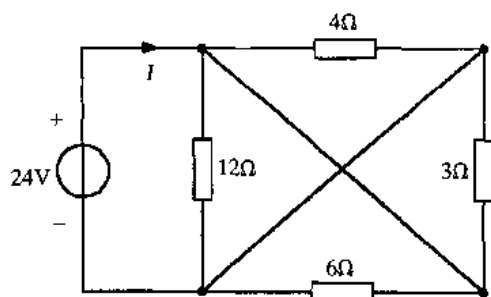
题图 12



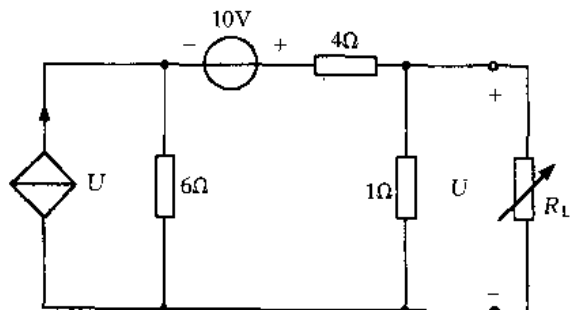
题图 13

2000 年西安交通大学研究生入学考试试题

一、(8 分)试求题图 1.1 所示电路中电压源的电流 I 的值。



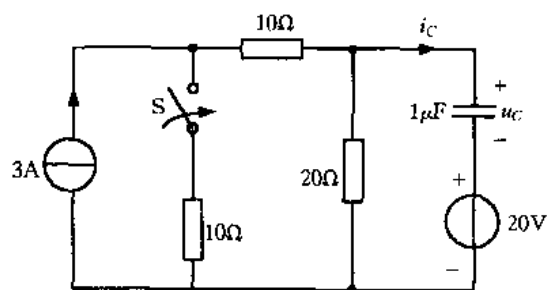
题图 1.1



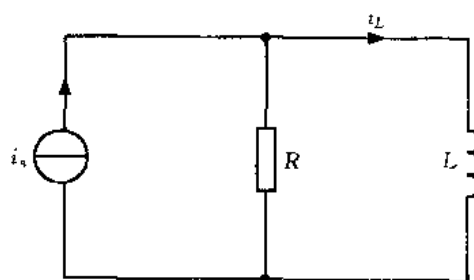
题图 1.2

二、(10 分)在题图 1.2 所示电路中,电阻 R_L 可调节。试求 R_L 为何值时能获得最大功率 P_{\max} ,并求此最大功率的值。

三、(10 分)题图 1.3 所示电路,换路前电路已稳定。当 $t=0$ 时,将开关 S 闭合。求换路后的 $u_C(0_+)$, $i_C(0_+)$ 值。



题图 1.3



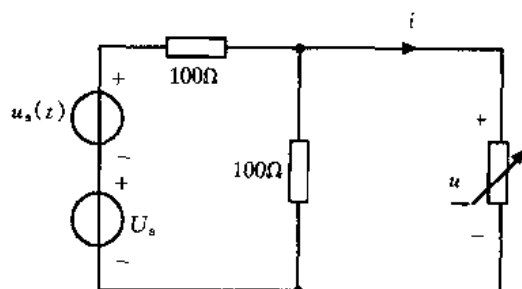
题图 1.4

四、(8 分)求题图 1.4 所示电路中电感电流的阶跃响应 $s(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 。

五、(5 分)在题图 1.5 所示电路中,已知非线性电阻的伏安特性为

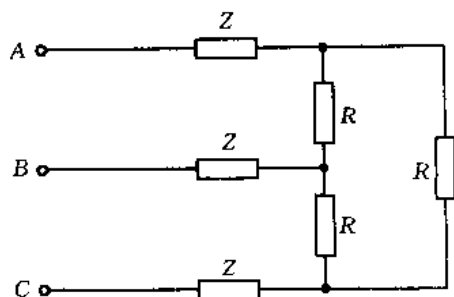
$$i = g(u) = \begin{cases} \frac{1}{50}u^2 \text{ A} & u > 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

直流电压源 $U_s = 4 \text{ V}$, 小信号电压源 $u_s(t) = 15\cos\omega t \text{ mV}$ 。试求工作点和在工作点处由小信号电压源产生的电压和电流。

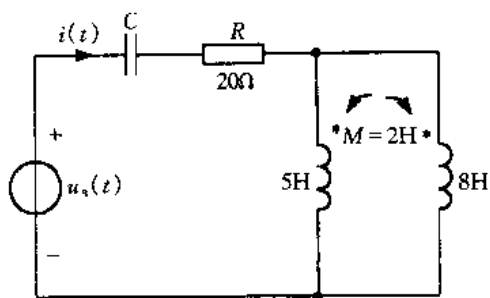


题图 1.5

六、(8 分)在题图 1.6 所示对称三相电路中,
 $R = 3 \Omega$, $Z = 2 + j4 \Omega$, 电源线电压有效值为
380 V。求三相电源供给的总有功功率 P 及总无功功率 Q 的值。



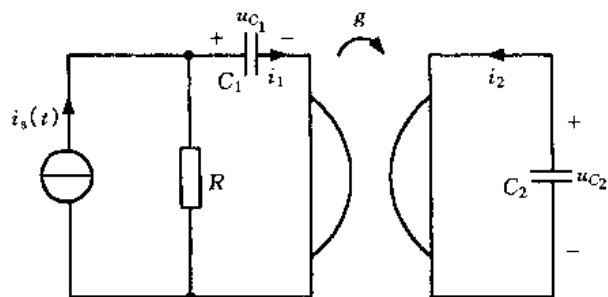
题图 1.6



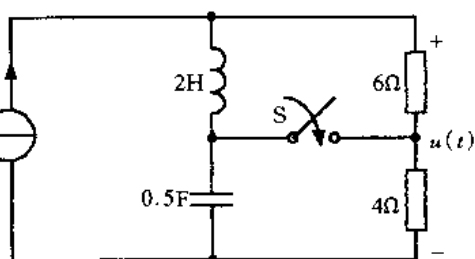
题图 1.7

七、(10分)已知在题图 1.7 所示电路中, $u_s(t)$ 与电流 $i(t)$ 同相, 且 $u_s(t) = 100\cos 10^3 t$ V。试求电容 C 的值和电流 $i(t)$ 。

八、(5分)写出题图 1.8 所示电路的状态方程, 其中 g 为回转器的回转电导。



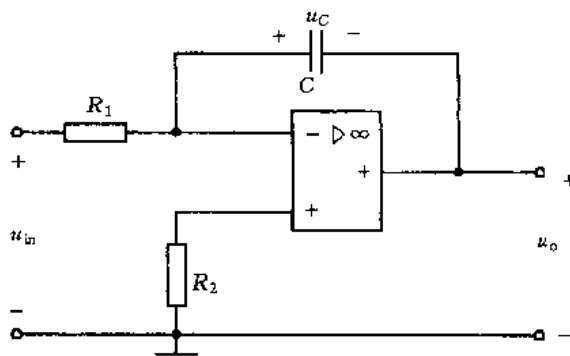
题图 1.8



题图 1.9

九、(10分)题图 1.9 所示电路, 换路前已处于稳态。当 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求当 $t \geq 0$ 时的 $u(t)$ 。

十、(10分)试证明题图 1.10 所示电路是反相积分器电路。



题图 1.10

十一、(10分)有一个 R, L, C 非时变一端口(无源)电路, 如题图 1.11 所示。若 $i_s = I_s \sqrt{2} \sin \omega t$ A, Z_i 为输入阻抗, 试证:

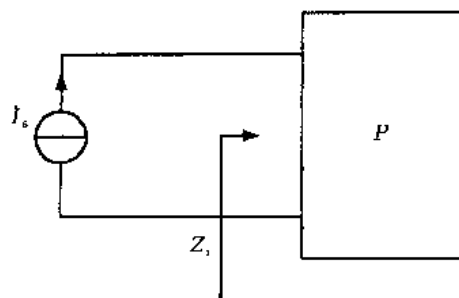
$$Z_i = \frac{P + j2\omega(W_m - W_e)}{I_s^2}$$

式中 P 为电路吸收的有功功率; W_m, W_e 分别为

$$W_m = \sum \frac{1}{2} L_k I_k^2$$

$$W_e = \sum \frac{1}{2} C_k U_k^2$$

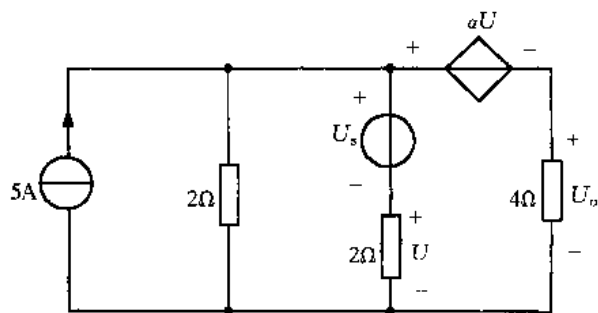
十二、(8分)一电感线圈接到电压为 8 V 的直流电源,流经的电流为 2 A,而接到电压为 10 V 的正弦电源时,电流为 2 A。同一线圈接到有效值为 50 V 的非正弦周期电源,这时电流的有效值为 9 A。已知该非正弦电源只含基波和 3 次谐波,且其周期与上述的正弦电源的周期相等。求电源电压各谐波分量的有效值。



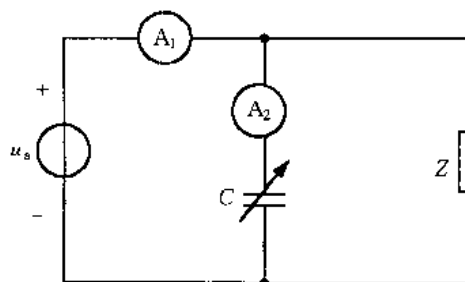
题图 1.11

2001 年西安交通大学研究生入学考试试题

一、(10 分)题图 1.1 所示直流电路,若使电压 U 不受电压源 U_s 的影响,试确定受控源控制系数 α 的值。



题图 1.1

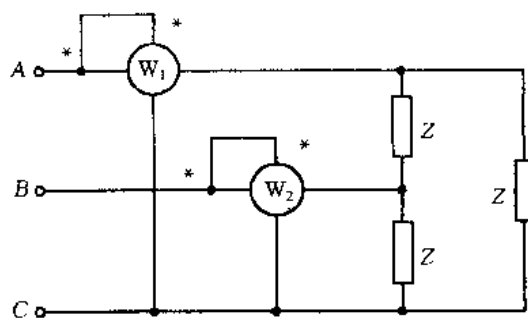


题图 1.2

二、(10 分)题图 1.2 所示正弦稳态电路中,电容 C 值可调,电压源 $u_s = 10\sqrt{2}\cos 10t$ V。已知在 $C=0$ 时,电流表 A_1 读数为 2 A,电流表 A_2 读数为零;在 $C=C_1$ 时,电流表 A_1 和 A_2 的读数均为 2 A。试确定电容 C 为 C_1 时的值及阻抗 Z 的最简等效参数值(电流表为理想电磁系表)。

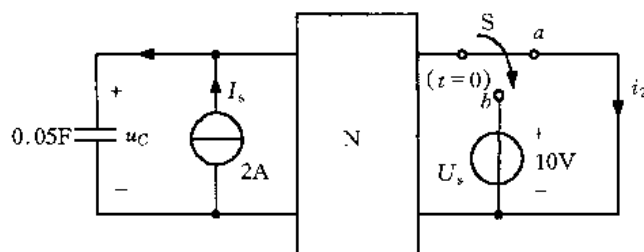
三、(10 分)题图 1.3 所示对称三相电路中,电源线电压有效值为 380 V,功率表接法如图示,读数分别为 $W_1 = 866$ W, $W_2 = 433$ W。试计算:

- (1) 电路的无功功率;
- (2) 电路的功率因数 λ ;
- (3) 负载阻抗 Z 。



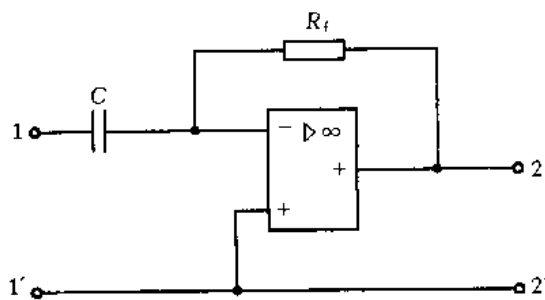
题图 1.3

四、(7 分)图示电路,网络 N 仅由线性电阻组成,开关 S 合在位置 a 已达稳态时,电容电压 u_C 为 20 V,电流 i_2 为 1 A。 $t=0$ 时开关 S 动作,由 a 合向 b ,求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

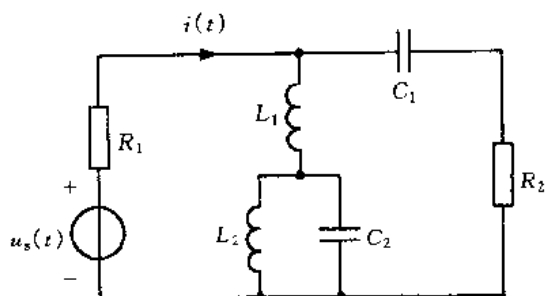


题图 1.4

五、(10分)求题图 1.5 所示双口网络的 Z 参数(相量形式)。设电路中电源的角频率为 ω 。



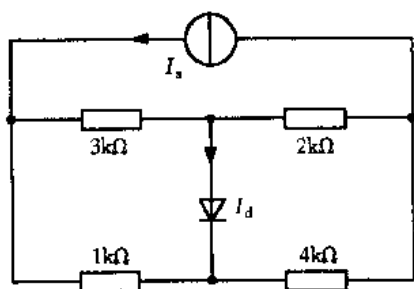
题图 1.5



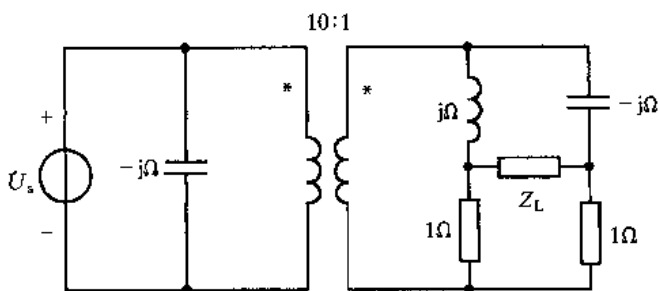
题图 1.6

六、(10分)题图 1.6 所示电路中,电源 $u_s(t) = 10 + 50\cos 100t + 20\cos 300t$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $C_1 = 200\ \mu\text{F}$, $C_2 = 100\ \mu\text{F}$ 。已知:电感 L_1 中无基波电流,电容 C_1 中只有基波电流。试分别求电感 L_1, L_2 的值和电流 $i(t)$ 。

七、(10分)题图 1.7 所示电路中,二极管为理想二极管。试求 $I_s = 6\ \text{mA}$, $I_s = -6\ \text{mA}$ 两种情况下,二极管中的电流 I_d 。



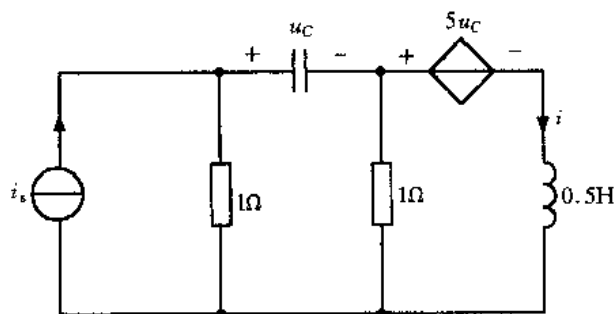
题图 1.7



题图 1.8

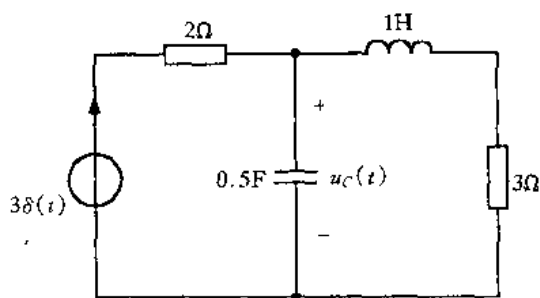
八、(7分)正弦稳态电路的相量模型如题图 1.8 所示。试计算 Z_L 为何值时获最大功率,并求此最大功率。已知电源 $\dot{U}_s = 200 \angle 0^\circ\ \text{V}$ 。

九、(8分)编写题图 1.9 所示电路的状态方程,并整理为标准形式。



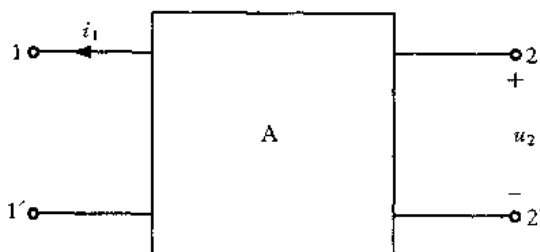
题图 1.9

十、(8分)题图 1.10 所示电路,电源为冲激电流源,且已知 $u_C(0_-) = 0$,试求电容电压 $u_C(t)$ 。



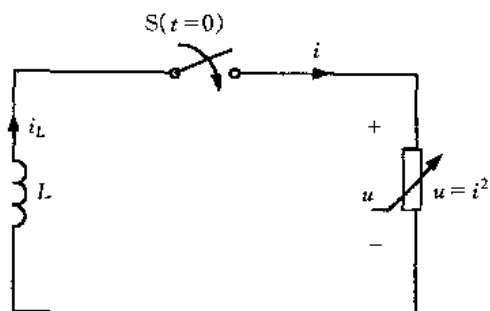
题图 1.10

十一、(5分)电路如题图 1.11 所示。已知:当端口 1-1'置理想电压源 $u_{s1} = 10\text{ V}$ 时(上为正极性), $u_2 = 8\text{ V}$ (开路电压)。当端口 1-1'短路时, $i_1 = 20\text{ mA}$, $u_2 = 2\text{ V}$ (开路电压)。问当端口 1-1'置电阻 $R = 500\text{ }\Omega$ 时, $i_1 = ?$, $u_2 = ?$



题图 1.11

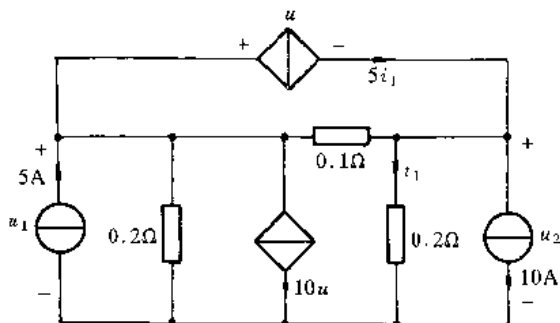
十二、(5分)设电路如题图 1.12 所示,其中非线性电阻的伏安关系为 $u = i^2$ 。在 $t = 0$ 时将开关 S 闭合,求 S 闭合后的电流 $i(t)$ 。已知 $t = 0_-$ 时, $i_L(0_-) = I_0$ 。



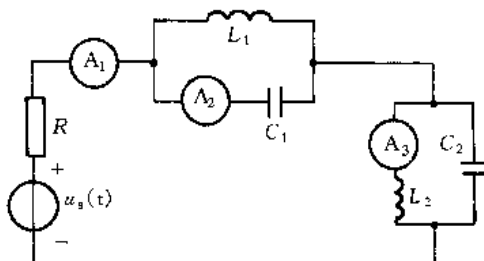
题图 1.12

2002 年西安交通大学研究生入学考试试题

一、(10 分)题图 1 所示直流电路,各参数如图中标注。试用结点法求电压 u_1, u_2 。



题图 1

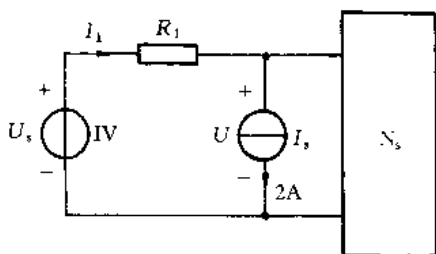


题图 2

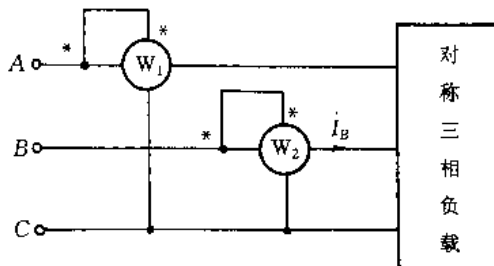
二、(10 分)已知题图 2 所示电路中电压源:

$u_s(t) = 30 + 120\cos 1000t + 60\cos(2000t + \frac{\pi}{4})\text{V}$, $L_1 = 40\text{mH}$, $C_1 = 25\mu\text{F}$, $L_2 = 10\text{mH}$, $C_2 = 25\mu\text{F}$ 和 $R = 30\Omega$ 。试求图中各电磁系电流表的读数。

三、(8 分)题图 3 所示电路中,网络 N_s 为含源线性电阻网络,已知 $U_s = 1\text{V}$, $I_s = 2\text{A}$, 电压 $U = 3I_1 - 3$ 。(1) 试给出网络 N_s 的戴维南等效电路。(2) 若要使电流 $I_1 = 1\text{A}$, 试确定电阻 R_1 的值。



题图 3

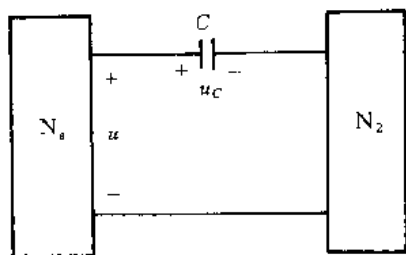


题图 4

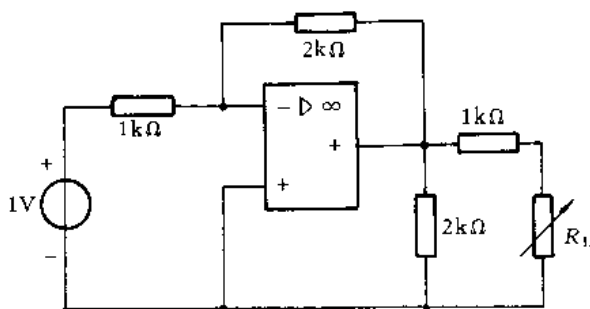
四、(10 分)题图 4 所示对称三相电路中,相电压 $\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{V}$, $\dot{U}_B = 220 \angle -120^\circ \text{V}$, $\dot{U}_C = 220 \angle 120^\circ \text{V}$, 功率表 \textcircled{W}_1 的读数为 4kW , 功率表 \textcircled{W}_2 的读数为 2kW 。试求电流 I_B 。

五、(10 分)题图 5 所示电路工作在正弦稳态。已知含源网络 N_s 两端电压为 $u = 10\cos(1000t + 60^\circ)\text{V}$, 电容器两端电压 $u_C = 5\cos(1000t - 30^\circ)\text{V}$, 且电容器在该频率下的阻抗为 10Ω 。试求无源网络 N_2 的复阻抗 Z 和平均功率 P 。

六、(8 分)题图 6 所示电路中含有理想运算放大器,负载 R_L 可调。试问 R_L 为何值时可获得最大功率,并求此最大功率。

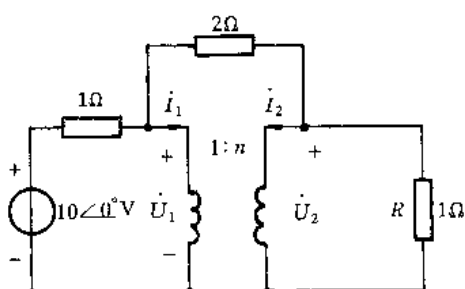


题图 5

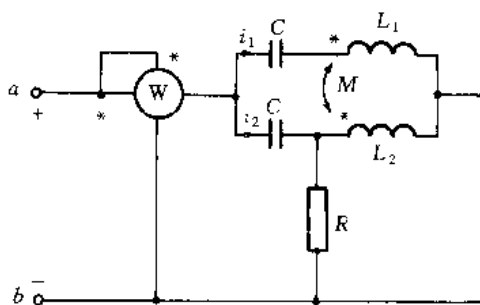


题图 6

七、(10分)题图 7 所示电路,为使 R 获得最大功率,求 n 及此最大功率。



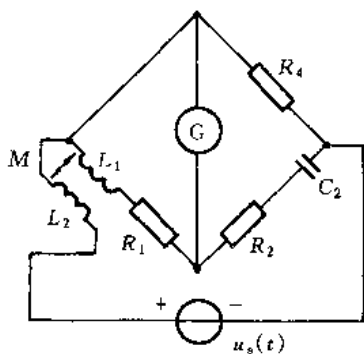
题图 7



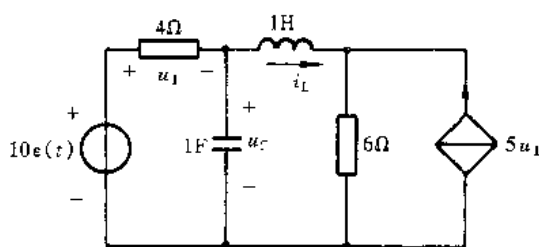
题图 8

八、(5分)电路如题图 8 所示,试求电源角频率 ω 为何值时,功率表的读数为零。

九、(7分)题图 9 所示电路为一测试互感系数 M 的电桥。设电源电压 $u_s(t) = U_m \cos \omega t$ V。(1) 欲使电桥平衡,试标出互感线圈的同名端。(2) 推导出该电桥的平衡条件。



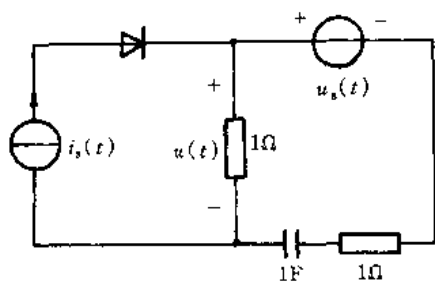
题图 9



题图 10

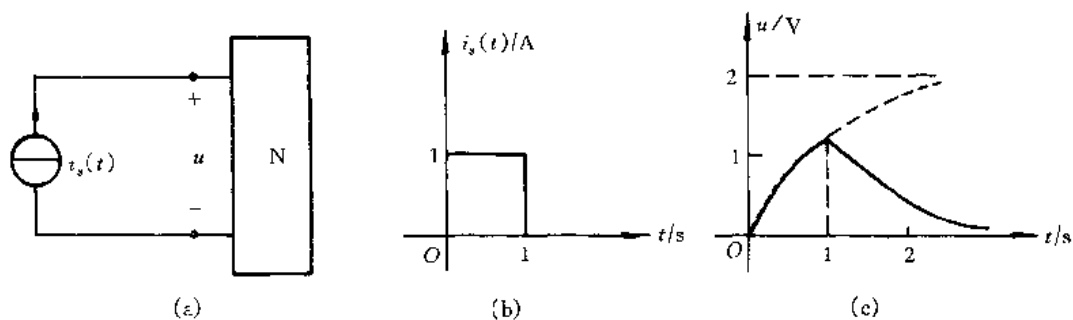
十、(10分)按题图 10 所示电路中指出的电压 u_C 和电流 i_L ,写出状态方程的标准形式。

十一、(7分)在题图 11 所示电路中,理想二极管与电流源相串联。已知 $i_s(t) = e^{-t} \epsilon(t)$, $u_s(t) = 3\epsilon(t)$, $u_C(0_-) = 0$ 。试求 $t > 0$ 时的电压 $u(t)$ 。



题图 11

十二、(5 分)题图 12 所示电路(a)中, N 为无源线性网络, 电流源 $i_s(t)$ 的波形如图(b)所示。电压 u 的零状态响应如图(c)所示。已知该电路可用一阶微分方程来描述, 且时间常数 $\tau = 0.8 \text{ s}$ 。试给出该无源线性网络 N 的结构, 并确定元件的值。



题图 12

附录4 西安交通大学近年研究生入学考试试题答案

1998 年电路试题答案

一、1. $\frac{(1-\beta)R_3+R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}+(1-\beta)\frac{R_3}{R_2}}$

2. $\left(\frac{1}{R_2+R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{n1}-\frac{1}{R_4}U_{n2}=I_{s1}-I_{s2}+\frac{U_{s4}}{R_4}$
 $-\left(\frac{\beta}{R_2+R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{n1}+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)U_{n2}=I_{s3}-\frac{U_{s6}}{R_6}-\frac{U_{s4}}{R_4}$

3. -1.2 A 4. 2 V 5. 2 mA

6. $\begin{cases} (R_1+j\omega L_2)\dot{I}_{11}-j\omega(L_2-M)\dot{I}_{12}=\dot{U}_{s1} \\ -j\omega(L_2-M)\dot{I}_{11}+[j\omega(L_2+L_3-2M)-\frac{1}{j\omega C_4}]\dot{I}_{12}=0 \end{cases}$

7. $0.2e^{-10t}\text{ mA}$

8. $19.59\ \Omega$ 133.4 mH

9. $\begin{matrix} & 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \\ B_f=2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$ $\begin{matrix} & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \\ Q_f=2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$

10. 令 $\Delta=L_1L_2-M^2$

$$\frac{du_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{R_1C_1}u_{C_1}-\frac{1}{C}i_{L_1}, \quad \frac{du_{C_2}}{dt}=-\frac{1}{C_2}i_{L_1}+\frac{1}{C_2}i_{L_2}$$

$$\frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{L_2}{\Delta}u_{C_1}-\frac{M+L_2}{\Delta}u_{C_2}+\frac{M}{\Delta}u_s, \quad \frac{di_{L_2}}{dt}=\frac{M}{\Delta}u_{C_1}-\frac{M+L_1}{\Delta}u_{C_2}+\frac{L_1}{\Delta}u_s$$

二、1. 17.424 kW 55 A 0 A

2. 10.7 A 88.58 V $2\ 292.3\text{ W}$

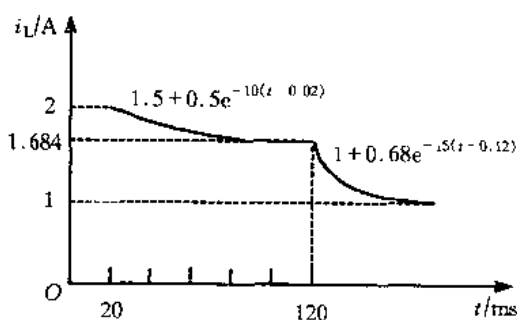
3. $(20+j20)\ \Omega$ 1.25 W

4. $Y=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+j\omega C_i & -j\omega C_i \\ -j\omega C_i+g_m & j\omega C_i+\frac{1}{R_o}+j\omega C_o \end{bmatrix}$

5. $[1.5+0.5e^{-(10(t-0.02)}]\text{ A}$ $t_1 < t < t_2$

$[1+0.684e^{-(15(t-0.120)}]\text{ A}$ $t > t_2$

i_L 的波形图见题解图 2.5



题解图 2.5

1999 年电路试题答案

$$\text{一、} i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{8}{4} = 2 \text{ A} \quad i_L(\infty) = \frac{9}{6} + 2 = 3.5 \text{ A} \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 3.5 + (2 - 3.5)e^{-2t} = 3.5 - 1.5e^{-2t} \text{ A}$$

$$i_1(t) = \frac{u_L(t) - 8}{4} = \frac{\frac{di_L(t)}{dt} - 8}{4} = (0.75e^{-2t} - 2) \text{ A}$$

$$i(t) = i_L(t) + i_1(t) = 3.5 - 1.5e^{-2t} + 0.75e^{-2t} - 2 = (1.5 - 0.75e^{-2t}) \text{ A}$$

$$\text{二、} \quad u_{oc} = U_s \quad R_{eq} = 5 \Omega$$

$$\text{因 } \frac{U_s}{5+4} \times 4 = 8$$

$$\text{故 } U_s = 18 \text{ V} \quad u_{oc} = 18 \text{ V}$$

当 $R = 5 \Omega$ 时获得最大功率, 其值为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{18^2}{4 \times 5} = 16.2 \text{ W}$$

$$\text{三、} \quad i_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$$u_C(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t - 1 & 1 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

$$u_C(12) = 1 \text{ V} \quad W_C(12) = \frac{1}{2} C u_C^2(12) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1 \text{ J}$$

四、根据理想运放性质

$$I_1 = I_1 \quad I_3 = I_4 \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_a = \dot{U}_b \quad Z_m = \frac{\dot{U}_1}{I_1} = -j1000 \Omega$$

$$\text{五、} U_{1-1'}(s) = U_1(s) + sL_1 I_1(s) + sMI_2(s)$$

$$U_{2-2'}(s) = U_2(s) + sL_2 I_2(s) + sMI_1(s)$$

回转器方程

$$\begin{cases} U_1(s) = -rI_2(s) \\ U_2(s) = rI_1(s) \end{cases}$$

代入 $U_{1-1'}$ 和 $U_{2-2'}$ 式中, 整理得

$$Z(s) = \begin{bmatrix} sL_1 & sM - r \\ sM + r & sL_2 \end{bmatrix}$$

六、求动态元件以外电路的 R_{eq} 为

$$R_{eq} = 4 + \alpha \quad 0 < 4 + \alpha < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

解得

$$-4 < \alpha < 36$$

七、线性电路部分的戴维宁等效电路的开路电压和电阻分别为

$$u_{oc} = 10 \text{ V} \quad R_{eq} = 3 \Omega$$

列得方程组

$$\begin{cases} U = 10 - 3I \\ U = I^2 \end{cases}$$

解得

$$I_Q = 2 \text{ A} \quad U_Q = 4 \text{ V} \quad R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_{i=2} = 4 \Omega$$

八、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$$

九、电流 i_1 为零,表明 $L_1 C_1$ 处于并联谐振,即

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{1/10^{-6}}} = 1000 \text{ rad/s}$$

因为 u_s 与 i 同相, R_1, R_2, L_2, C_2 发生串联谐振,即 $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

$$\text{所以} \quad L_2 = \frac{1}{\omega^2 C_2} = \frac{1}{(10^3)^2 \times 250 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

欲求 I_{C_1} , 须知 L_1, C_1 并联电路两端的电压, 此电压即 C_1, R_2 串联支路两端的电压, 即

$$\dot{U} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} \times (R_2 - j \frac{1}{\omega C_2}) = \frac{8 \angle 0^\circ}{1 + 3} \times (3 + \frac{1}{j10^3 \times 250 \times 10^{-6}}) = 10 \angle -53.1^\circ \text{ V}$$

$$I_{C_1} = \frac{\dot{U}}{-j \frac{1}{\omega C_1}} = \frac{10 \angle -53.1^\circ}{-j1000} = 10^{-2} \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

故得

$$i_{C_1} = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos(1000t + 36.9^\circ) \text{ A}$$

十、设网络 N 的戴维宁等效电路开路电压为 U_{oc} , 等效电阻为 R_{eq} , 根据 $U_s = 20 \text{ V}$, $U_2 = 12.5 \text{ V}$, 可解得网络 N 等效电路的电流为 0.5 mA , 得方程

$$12.5 = 0.5 R_{eq} + U_{oc} \quad (1)$$

而当 ab 端短路时, 短路电流是 20 V 电压源和 U_{oc} 共同作用产生的, 所以

$$\frac{20}{2.5} + \frac{U_{oc}}{R_{eq}} = 10 \quad (2)$$

联立式①和②, 解得

$$U_{oc} = 10 \text{ V} \quad R_{eq} = 5 \text{ k}\Omega$$

十一、(1) $I_1 = \left| \frac{380}{16 + j12} \right| \sqrt{3} \approx 32.9 \text{ A}$

$$(2) P = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3} \times 380 \times 32.9 \cos 36.9^\circ \approx 17316.5 \text{ W}$$

$$(3) C = \frac{P/3}{\omega U^2} (\tan \varphi - \tan \varphi') = \frac{17316.5/3}{314 \times 220^2} (\tan 36.9^\circ - \tan 18.2^\circ) = 160.7 \mu\text{F}$$

$$(4) \lambda = 0.95 \quad \varphi = \arccos 0.95 = 18.2^\circ$$

十二、应用结点法列方程

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + sC\right)U_1(s) - sCU_2(s) = \frac{U_s(s)}{R_1} - I_1(s) \\ -sCU_1(s) + \left(\frac{1}{R_1} + sC\right)U_2(s) = -I_2(s) \end{cases}$$

理想变压器方程为

$$\begin{cases} U_1(s) = 2U_2(s) \\ I_1(s) = -\frac{1}{2}I_2(s) \end{cases}$$

解得

$$U_2(s) = \frac{20U_s(s)}{50 + s}$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_s(s)} = \frac{20}{s + 50} \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 20e^{-50t} \text{ V}$$

十三、列结点方程

$$\begin{cases} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5})u_{n1} - \frac{1}{5}u_{n2} - \frac{1}{2}u_{n3} = 2 - 5 \\ -\frac{1}{5}u_{n1} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{4})u_{n2} = 3 - 1 \\ -\frac{1}{2}u_{n1} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})u_{n3} = 2 - 1 \end{cases}$$

可解得待求支路两端电压 $u = -1.153 \text{ V}$, 故得

$$i = \frac{u}{1} = -1.153 \text{ A}$$

2000 年电路试题答案

一、 $I = 20 \text{ A}$

二、 $U_\infty = 2 \text{ V} \quad R_{eq} = 2 \Omega \quad P_{\max} = 0.5 \text{ W}$

三、 $u_C(0_+) = 40 \text{ V} \quad i_C(0_+) = -4.5 \text{ A}$

四、 $s(t) = i_L(t) = (1 - e^{-\frac{R}{L}t})\epsilon(t) \quad h(t) = i_L(t) = \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\epsilon(t)$

五、 $U_Q = 1 \text{ V} \quad I_Q = 20 \text{ mA}$

$$\Delta u = 2.5 \cos \omega t \text{ mA}$$

$$\Delta i = 0.1 \cos \omega t \text{ mA}$$

六、 $P = 17.375 \text{ kW} \quad Q = 23.158 \text{ var}$

七、 $C = 0.25 \mu\text{F} \quad i(t) = 5 \cos 10^3 t \text{ A}$

$$\text{八、} \begin{bmatrix} \frac{du_{C_1}}{dt} \\ \frac{du_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g}{C_1} \\ C_2 & -\frac{g^2 R}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{gR}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \end{bmatrix}$$

九、 $u(t) = 4 + 6e^{-0.5t} + 6e^{-3t}$

十、证明略

十一、证明略

十二、 $U_{(1)} = 43.13 \text{ V}$ $U_{(3)} = 25.3 \text{ V}$

2001 年电路试题答案

一、 $\alpha = -1$

二、 $C_1 = 0.02 \text{ F}$ $Z = 4.33 + j2.5 \Omega$

三、(1) $Q = 750 \text{ var}$ (2) $\lambda = 0.87$ (3) $Z = 289 \angle 30^\circ \Omega$

四、 $u_C(t) = 25 - 5e^{-2t}$

五、 $Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C} & 0 \\ -R_1 & 0 \end{bmatrix}$

六、 $L_1 = 125 \text{ mH}$ $L_2 = 1 \text{ H}$

$i(t) = 0.1 + 0.243\cos(100t + 14^\circ) + 0.2\cos 300t \text{ A}$

七、(1) $I_d = 0$ (2) $I_d = 2.5 \text{ mA}$

八、 $Z_L = 1 \Omega$ $P_{\max} = 100 \text{ W}$

九、 $\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ -11 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \end{bmatrix}$

十、 $u_C(t) = 12e^{-t} - 6e^{-2t} \text{ V}$

十一、 $i_1 = 6.67 \text{ mA}$ $u_2 = 4 \text{ V}$

十二、 $\frac{di_L}{dt} = \frac{i_L^2}{L}$

2002 年电路试题答案

一、 $u_1 = 0 \text{ V}$ $u_2 = 1 \text{ V}$

二、各表读数 $\textcircled{A_1} = 1 \text{ A}$ $\textcircled{A_2} = 1.5\sqrt{2} \text{ A}$ $\textcircled{A_3} \approx 2.345 \text{ A}$

三、(1) N_s 等效电路中 $U_{\infty} = 3 \text{ V}$ $R_{eq} = 3 \Omega$

(2) 电阻 $R_1 = 1 \Omega$

四、 $I_B = 10.53 \angle -150^\circ \text{ A}$

五、 $Z = 22.4 \angle 26.6^\circ \Omega$ $P = 2.5 \text{ W}$

六、 $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ $P_{\max} = 1 \text{ mW}$

七、 $n = 1$ $P_{\max} = 25 \text{ W}$

八、 $\omega = \sqrt{\frac{L_2 + M}{C(L_1 L_2 - M^2)}}$

九、略

$$十、\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -1 \\ 31 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -30 \end{bmatrix} 10\epsilon(t)$$

$$十一、u(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\epsilon(t)$$

$$十二、R = 2\Omega \quad C = 0.4F \quad RC \text{ 并联}$$

参考文献

- [1] 邱关源主编. 电路(第四版). 北京:高等教育出版社,1999.6
- [2] 何国菊等. 电路典型题解. 北京:清华大学出版社,1995.12
- [3] 王淑敏主编. 电路基础. 西安:西北工业大学出版社,2000.10
- [4] 赵录怀主编. 电路重点难点及典型题精解. 西安:西安交通大学出版社,2000.10
- [5] C.A. 狄苏尔,葛守仁著. 电路基本理论. 林争辉主译. 北京:高等教育出版社,1979
- [6] 邱关源编著. 网络理论分析. 北京:科学出版社,1982
- [7] 江泽佳主编. 电路原理. 北京:高等教育出版社,1992
- [8] 周长源主编. 电路理论基础(第二版). 北京:高等教育出版社,1996
- [9] 李瀚荪编. 电路分析基础(第三版). 北京:高等教育出版社,1993
- [10] 肖达川编著. 电路分析(第二版). 北京:科学出版社,1984